

## МЕТОДИ АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНИХ РЕЖИМІВ КОЛИВАНЬ ОДНОВИМІРНИХ СЕРЕДОВИЩ ІЗ УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ СИЛ ОПОРУ

© Пукач П., 2015

Розглянуто математичні моделі коливань важливих класів одновимірних середовищ, згинальною жорсткістю яких можна знехтувати. Застосувати наближені аналітичні методи побудови розв'язків у математичних моделях динамічних процесів у них не вдається. Тому подано обґрунтування існування та єдиності розв'язків; проведено якісну їх оцінку; на базі числового аналізу підтверджено наведене вище та проаналізовано особливості динамічних процесів деяких із розглянутих класів систем.

**Ключові слова:** математична модель, нелінійні коливання, нелінійна крайова задача, метод Гальоркіна, метод монотонності.

**In this paper we consider the mathematical models of oscillations of important classes of one-dimensional environments, bending stiffness of which can be neglected. Approximate analytical methods of solution of mathematical models of dynamic processes cannot be applied. So here is given to justify the existence and uniqueness of solutions; carried out a qualitative their evaluation; based on numerical analysis are considering in this paper. Also the features of dynamic processes of some of examined class of systems are analyzed .**

**Key words:** mathematical model, nonlinear vibrations, nonlinear boundary value problem, Galerkin method, method of monotony.

### Актуальність проблеми. Огляд літератури

Розвиток нової техніки та перехід до швидкісного машинобудування вимагає постановки і розв'язання задач, математичні моделі яких не можна дослідити асимптотичними методами нелінійної механіки: задачі про коливання гнучких елементів пасових або ланцюгових передач, стрічкових систем для запису та відтворення інформації, конвеєрних ліній, різних канатних витягів, устаткування для рулонування паперу, металеві стрічки, дроту, нитки, устаткування для буріння нафтових і газових свердловин, трубопроводів тощо. У випадку нелінійного закону пружності матеріалу, суттєво нелінійної залежності амплітуди коливань від сил опору тощо задача пов'язана з принциповими математичними труднощами, оскільки відсутні загальні аналітичні методи розв'язування такого класу задач. Ця проблема в загальному випадку розв'язана лише для дуже вузького класу задач. Тому не існує загальних методик визначення амплітудно-частотних характеристик коливального процесу. З іншого боку, якісні методи загальної теорії нелінійних крайових задач дають змогу для широкого класу згаданих вище коливальних систем отримати результати коректності розв'язку задачі (йдеться про існування, єдиність та неперервну залежність від початкових даних). Вказана методика дає змогу обґрунтувати коректність розв'язку певної задачі в моделі та під час подальшого дослідження розв'язку застосовувати різноманітні наближені

(числові) методи. Отже, проблеми якісних методів дослідження нелінійних коливальних систем є актуальними. Методика якісного вивчення коливань обмежених та необмежених тіл під дією сил опору, викладена у цій роботі, ґрунтується на загальних принципах теорії нелінійних крайових задач – методі Гальоркіна та методі монотонності [1, 2]. Наукова новизна полягає в узагальненні методики вивчення нелінійних задач на нові класи коливальних систем, обґрунтуванні коректності розв’язку для вказаних математичних моделей, які практично застосовуються у реальних технічних коливальних системах.

Розв’язки задач для нелінійних хвильових рівнянь та систем, які моделюють динамічні процеси у коливальних системах, досліджено, зокрема, у працях [3–13]. Деякі результати коректності розв’язку у цих працях отримані в припущенні певної якісної поведінки розв’язку, початкових даних та правої частини рівняння (системи), інші результати – без таких припущень. У праці [12] досліджено першу змішану задачу для слабонелінійного гіперболічного рівняння другого порядку вигляду (1). Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв’язку в просторах локально інтегровних функцій. У [14] вивчено змішану задачу для слабонелінійної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. Аналогічні питання для математичної моделі, яка описується задачею для нелінійного хвильового рівняння, розглянуто в [15].

