

І. Процько

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
кафедра управління інформаційною безпекою

РОЗПАРАЛЕЛЕННЯ НА РІВНІ ПІДЗАДАЧ АЛГОРИТМУ ШГП НА ОСНОВІ ЦИКЛІЧНИХ ЗГОРТОК

© Процько І., 2015

Розглянуто паралельну модель обчислення швидких гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. Цей підхід проаналізовано з погляду розпаралелення обчислення через підзадачі з можливістю ефективного обміну даними між ними.

Ключові слова: паралельна модель, підзадачі синтезу й обчислення, дискретні гармонічні перетворення, циклічна згортка.

Parallel model of efficient computation discrete harmonic transforms using of circular convolutions is considered. Analysis the method by means of paralleling computing subtasks with capability efficient transput data is presented.

Key words: parallel model, synthesis and computation subtasks, discrete harmonic transform, cyclic convolution.

Вступ

Дискретні перетворення класу Фур'є завдяки ефективним обчислювальним алгоритмам відіграють ключову роль в обробці сигналів. Інформаційні дані можна представити як у часовій, так і в частотній областях. Засоби швидких гармонічних перетворень (ШГП) класу Фур'є конвертують одне представлення в інше. Дослідження і розвиток загальних підходів ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень (ДГП) послідовностей довільного обсягу уможливають спектральний, кореляційний, кепстральний аналіз. До застосувань перетворень входять кодування, розпізнавання образів, цифрова адаптивна інтерполяція та багато інших [1]. Однак інтенсивне розширення діапазону можливих застосувань ставить все вищі вимоги перед дискретними перетвореннями. Одним з напрямів розв'язання задачі є використання дедалі більшої обчислювальної продуктивності на основі нових інформаційних технологій. Ці технології включають як архітектурні рішення з розпаралелення обчислень на різних рівнях, так і програмні продукти, в яких задачі створення і керування багатьма обчислювальними потоками виконують компілятори. Відповідно до нових технологій паралельних обчислень, інтенсивно узагальнюються та розвиваються алгоритмічні засоби.

Аналіз літературних джерел

Для розв'язання задач підвищення ефективності обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі розпаралелення швидких алгоритмів запропоновано багато робіт [2, 3]. Більшість досліджень аналізують і модифікують відомі швидкі алгоритми, щоб уможливити паралельне їх виконання. Ці підходи мають певні переваги та недоліки [4]. Паралельне обчислення ефективних алгоритмів дискретних перетворень класу Фур'є декомпоує схему обчислення на частини, які можуть до певного моменту паралельно виконуватись різними процесорами, але при цьому іноді зростають обчислювальні затрати.

Постановка проблеми

Одним з напрямів ефективних дискретних перетворень класу Фур'є довільних обсягів є їх обчислення на базі швидких згорток [5, 6]. Актуальний аналіз цього підходу з погляду розпаралелення обчислень на декілька порівняно самостійних підзадач з можливістю ефективного обміну даними між ними.

Базисна квадратна матриця $W(k,n)$ дискретних гармонічних перетворень

$$X = W^* x \quad (1)$$

може набувати вигляду:

$W(k,n) = \exp(-j2\pi kn/NT)$, дискретного перетворення Фур'є (ДПФ);

$W(k,n) = \cos(2\pi kn/NT) + j\sin(2\pi kn/NT)$, дискретне перетворення Хартлі (ДПХ);

$W(k,n) = c(n)x(n)\cos[\pi(2k+1)n/2NT]$, дискретного косинусного перетворення (ДКП),

$W(k,n) = c(n)x(n)\sin[\pi(2k+1)n/2NT]$, синусне перетворення (ДСП),

$$c(n) = \begin{cases} 2^{-1/2}, & \text{якщо } n=0; \\ 1, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

де $n, k=0, (1), \dots, N-1$; $x(N)$ та $X(N)$ – матриці-стовпці вхідних та вихідних даних; T – інтервал дискретизації, N – обсяг перетворення.

