Materials of the Vith International Scientific and Technical Conference CSIT 2001. – Lviv: Publishig House Vezha&Co, 2011. 2011, c.21–22. 14. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и реккурентное оценивание / А. Альберт // пер. с англ. – М.: Наука, 1977. – 224 с. 15. Superresolution. [Електронний ресурс]. – http://www.wikiwand.com/en/Superresolution. 16. Shen W. Projection onto Convex Sets Method in Spacefrequency Domain for Super Resolution / Wanqiang Shen, Lincong Fang, Xiang Chen, Honglin Xu // Journal of computers. – 2014. – Vol. 9, № 8. – P. 1959–1966. 17. Tai Y. W. Perceptually-inspired and edge-directed color image super-resolution / Y. W. Tai, W. S. Tong, and C. K. Tang // Computer Vision and Pattern Recognition: proc. of intern. conf, New York, 17 – 22 June 2006. – Los Alamitos: IEEE CS, 2006. – Vol. 2. – P. 1948–1955. 18. Tang Z. Projection onto convex sets super-resolution image reconstruction based on wavelet bi-cubic interpolation / Zhifei Tang, Deng M., Chuangbai Xiao, Jing Yu // Electronic and Mechanical Engineering and Information Technology (EMEIT): proc. of intern. conf., Harbin, 12–14 Aug. 2011. – IEEE Press, 2011. – Vol. 2. – P. 351–354. 19. Wheeler W. E. Super-Resolution Image Synthesis using Projections onto Convex Sets in the Frequency Domain / Frederick W. Wheeler, Ralph T. Hoctor and Eamon B. Barrett // Computational Imaging, Electronic Imaging Symposium: proc. of intern. conf., San Jose, January 2005. – 2005. – Vol. 5. – P.479–490.

УДК 519.8

О. Михальова
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ БАГАТОКРАТНОГО КУЛЬОВОГО ПОКРИТТЯ ОБМЕЖЕНИХ МНОЖИН ТА ЇХ МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РОЗБИТТЯ

Запропоновано модифікацію критерію оптимальності в неперервній задачі оптимального мультиплексного розбиття обмеженої множини *n*-вимірного евклідового простору, який дає змогу у результаті розв'язання останньої отримати мінімальний радіус багатократного кульового покриття цієї множини.

Ключові слова: неперервна задача багатократного покриття, оптимальне *k*-кратне кульове покриття, діаграми Вороного вищих порядків, мультиплексне розбиття множин

There is proposed a modification of optimality criterion in the continuous problem of optimal multiplex-partitioning of a bounded set from *n*-dimensional Euclidean space, which allows in the result of its solving receive the smallest radius of the multiple covering by balls of this set.

Key words: continuous problem of multiple covering, optimal k-multiple covering by balls, Voronoi diagrams of higher orders, multiplex-partitioning of sets

Вступ

Задачі багатократного кульового покриття двовимірної області виникають у різних сферах людської діяльності. Широкий спектр практичних їх застосувань наведений, наприклад, у роботах [1–3].

У переважній більшості моделі задач покриття, що вивчаються в науковій літературі, є дискретними. Відомі задачі 0–1 покриття та багатократного покриття як задачі цілочислового лінійного програмування [4, 5]. Задачі, в яких множина, що покривається, є континуальною, в науковій літературі називають неперервними задачами покриття [2–7 та ін.]. Добре вивчена задача однократного покриття кругами обмеженої частини площини, поширена назва якої – задача про p центри. Для неї запропоновані різні евристичні алгоритми та алгоритми, які ґрунтуються на використанні діаграм Вороного. Велика бібліографія з питань розроблення алгоритмів розв'язання задачі про p центри наведена у [8]. В [9] запропоновано використовувати області Вороного вищих порядків [10] та згладжування цільової функції для пошуку напряму спуску під час розв'язання мінімаксімінних задач, які саме і є математичними моделями неперервних задач оптимального покриття. Числові алгоритми розв'язання задач багатократного покриття обмежених множин N кулями мінімального радіуса подано у роботах [2, 3, 5–7].