### Постановка задачі. Якісні методи дослідження математичних моделей середовищ із урахуванням нелінійних сил опору

Наведемо методику якісного дослідження математичної моделі нелінійних коливань напівнеобмеженого неоднорідного середовища за умови нелінійної вінклерівської сили. У найпростішій постановці модель описується змішаною задачею для рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t), \quad p > 2 \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \quad (3)$$

та крайовою умовою

$$u(0,t) = 0. \quad (4)$$

У співвідношеннях (1)–(4):

- $u(x,t)$  – позовжне (поперечне) переміщення середовища з координатою  $x$  в довільний момент часу  $t$ ;
- $a$  – стала, яка характеризує площу поперечного перерізу середовища, погонну масу, пружні властивості середовища тощо;
- $g > 0$  – стала, яка враховує наведені вище характеристики та описує нелінійний характер сил опору;
- $f(x,t)$  – функція, яка описує розподіл вздовж середовища сил;
- $u_0(x)$  та  $u_1(x)$  описують початковий стан середовища (початкове відхилення – форму та початкову швидкість).

Вказане рівняння, зокрема, описує вимушені коливання стрижня чи канату в середовищі з опором [2, с. 234]. Середовище напівбезмежне, тому  $x \in (0, +\infty)$ , а динамічний процес розглядаємо

на як завгодно великому часовому інтервалі, тому  $0 \leq t < +\infty$ . Всюди надалі в цій роботі вживаємо такі позначення для довільних  $R > 0$ ,  $t \in (0, T]$ :

$Q_{R,t} = (0, R) \times (0, t)$  – прямокутник з основою  $(0, R)$  на осі  $Ox$  та висотою  $t$ ;

$Q_t = (0, +\infty) \times (0, t)$  – півсмуга з основою  $(0, +\infty)$  на осі  $Ox$  та висотою  $t$ .

Для опису якісних властивостей вихідних даних та розв'язку використовуватимемо деякі простори узагальнених функцій:

$H_0^1(0, R)$  – простір функцій, квадрати яких разом з їхніми похідними інтегровні за Лебегом на інтервалі  $(0, R)$ , причому на кінцях інтервалу виконуються однорідні крайові умови

$u|_{x=0} = u|_{x=R} = 0$ . Норму в цьому просторі визначаємо так:  $\|u\|_{H_0^1(0,R)}^2 = \int_0^R \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$ ;  $H_{0,loc}^1(0, +\infty)$  –

простір функцій, які належать до  $H_0^1(0, R)$  для довільного  $R > 0$ , причому  $u(0, t) = 0$ ;  $L_{loc}^r(\bar{Q})$  – простір функцій, інтегровних зі степенем  $p$  за Лебегом на інтервалі  $(0, R)$  для довільного  $R > 0$ , причому  $r \in (1, +\infty)$ .

**Основний результат.** Узагальненим розв'язком задачі (3)–(6) називаємо функцію  $u$ , що задовольняє умову (4) та інтегральну тотожність

$$\int_{Q_t} \left[ -\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dt + \int_{Q_t} \left[ \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t} v - fv \right] dx dt + \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x, t) dx - \int_0^{+\infty} u_1(x) v(x, 0) dx. \quad (5)$$

для довільного  $t \in (0, T]$  та для довільної функції  $v$  з обмеженим носієм, такої, що тотожність (5) має сенс. Стосовно коефіцієнтів, правої частини рівняння (1) та початкових даних припускати мемо виконання таких умов.

1. Функція  $f \in L_{loc}^q(\bar{Q})$ , причому число  $q$  – спряжене до  $p$ , тобто  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

2. Початкове відхилення  $u_0(x)$  – функція, яка належить до  $H_0^1(0, R)$  для довільного  $R > 0$ , причому  $u_0(0) = 0$ ; початкова швидкість  $u_1(x)$  – функція, яка належить до  $L^2(0, R)$  для довільного  $R > 0$ .