Обчислювальний підхід з використанням циклічних згорток для ефективного виконання дискретних гармонічних перетворень полягає у декомпозиції дискретної базисної матриці (1) на циклічні підматриці [7]. В результаті, на основі цього підходу, структуру базисної матриці з циклічними згортками задає твірний масив

$$P(n) = P(n_1)P(n_2) \dots P(n_k) = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L1})(n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L2}) \dots (n_{kL1}, n_{kL2}, \dots, n_{kLk}) \quad (2)$$

де k – кількість підматриць; n – обсяг масиву. Твірний масив $P(n)$ також визначає послідовність елементів вхідних даних під час обчислення дискретних гармонічних перетворень. Визначення відповідних параметрів на основі твірного масиву $P(n) = P(n_1) P(n_2) \dots P(n_k)$ і характеризує матричну структуру W дискретного гармонічного перетворення довільного обсягу.

Властивості симетрії та періодичності базису гармонічного перетворення приводять до ефективнішого представлення меншими значеннями елементів твірних підмасивів $P'(n)$ з доповненнями відповідних підмасивів знаків $Z(n)$. Підматриці знаків $Z(n)$ містять значення елементів $+1, -1, 0$.

Параметри структури базисної матриці перетворення визначають особливості обчислювального алгоритму дискретних гармонічних перетворень. У випадку розміщення однакових підматриць по вертикалі/горизонталі базисної матриці обчислюється тільки одна циклічна згортка. Це зменшує кількість циклічних згорток обчислювального алгоритму, що можуть обчислюватись паралельно. Об'єднання проміжних результатів згортки виконується відповідно до структури базисної матриці за твірним масивом.

Проаналізуємо цей підхід з погляду виділення окремих підзадач і формування на їх основі паралельної моделі обчислень.

Підзадачі обчислення ШГП на основі швидких згорток

Розглянемо етап декомпозиції задачі ШГП, де аналізується та оцінюється можливість її розпаралелення. Розпаралелення ШГП на рівні підзадач (великоблоковий паралелізм) можна розділити на три частини:

- синтез алгоритму обчислення ШГП, адаптованого до довільного цілого значення обсягу N ;
- визначення гармонічних коефіцієнтів перетворення;
- виконання ШГП, адаптованого до обсягу перетворення.

Великоблоковий паралелізм ефективного виконання ШГП містить три базових компоненти: блок синтезу (SU), блок гармонічних коефіцієнтів (W), виконавчий блок (PU). Число N з множини натуральних чисел задає обсяг перетворення і подається на блоки SU, W. Входи $x(n)$ та виходи $X(n)$ в блоці PU задають інформаційні ці перетворення (рис. 1).

Послідовно-паралельно за синтезом у SU після визначення результату підзадачі приналежності значення довільного обсягу перетворення розпочинається паралельне виконання ШГП в частинах W, PU.

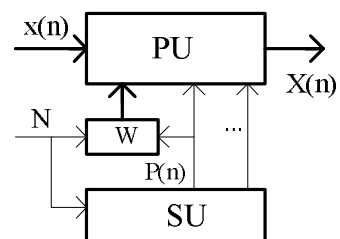


Рис. 1. Великоблоковий паралелізм ШГП на основі згортки

Блок синтезу SU виконує підзадачі:

- визначення приналежності обсягу перетворення N до підмножини цілих чисел;
- визначення циклічного розкладу підстановки $P(n)$;
- спрощення циклічного розкладу підстановки $P'(n)$ з доповненням знаками $Z(n)$;
- аналіз структури базисної матриці перетворення на основі визначених $P(n)$, $P'(n)$, $Z(n)$.

Обмін інформації на цьому рівні виконується на рівні повідомлень від блока синтезу SU до виконавчого блока PU через:

- $n=[N/2]$ – об'єднання елементів для обсягу перетворення N ($S1, S2$) або $n=[N/4]$ – для обсягу N ($S3, S4, S5$);
- твірний масив $P(n)=(n_1)(n_2)\dots(n_k)$ перепорядкування вхідних інформаційних даних $x(n)$;
- структура спрощеного твірного масиву $P'(n)$ задає наступні об'єднання вхідних елементів $x(n_1), x(n_2)\dots x(n_k)$;
- підмасиви спрощеного твірного масиву $P'(n)$ з доповненням знаками $Z(n)$ для обчислення згорток.