У [11] представлені математичні постановки так званих неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин. Ці задачі описують ситуацію, коли потрібно розділити задану область на регіони, які охоплюють клієнтів, що мають ті самі k найближчі сусідні сервісні центри з N існуючих (або можливих). Передбачається, що клієнти кожної області можуть обслуговуватися будь-яким з найближчих k центрів. В моделях, запропонованих у [11], критерій розбиття є лінійним і полягає у мінімізації сумарних витрат на надання чи отримання тієї чи іншої послуги.

Вочевидь, за своїми інтерпретаціями неперервні задачі покриття множин і задачі мультиплексного розбиття споріднені. Метою цієї роботи є демонстрація зв'язку між вказаними задачами у різних їх постановках, можливості визначати радіус кульового покриття під час розв'язання неперервних лінійних задач мультиплексного розбиття множин. Дослідимо також, яким має бути критерій якості мультиплексного розбиття множин, щоб у відповідній задачі з розміщенням центрів можна було б отримати таке їх розташування, яке збігатиметься з центрами куль мінімального радіуса, що покривають k-кратно задану множину.

Математичні постановки неперервних задач кульового покриття і задач мультиплексного розбиття множин

Спочатку наведемо математичну формалізацію неперервних задач багатократного покриття обмеженої множини, які є конструктивнішими з погляду розроблення алгоритмів їх розв'язання [3, 5].

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом замкнена множина у просторі E_n, $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right) \in \Omega$, для усіх $i = 1,\mathbf{K},N$, – деякі точки, що звуться «центрами» (вони можуть бути фіксованими або підлягати визначенню). $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n : c(x,\tau_i) \le R\}$ – c-куля радіуса R з центром у точці τ_i з Ω, де $c(x,\tau_i)$ – метрика.

Задача про пошук радіуса N кругів, які створюють k-кратне c-кульове покриття множини, полягає у пошуку величини

$$\bar{R} = \sup_{x\in\Omega} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c(x,\tau_i)\lambda_i(x), \tag{1}$$

де $\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1,...,\lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1,N}; \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = k \right\}$.

Задача про мінімальне k-кратне c-кульове покриття записується у такий спосіб: знайти

$$\bar{R}(\lambda^*(\cdot),\tau_*^N) = \inf_{(\tau_1,...,\tau_N)\in\Omega^N} \sup_{x\in\Omega} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c(x,\tau_i)\lambda_i(x), \tag{2}$$

а також вектор-функцію $\lambda^*(\cdot)$: $\forall x\in\Omega$ $\lambda^*(x)\in\Lambda$, та вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*,...,\tau_N^*)\in\Omega^N \subset E_n^N$, за яких у (2) досягається нижня грань.

Далі представимо математичну формалізацію неперервних лінійних задач оптимального мультиплексного розбиття множин [11]. Введемо такі позначення: $\mathrm{N} = \{1,2,...,N\}$ – множина всіх індексів центрів; $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$ – множина всіх k-елементних підмножин множини N,

$|\mathrm{M}(\mathrm{N},k)| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, ..., j_k^l\}$, $l = \overline{1,L}$, – елементи множини $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$. З кожним елементом σ_l множини $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$ асоціюватимемо деяку підмножину Ω_{σ_l} точок із Ω, $l = 1,2,...,L$. Своєю чергою, з цією підмножиною Ω_{σ_l} пов'язуватимемо набір центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, ..., \tau_{j_k^l}\}$.

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}$ з $\Omega \subset E_n$ називатимемо **розбиттям k-го порядку множини** Ω на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються, якщо

$$\bigcup_{i=1}^{L} \Omega_{\sigma_i} = \Omega,\ \mathrm{mes}\left(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}\right) = 0,\ \sigma_i \in \mathrm{M}(\mathrm{N},k),\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, L,$$

де $\mathrm{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега. Підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}$ множини Ω назвемо **підмножинами k-го порядку** цієї множини.