*Основний результат якісного дослідження:* якщо математична модель коливального процесу описується задачею (2)–(4) для рівняння (1), то у разі виконання умов 1–2 існує єдиний узагальнений розв'язок  $u(x, t)$  задачі (1)–(4), причому: функція  $u$  – неперервна за змінною  $t$  на відрізьку  $[0, T]$ , а за змінною  $x$  належить до простору  $H_{0,loc}^1(0, +\infty)$ ; похідна  $\frac{\partial u}{\partial t}$  – неперервна та локально інтегровна зі степенем  $p$  за змінною  $t$  на відрізьку  $[0, T]$ , а за змінною  $x$  – локально інтегровна зі степенем  $p$ .

### Результати числового інтегрування у модельному випадку

Розглянемо окремий випадок рівняння (1), а саме випадок власних коливань суцільного середовища за умови незмінних вздовж його довжини фізико-механічних характеристик, тобто

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - g_0 \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t).$$

У останньому співвідношенні  $a$  та  $g_0$  – сталі, а крайові умови набувають вигляду  $u(0,t) = u(l,t) = 0$ . Що стосується початкової форми, то

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 2h - \frac{2hx}{l}, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$$

Нехай початкова швидкість точок суцільного середовища дорівнює нулеві, тобто  $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ . Сформульована задача описує власні поперечні коливання нитки (канату), яка у

початковий момент часу навантажена зосередженою силою у точці із координатою  $x = \frac{l}{2}$ .

Наведена задача є задачею вигляду (10)–(13). Як показано вище, існує єдиний узагальнений розв'язок цієї задачі. Тому для числового інтегрування рівнянь руху вибір методу є принциповим лише з обчислювального погляду. Розглянуте рівняння зведемо до системи двох рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = v(x,t), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - g_0 |v(x,t)|^{p-2} v(x,t). \end{cases}$$

Розділимо проміжок  $[0;l]$  точками дискретизації  $x_i = i \frac{l}{n}$  на  $n$  частин довжиною  $\Delta = \frac{l}{n}$ .

Апроксимуємо похідну за просторовою змінною скінченною різницею  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{u(x_{i-1},t) - 2u(x_i,t) + u(x_{i+1},t))}{\Delta^2}$ . Числове розв'язування системи звичайних

диференціальних рівнянь  $\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ v'(t) = L(t,v) \end{cases}$ , де  $L(t,v) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - g_0 |v(x,t)|^{p-2} v(x,t)$ , здійснено

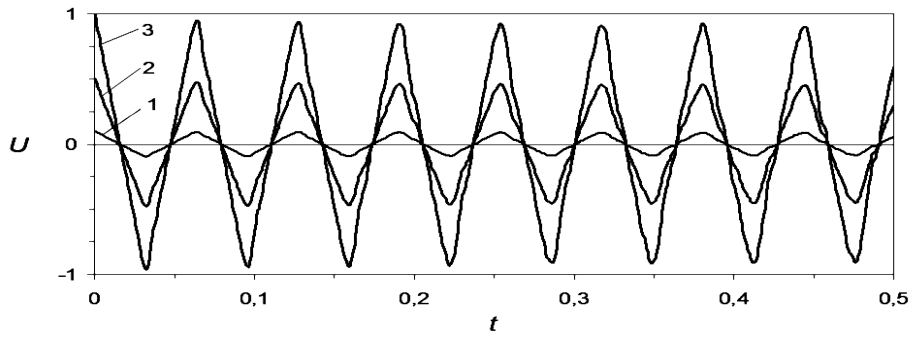
методом Рунге–Кутта четвертого.

На рис. 1, а–г відображено графічні зміни в часі відхилення в часі від рівноважного положення серединної точки середовища за умов різного початкового відхилення від положення рівноваги (крива 1– $h = 0,1$ ; крива 2– $h = 0,5$ ; крива 3– $h = 1$ ) із урахуванням різних моделей сил опору та за інших безрозмірних значень параметрів системи.