Аналіз структури спрощеної базисної матриці визначає порядок об'єднання вхідних даних $x(i)$. Цей аналіз виконується через визначення відповідних параметрів твірного масиву $P(n)=P(n_1)P(n_2)\dots P(n_k)$ для заданого обсягу перетворення. До таких взаємопов'язаних параметрів належить:

- N обсяг перетворення: а) $N=p$ (просте або непарне); б) $N=2p$; (парні або кратні $N=4p$; $N=2^p$);
- k – кількість підмасивів у твірному масиві $P(n)=P(n_1)P(n_2)\dots P(n_k)$;
- число елементів кожного твірного підмасиву $(t_1), (t_2), \dots, (t_k)$;
- кількість підматриць $m \geq k^2$ базової матричної структури;
- координати $(v_{i,j})$ і відповідні значення $(p_{11}), (p_{21}), \dots, (p_{m1})$ перших елементів підматриць у матричній структурі;
- кількість повторень однакових підматриць $r < m$, визначається за однаковими значеннями перших елементів у матричній структурі та приналежністю до відповідного твірного підмасиву;
- кількість підматриць, що починаються з (n_i) проміжного елемента твірного підмасиву $P(n_i)$.

Для підматриць, що містять як по горизонталі, так і по вертикалі однакові значення аргументів, проводять об'єднання вхідних даних. Це зменшує кількість циклічних згорток, що необхідно буде виконати PU. Блок синтезу SU використовує тільки арифметику цілих чисел для виконання виділених підзадач.

Блок гармонічних коефіцієнтів W виконує підзадачі:

- визначення приросту аргумента перетворення $\Delta\varphi=(2\pi/N)$, відповідно вхідного значення обсягу N ;
- обчислення аргументів гармонічних функцій $\Delta\varphi=(2\pi/N)$, $i*\Delta\varphi$, $i=1, \dots, n/2$;
- обчислення абсолютних значень гармонічних коефіцієнтів $\{\cos(i*\Delta\varphi), \sin(i*\Delta\varphi), \text{cas}(i*\Delta\varphi)\}$.

Обмін інформацією у блоці W виконується на рівні повідомлень між частинами SU, PU.

Від блока синтезу SU до блока W передаються:

- $n=[N/2]$ – максимальна кількість значень гармонічних коефіцієнтів для обсягу перетворення N ($S1, S2$) або $n=[N/4]$ – для обсягу N ($S3, S4, S5$);
- $P(n_i)$ – послідовність коефіцієнтів для аргументів гармонічних функцій, що необхідні для виконання згортки.

Від блока W до виконавчого блока PU передаються:

- значення гармонічних коефіцієнтів $\{\cos(i*\Delta\varphi), \sin(i*\Delta\varphi), \text{cas}(i*\Delta\varphi)\}$ для обчислення циклічних згорток.

Виконавчий блок PU виконує підзадачі:

- об'єднання вхідних інформаційних даних перетворення $x(n)$;
- відбір і групування об'єднаних даних;
- виконання швидких циклічних згорток між згрупованими даними та відповідними значеннями гармонічних коефіцієнтів базисної функції;
- об'єднання результатів згортки у вихідні інформаційні дані $X(n)$ перетворення.

У загальну структуру блока PU входить: BD – буфер попереднього об'єднання та групування даних; BDO – буфер об'єднання результатів згорток для формування вихідних інформаційних даних $X(n)$; CCU – виконання циклічних згорток (рис. 2). Виконання ШГП блоком PU відповідно до алгоритму можна поділити на три послідовно-паралельні етапи: попереднього об'єднання даних (BD), виконання циклічних згорток (CCU), формування вихідних значень (BDO). Обчислення ШГП ґрунтується на паралельному виконанні швидких коротких або середніх згорток у CCU [8]. Робота CU – керування виконавчим блоком PU виконується відповідно до обчислювальних ресурсів PU та повідомлень блока синтезу SU, адаптованих до обсягу перетворення N .