Нехай $\Sigma_\Omega^{N,k}$ – клас всіх можливих розбиттів k-го порядку множини Ω на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються:

$$\Sigma_\Omega^{N,k} = \left\{ \overline{\omega} = \left\{\Omega_{\sigma_1}, \ldots, \Omega_{\sigma_L}\right\} : \bigcup_{i=1}^{L} \Omega_{\sigma_i} = \Omega; \mathrm{mes}\left(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}\right) = 0, i \neq j, \sigma_i, \sigma_j \in \mathrm{M}(\mathrm{N},k),\ i, j = 1, \ldots, L \right\}.$$

Задача А1-k. Неперервна лінійна задача оптимального розбиття k-го порядку множини $\Omega \subset E_n$ на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots, \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються і серед яких можуть бути порожні, з фіксованими центрами $\tau_1, ..., \tau_N$ без обмежень:

$$F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1}, \ldots, \Omega_{\sigma_L}\right\}\right) \to \min_{\left\{\Omega_{\sigma_1}, \ldots, \Omega_{\sigma_L}\right\} \in \Sigma_\Omega^{N,k}},$$

$$F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1}, \ldots, \Omega_{\sigma_L}\right\}\right) = \sum_{l=1}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} \left(c(x,\ \tau_i)/w_i + a_i\right) \rho(x) dx,$$

де $x = \left(x^{(1)}, ..., x^{(n)}\right) \in \Omega$; $\tau = \left(\tau_1, ..., \tau_i, ..., \tau_N\right) \in \Omega^N$, координати $\tau_i^{(1)}, ..., \tau_i^{(n)}$ центра τ_i, $i = 1, ..., N$, фіксовані; функції $c\left(x, \tau_i\right)$ – обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні по аргументу x за будь-якого фіксованого $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)}, ..., \tau_i^{(n)}\right)$ із Ω для всіх $i = 1,..,N$; $\rho(x)$ – обмежена, вимірна, невід'ємна на множині Ω функція; $w_i > 0, a_i \geq 0$, $i = \overline{1,N}$, – задані числа.

Розбиття k-го порядку $\overline{\omega}^* = \left\{\Omega_{\sigma_1}^*, \ldots, \Omega_{\sigma_L}^*\right\}$ множини $\Omega \subset E_n$, що доставляє мінімальне значення функціоналу F, називатимемо **оптимальним розв'язком задачі А1-k**.

Якщо в задачі **А1-k** координати центрів $\tau_1, ..., \tau_N$ невідомі заздалегідь, і їх необхідно визначити поряд з розбиттям k-го порядку $\overline{\omega}^* = \left\{\Omega_{\sigma_1}^*, \Omega_{\sigma_2}^*, \ldots, \Omega_{\sigma_L}^*\right\}$ множини $\Omega \subset E_n$, то отримаємо нову задачу.

Задача А2-k. Неперервна лінійна задача оптимального розбиття k-го порядку множини $\Omega \subset E_n$ на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots, \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються і серед яких можуть бути порожні, без обмежень з розміщенням центрів $\tau_1, ..., \tau_N$:

$$F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1}, \ldots, \Omega_{\sigma_L}\right\}, \left\{\tau_1, ..., \tau_N\right\}\right) \to \min_{\substack{\left\{\Omega_{\sigma_1}, \ldots, \Omega_{\sigma_L}\right\} \in \Sigma_\Omega^{N,k} \\ \left\{\tau_1, ..., \tau_N\right\} \in \Omega^N}},$$

де функціонал має вигляд

$$F(\overline{\omega},\tau^N)=F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1},\mathbf{K},\Omega_{\sigma_L}\right\},\left\{\tau_1,\ldots,\tau_N\right\}\right)=\sum_{l=1}^{L}\int\limits_{\Omega_{\sigma_l}}\sum_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i\right)\rho(x)dx\,, \qquad (3)$$

в якому $x=\left(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\right)\in\Omega$; $\tau=\left(\tau_1,\ldots,\tau_i,\ldots,\tau_N\right)\in\Omega^N$; функції та параметри ті самі, що у задачі **A1-** k.

Пару $\left(\overline{\omega}^*,\tau_*^N\right)=\left(\left\{\Omega^*_{\sigma_1},\mathbf{K},\Omega^*_{\sigma_L}\right\},\left\{\tau^*_1,\mathbf{K},\tau^*_N\right\}\right)$, яка забезпечує мінімальне значення функціоналу (1), називатимемо **оптимальним розв'язком задачі A2-** k.

Ідея методу розв'язання задачі оптимального мультиплексного розбиття множини з фіксованими центрами

За аналогією з методикою розв'язання неперервних лінійних задач оптимального розбиття множин [2] (які є окремими випадками задач **A1-** k або **A2-** k) вихідна задача **A1-** k записується як наведена нижче задача нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними.