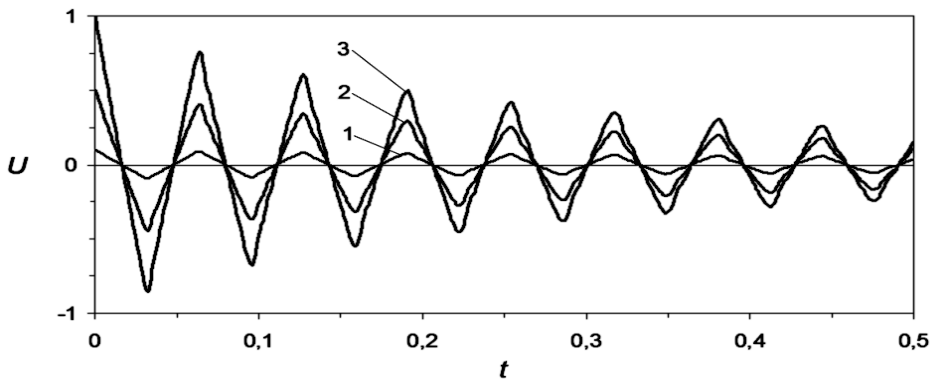
Метою наступних числових симуляцій було встановлення умов динамічного явища – резонансу та впливу параметрів нелінійної системи на амплітуду в динамічних режимах коливань, близьких до резонансних. На рис. 2, а–б подано графічні зміни в часі відхилення серединної точки середовища за умов початкового відхилення від положення рівноваги  $h = 1$  із урахуванням різних нелінійних моделей сил опору та за різних значень частоти вимушуючої сили та інших значень параметрів системи. Вивчають коливання середовища, математичною моделлю руху якого є диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - g_0 \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + k \sin wt - b, \quad p > 2.$$

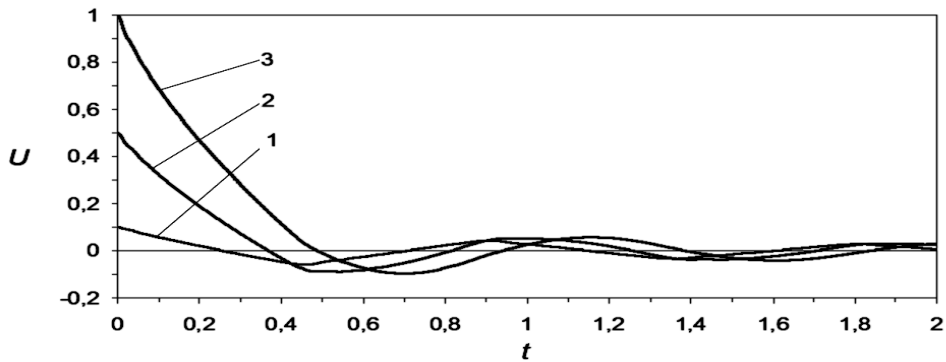
a)  $a=1000, g_0=1, p=2,1$ .



б)  $a=1000, g_0=1, p=3$ .



в)  $a=5, g_0=6, p=3$ .



г)  $a=5, g_0=6, p=4$ .