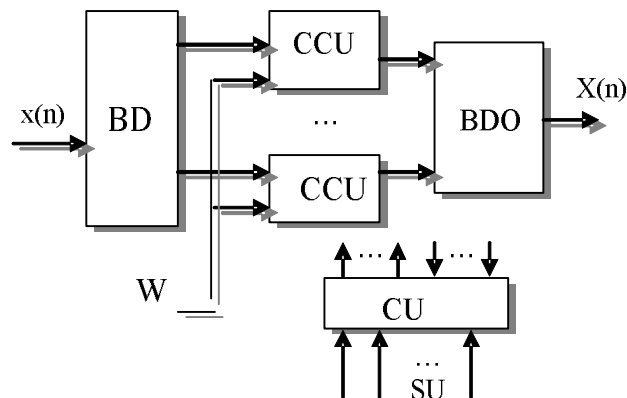


Рис. 2. Структура виконавчого блока PU

Технічні можливості відповідних блоків та конкретна архітектура обчислювальної системи визначаються параметрами завдання з виконання ШГП класу Фур'є, адаптованого до певного обсягу перетворення.

Паралельна модель (підзадача/канал) обчислення ШГП на основі згорток

Розроблення алгоритмів у межах паралельної моделі не прив'язується до відображення на конкретну архітектуру і кількості процесорів обчислювальної системи. В основу взаємодії обчислювальних ресурсів під час розпаралелення закладається універсальний механізм.

Відповідно до розпаралелення ШГП на рівні підзадач (великоблоковий паралелізм) і аналізу їх особливостей сформуємо модель паралельного обчислення ШГП на основі згорток. Ця модель формується на таких засадах:

- обчислення складаються з декількох підзадач, пов'язаних каналами комунікації, і виконуються одночасно;
- кожна підзадача містить послідовний код і локальну пам'ять;
- канал комунікації забезпечує обмін повідомлень з даними;
- підзадача може помістити в канал повідомлення або видалити повідомлення, прийнявши з нього дані;
- операція передавання повідомлень асинхронна, завершується тільки у разі виконання операції прийому даних.

Модель (рис. 3) складається з відповідних входів N , $x(n)$, $X(n)$, вузлів та однонаправлених дуг. Дуги між вузлами моделі забезпечують обмін повідомленнями у каналах комунікації між конкретними вузлами і вказують на залежність вузлів від обміну даними.

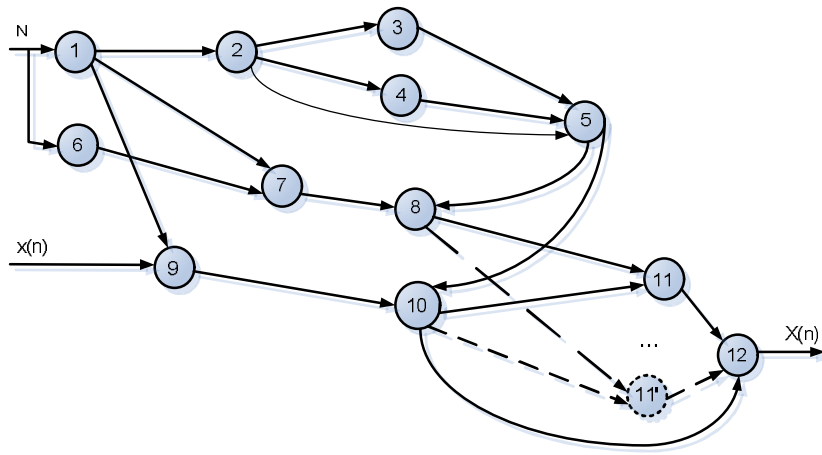


Рис. 3. Модель паралельного обчислення ШГП на основі згорток

Вузли (1, 2, 3, 4, 5) відповідають підзадачі синтезу алгоритму обчислення ШГП, адаптованого до довільного цілого значення обсягу N :

1 – визначення приналежності обсягу перетворення N до підмножини цілих чисел з формуванням p (простим зсувом бінарного коду обсягу перетворення. Множина натуральних чисел за аналізом розподілена на п'ять підмножин S_i ($i=1,2,3,4,5$), де $S_1=\{3,5,7,9,11,13,15,17,\dots\}$, $S_2=\{6,10,14,18,22,26,30,34,38,42,46,50,58,\dots\}$, $S_3=\{12,20,28,36,44,52,60,\dots\}$, $S_4=\{2,4,8,16,32,64,128,256,\dots\}$, $S_5=\{24,40,48,56,72,80,88,96,104,\dots\}$.

2 – визначення циклічного розкладу підстановки $P(n)$ за допомогою рядків аргументів базисної матриці;

3 – спрощення циклічного розкладу підстановки $P'(n)$ на основі симетричності базисної функції;

4 – доповнення знаками $Z(n)$ спрощеного циклічного розкладу підстановки;

5 – аналіз структури базисної матриці перетворення на основі визначених $P(n)$, $P'(n)$, $Z(n)$.

Вузли (6, 7, 8) відповідають підзадачі визначення гармонічних коефіцієнтів перетворення:

6 – визначення приросту аргумента перетворення $\Delta\varphi=(2\pi/N)$;

7 – визначення аргументів гармонічних функцій $\Delta\varphi=(2\pi/N)$, $i*\Delta\varphi$, $i=1,\dots, n/2$;

8 – обчислення абсолютних значень гармонічних коефіцієнтів $\cos(i*\Delta\varphi)$, $\sin(i*\Delta\varphi)$, $\text{cas}(i*\Delta\varphi)$.

Вузли (9, 10, 11,...,11',12) відповідають підзадачі виконання ШГП, адаптованого до обсягу перетворення:

9 – об'єднання вхідних інформаційних даних перетворення $x(n)$;

10 – відбір і групування об'єднаних даних для циклічних згорток;

11,...,11' – паралельне виконання швидких циклічних згорток між згрупованими даними та відповідними значеннями гармонічних коефіцієнтів базисної функції;

12 – об'єднання результатів згортки у вихідні інформаційні дані $X(n)$ перетворення.

Розглянемо на основі узагальненої схеми приклад синтезу масиву вихідних даних матричної структури W обчислення косинусної частини ДПФ обсягу $N=51$.

Вузол 1. N відноситься до $S_2=p; x_p=3x17$; $n=\{N/2\}-1=26-1=25$;

Вузол 9. Симетричне об'єднання вхідних даних $x(i)+x(N-i)$, $i=(1,2(1),\dots,25)$;

Вузол 2. Формування значень твірному масиву за підстановкою, елементами твірному масиву можуть бути значення $n_{ij}=(1,\dots,25)$:

(1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25)

(2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 25 23 21 19 17 15 13 11 9 7 5 3 1)

$P(25)=P(n_1)P(n_2)P(n_3)P(n_4)P(n_5)=(1,2,4,8,16,19,13,25) (3,6,12,24) (5,10,20,11,22,7,14,23) (9,18,15,21) (17)$.

Вузол 5. Твірний масив складається з підмасивів $P(n_2), P(n_4), P(n_5)$, які містять елементи, кратні 3,17.

Визначення параметрів : $k=5$ – кількість підмасивів у твірному масиві;

$t_1=8, t_2=4, t_3=8, t_4=4, t_5=1$; t_i – кількість елементів у підмасивах $P(n_i)$ задають обсяг циклічних згорток.

Відбір однотипових вертикально розміщених підматриць:

$m \geq k^2=25$ загальна кількість підматриць $m=33$;

координати $(v_{i,j})$ і відповідні значення $(p_{11}), (p_{21}), \dots, (p_{m1})$ перших елементів підматриць у матричній структурі.

Відповідність координат (i, j) елементам твірного масиву $P(n_i)$:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
 $(1,2,4,8,16,19,13,25) (3,6,12,24) (5,10,20,11,22,7,14,23) (9,18,15,21) (17)$.

Координати перших елементів підматриць $i+t_i, j+t_i$ (t_i – вибирають за приналежністю до твірного підмасиву значення перших елементів підматриць у матричній структурі, які обчислюються за відповідністю координат (i,j) елементам твірного масиву $(n_i \times n_j) \bmod N$, а, у випадку одержання значення, більшого за $\{N/2\}$, спрощується за виразом $N - [(n_i \times n_j) \bmod N]$, як подано в таблиці.