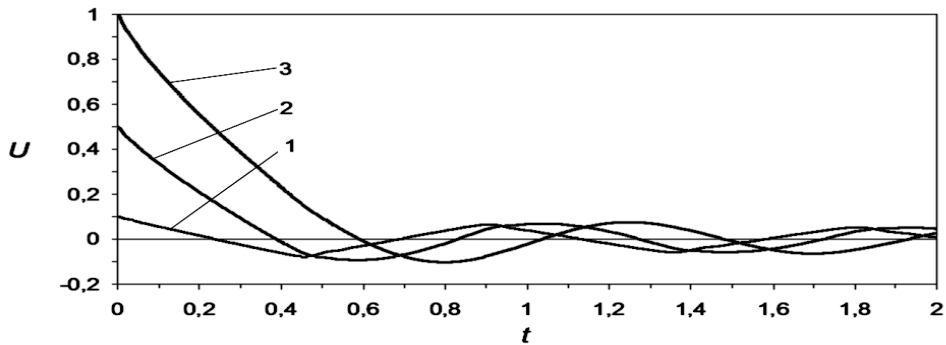
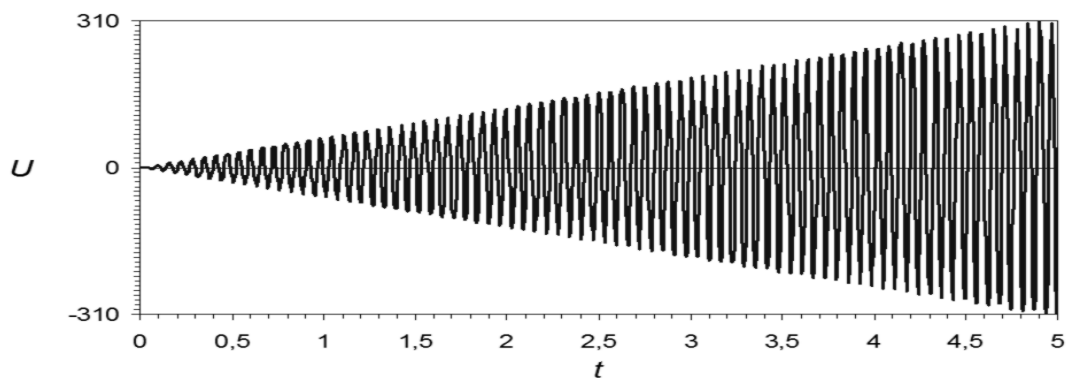


Рис. 1. Закони зміни відхилення середньої точки середовища за різних значень параметрів  $a, g_0, p$

а)  $l=1, a=1000, g_0=0,1, k=10000, w=\sqrt{a} p, b=0, p=2,5$  (нелінійний резонанс);



б)  $l=1, a=1000, g_0=0, k=10000, w=\sqrt{a} p, b=-5, p=2,5$  (динамічний режим “биття коливаний”).

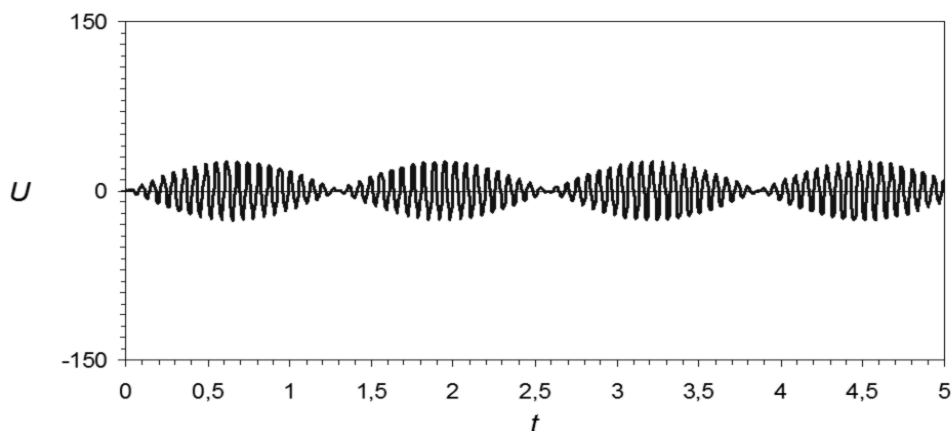


Рис. 2. Закони зміни відхилення серединної точки середовища за різних значень параметрів у динамічних режимах лінійних коливаний – резонансних та близьких до резонансних

### Висновки

Отримані у роботі якісні результати та представлені графічні залежності показують: 1) наявність сили опору призводить до загасання коливаний середовища; 2) швидкість загасання залежить більшою мірою від степеня нелінійності сили опору; 3) за значної нелінійності сили опору ( $p=3$ ) динамічний процес аперіодичний; по-четверте, вплив сили опору на період коливаний за малих значень параметрів  $g, p$  та  $h$  незначний. Останнє також підтверджується асимптотичним інтегруванням вказаних диференціальних рівнянь.

1. Gajevski H., Greger K., Zakharias K., 1978. *Nichtlineare operatorgleichungen und operator-differentialgleichungen*. Mir, Moscow, Russia, 336 p. 2. Lions J. L. 2002. *Some methods for solving nonlinear boundary value problems*. Editorial URSS, Moscow, Russia, 587 p. 3. Pukach P. Ya. 2014. *Qualitative methods of the investigation of nonlinear oscillation systems*. Publishing House of Lviv National Polytechnic University, Lviv, Ukraine, 286 p. 4. Sleptsova I. P. 2005. Принцип Фрагмена–Линделефа для некоторых квазилинейных эволюционных уравнений второго порядка. *Ukrainian Math. Journ.*, Volume 57, Issue 2, 239–249. 5. Agre K. and Rammaha M. A. 2001. *Global solutions to boundary value problems for a nonlinear wave equation in high space dimensions*. *Diff. And Integr. Equat.*, Volume 14, 1315–1331. 6. D'Ancona P. and Manfredi R. 1995. *A class of locally solvable semilinear equations of weakly hyperbolic type*, *Ann. Mat. Pura Appl.*, Volume 168, 355–372. 7. Demeio L. and Lenci S. 2007. *Forced nonlinear oscillations of semi-infinite cables and beams resting on a unilateral elastic substrate*. *Nonlinear Dynamics*, Volume 49, 203–215. 8. Demeio L. and Lenci S. 2008. *Second-*

order solutions for the dynamics of a semi-infinite cable on a unilateral substrate. *Journ. Sound Vibration*, Volume 315, 414 - 432.

9. Ghayesh M. H. 2010. Parametric vibrations and stability of an axially accelerating string guided by a non-linear elastic foundation. *Int. Journ. Non-Lin. Mech.*, Volume 45, 382–394.

10. P. Pukach, I. Kuzio and M. Sokil. 2013. Qualitative methods for research of transversal vibrations of semi-infinite cable under the action of nonlinear resistance forces. *ECONTECHMOD*, Volume 2, Issue 1, 43–48.

11. Lavrenyuk S. P. and Pukach P. Ya. 2007. Mixed problem for a nonlinear hyperbolic equation in a domain unbounded with respect to space variables. *Ukrainian Mathematical Journal*, Volume 59, Issue 11, 1708–1718.

12. Lavrenyuk S. P. and Pukach P. Ya. 2007. Variational hyperbolic inequality in the domains unbounded in spatial variables. *Intern. Journ. of Evolution Equat*, Volume 3, Issue 1, 103–122.

13. Pukach P. Ya. 2014. Qualitative research methods of mathematical model of nonlinear vibrations of conveyor belt. *Journal of Mathematical Sciences*, Volume 198, Issue 1, 31–38.

14. Lavrenyuk S. P. and Olishevich M. O. 2002. Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними. *Ukrainian Math. Journ.*, Volume 54, Issue 10, 1356–1370.

15. Barabash G. 2005. Мішана задача для одного слабконелінійного гіперболічного рівняння у необмеженій області. *Journ. of Lviv University. Mech. – Math.*, Volume 64, 7–19.

16. Chen L. Q. 2005. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings. *Appl. Mech. Rev*, Volume 58, 91–116.

17. Pukach P. Ya. 2006. Mixed problem for some nonlinear equation of beam vibrations type in bounded domain. *Applied problems of mechanics and mathematics*, Issue 4, 59–69.

18. Pukach P. Ya. 2007. Mixed problem for nonlinear equation of beam vibrations type in unbounded domain. *Matematychni Studii*, Volume 27, no. 2, 139–148.

19. Pukach P. Ya. 2004. Mixed problem in unbounded domain for weakly nonlinear hyperbolic equation with growing coefficients. *Matematychni metody i fizyko-mekhanichni polya*, Volume 47, no. 4, 149–154.

20. Salenger G. and Vakakis A. F. 1998. Discreteness effects in the forced dynamics of a string on a periodic array of non-linear supports. *Int. Journ. Non-Lin. Mech.* Volume 33, 659–673.

21. Santee D. M. and Goncalves P. B. 2006. Oscillations of a beam on a non-linear elastic foundation under periodic loads. *Shock and Vibrations*, Volume 13, 273–284.