($i+t_i, j+t_i$) - n_{ij} (координати рядок/стовпець) – значення першого елемента підмасиву					
(1,1) – 1;		(1,9) – 3;	(1,13) – 5;		(1, 21) - 9;
		(5,9) – 3;			(5,21) – 9;
(9,1) - 3;	(9,5) – 3;	(9,9) – 9;	(9,13) – 15;	(9,17)–15;	(9,21) – 24;
(13,1) – 5;		(13,9) – 15;	(13,13) – 25;		(13,21) – 6;
		(17,9) – 15;			(17,21) – 6;
(21,1)–9;	(21,5)-9;	(21,9) – 24;	(21,13)–6;	(21,17)-6;	(21,21) – 21;
(25,1)-17;		(25,9) - 0;	(25,13)-17;		(25,21) - 0;
					(25,25) -17;

Відбір за координатами перших елементів однакових підматриць по горизонталі:

Вузол 5 : для *Вузла 10:*
 $(9,1) - 3; (9,5) - 3;$ для $P(n_2)=(3\ 6\ 12\ 24)$, $[x(1),x(2),x(4),x(8)]+[x(16), x(19),x(13),x(25)];$
 $(21,1) - 9; (21,5)-9;$ для $P(n_4)=(9\ 18\ 15\ 21)$, $[x(1),x(2),x(4),x(8)]+[x(16), x(19),x(13),x(25)];$
 $(9,13) - 15; (9,17)–15;$ для $P(n_4)=(15\ 21\ 9\ 18)$, $[x(5),x(10),x(20),x(11)+x(22),x(7),x(14),x(23)];$
 $(21,13) - 6; (21,17)-6;$ для $P(n_2)=(6\ 12\ 24\ 3)$, $[x(5),x(10),x(20),x(11)+x(22),x(7),x(14),x(23)];$
 $(25,9) - 0; (25,21) - 0;$ для $P(n_5)=(0)$, $[x(3)+x(6)+x(12)+x(24)+x(9)+x(18)+x(15)+x(21)];$
 $(25,1)-17; (25,13)-17; (25,25) -17;$ для $P(n_5)=(17)$, $[x(1)+x(2)+x(4)+x(8)+x(16)+x(19)+x(13)+x(25)],$
 $[x(5)+x(10)+x(20)+x(11)+x(22)+x(7)+x(14)+x(23)].$

Виконується додавання вхідних значень для виконання однієї згортки.

Відбір за координатами перших елементів однакових підматриць по вертикалі:

Вузол 5 : для *Вузла 10:*
 $(1,9) - 3; (5,9) - 3;$ для $P(n_2)=(3\ 6\ 12\ 24)$, $[x(3),x(6),x(12),x(24)]$
 $(13,9) - 15; (17,9) - 15;$ для $P(n_4)=(15\ 21\ 9\ 18)$, $[x(3),x(6),x(12),x(24)]$
 $(1, 21) - 9; (5, 21) - 9;$ для $P(n_4)=(9\ 18\ 15\ 21)$, $[x(9),x(18),x(15),x(21)]$
 $(13,21) - 6; (17,21) - 6;$ для $P(n_2)=(6\ 12\ 24\ 3)$, $[x(9),x(18),x(15),x(21)]$
 $(1,25)-17; (13,25) - 17; (25,25) -17;$ для $P(n_5)=(17)$, $x(17)$.

Вузол 11...11':

Виконання однієї згортки для однакових вертикальних підматриць. Решта циклічних згорток виконуються за своїми параметрами на основі визначених координат.

Вузол 12. Об'єднання результатів згорток:

– результат 8-точкової згортки з координатами (1,1) додається до двох 4-точкових однотипних згорток з (1,9), (5,9) додається до 8-точкової згортки з (1,13) додається до двох 4-точкових однотипних згорток з (1, 21), (5,21) додається до 8-точкового вектора з (1,25);

– результат 4-точкових об'єднаних згорток з координатами (9,1)+(9,5) додається до 4-точкової згортки з (9,9) додається до 4-точкових об'єднаних згорток з (9,13)+(9,17) додається до 4-точкової згортки з (9,21) додається до 4-точкового вектора з (9,25);

- результат 8-точкової згортки з координатами (13,1) додається до двох 4-точкових однотипних згорток з (13,9), (17,9) додається до 8-точкової згортки з (13,13) додається до двох 4-точкових однотипних згорток з (13, 21), (17,21) додається до 8-точкового вектора з (13,25);
- результат 4-точкових об'єднаних згорток з координатами (21,1)+(21,5) додається до 4-точкової згортки з (21,9) додається до 4-точкових об'єднаних згорток з (21,13)+(21,17) додається до 4-точкової згортки з (21,21) додається до 4-точкового вектора з (21,25);
- результат об'єднань з координатами (25,1)+(25,13)+(25,25) додається до об'єднань з (25,9)+(25,21).

Одержані вихідні значення перетворення відповідають порядку відповідно значень твірного масиву:

X(1),X(2),X(4),X(8),X(16),X(19),X(13),X(25),X(3),X(6),X(12),X(24),X(5),X(10),X(20),X(11),X(22),X(7),
X(14),X(23),X(9),X(18),X(15),X(21),X(17).

Відповідно до алгоритму ШГП для цього прикладу обсягу $N=51$, що належить до множини S_2 , вузли 3, 4 не виконуються. Тобто відсутні спрощення циклічного розкладу підстановки $P(n)$ з відповідним доповненням знаками $Z(n)$, оскільки враховано спрощення послідовності аргументів по симетрії $(N/2)$ косинусної частини базисної функції.

Висновки

Модель паралельного обчислення ШГП на основі згорток не має властивості універсальності. Виділений набір вузлів виконується відносно паралельно до виділених підзадач, відповідно до засад незалежності [9]:

- 1) незалежності даних (дані, що обробляються однією підзадачею, не модифікуються іншою);
- 2) незалежності керування (послідовність виконання у підзадачі визначається тільки під час виконання);
- 3) незалежність ресурсів (забезпечується достатнім апаратним обчислювальним ресурсом для виконання підзадач);
- 4) незалежність введення/виведення (за одночасного звертання до тих самих даних).

Адаптація до обсягу перетворення у підзадачі синтезу алгоритму, гнучкість обчислення швидких циклічних згорток у підзадачі виконання ШГП, є перевагами обчислювальних моделей. Виділення інших рівнів паралелізму в моделі обчислення цього ШГП є достатньо багатограним і містить широке поле різноманітних реалізацій.

1. Оппенгейм А., Шафер Р. *Цифровая обработка сигналов.* – М.: Техносфера, 2006. 2. Chu E. and George A. *FFT algorithms and their adaptation to parallel processing. Linear Algebra and its Appl.*, 284:95–124, 1998. 3. Chipper D.-F., Swamy M. N.S., Ahmad M. O., *An Efficient Unified Framework for Implementation of a Prime-Length DCT/IDCT With High Throughput Signal Processing, IEEE Transactions on.* 07/2007; 55(6):2925-2936. 4. Chu E., George A. *INSIDE the FFT BLACK BOX (Serial and Parallel Fast Fourier Transform Algorithms) CRC Press LLC, New York, 2000.* 5. Патент 96540 Україна, G06F 17/16 (2006.01), H03M 7/30 (2006.01). Спосіб приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток / Процько І. О., (Україна) Заявл. 25.11.2010; Опубл. 10.11.2011, Бюл. №21. 6. Ihor Prots'ko, *The algorithm and structures for efficient computation of type II/III DCT/ DST/ DHT using cyclic convolutions.* // *International Journal of Signal Processing Systems, Volume 2, No. 2, 2014.* – P. 119–127. 7. Процько І. О. Розробка схеми узагальненого ефективного алгоритму гармонічного перетворення даних. // *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка".* – 2005. – № 549. – С. 157–164. 8. Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов: пер. с англ.* – М.: Радио и связь, 1983. 9. Немнюгин С., Стесик О. *Параллельное программирование для многопроцессорных вычислительных систем.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.