Нехай $\overline{\omega}=\left\{\Omega_{\sigma_1},\ldots,\Omega_{\sigma_l},\mathbf{K}\Omega_{\sigma_L}\right\}$ – деяке розбиття k-го порядку множини Ω. Кожній точці $x\in\Omega_{\sigma_l}$, $l=\overline{1,L}$, поставимо у відповідність N-вимірний вектор $\lambda^l(x)=(\lambda^l_1(x),\ldots,\lambda^l_N(x))$, координати якого визначимо у такий спосіб:

$$\lambda^l_i(x)=\begin{cases}1,\ x\in\Omega_{\sigma_l}\ \&\ i\in\sigma_l,\\ \\ 0\ \text{ в іншому випадку}\end{cases}\qquad i=1,\ldots,N,\ l=1,\ldots,L, \qquad (4)$$

де $\sigma_l\in\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$, $\sigma_l=\{j^l_1,j^l_2,\ldots,j^l_k\}$ – набір індексів центрів $\{\tau_{j^l_1},\tau_{j^l_2},\ldots,\tau_{j^l_k}\}$, що асоціюються з підмножиною Ω_{σ_l}.

Вектор-функцію $\lambda^l(x)=(\lambda^l_1(x),\ldots,\lambda^l_N(x))$, яка визначена на множині Ω, з координатами, що задаються формулою (4), назвемо характеристичною вектор-функцією підмножини Ω_{σ_l}, що входить у розбиття k-го порядку множини Ω.

Задача **A1-** k переформулюється відносно характеристичних вектор-функцій підмножин, що утворюють розбиття k-го порядку множини Ω.

Задача B1- k. $\quad \min\limits_{\lambda(\cdot)\in\Gamma^k_0} I(\lambda(\cdot))$, $\quad I(\lambda(\cdot))=\int\limits_{\Omega}\sum\limits_{l=1}^{L}\left(\sum\limits_{i=1}^{N}(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i)\lambda^l_i(x)\right)\rho(x)dx$,

$$\Gamma^k_0=\Big\{\lambda(x)=(\lambda^1(x),\ldots,\lambda^l(x),\ldots,\lambda^L(x)):\ \lambda^l(x)=(\lambda^l_1(x),\ldots,\lambda^l_N(x));$$

$$\lambda^l_i(x)=0\vee 1 \text{ для } x\in\Omega,\ i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,L};\ \ \sum_{i=1}^{N}\lambda^l_i(x)=k,\ l=\overline{1,L},\ \text{ м.в. для } x\in\Omega\ \Big\};$$

$\tau=\left(\tau_1,\ldots,\tau_N\right)\in\underbrace{\Omega\times\ldots\times\Omega}_{N}=\Omega^N$ – заданий вектор.

Оптимальний розв'язок задачі **B1-** k досягається на вектор-функції $\lambda^*(x)=(\lambda^1_*(x),\ldots,\lambda^l_*(x),\ldots,\lambda^L_*(x))$, кожна компонента $\lambda^l(x)$, $l=\overline{1,L}$, якої обчислюється за формулою: м.в. для $x\in\Omega$

$$\lambda^l_{*i}(x)=\begin{cases}1,\ \text{якщо } c(x,\tau_i)/w_i+a_i\le c(x,\tau_j)/w_j+a_j,\\ \quad\text{водночас } \forall i\in\sigma_l,\ j\in\mathrm{N}\setminus\sigma_l,\ \text{і тоді } x\in\Omega^*_{\sigma_l},\qquad i=\overline{1,N}.\\ 0\ \ \text{у інших випадках,}\end{cases} \qquad (5)$$

Функціонал задачі **B1-**k при $\lambda(\cdot)=\lambda^*(\cdot)$ записується у такий спосіб:

$$I(\lambda^*(\cdot))=\int_\Omega \min_{l=1,L}\left(\sum_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i\right)\right)\rho(x)dx\,.$$

Для задачі **B2-**k, еквівалентної **A2-**k і записаної відносно характеристичних функцій підмножин, що утворюють розбиття k-го порядку заданої множини Ω, оптимальний розв'язок можна отримати за такими формулами: м.в. для $x\in\Omega$

$$\lambda_{*i}^l(x)=\begin{cases}1,\ \text{якщо}\ c(x,\tau_{*i})/w_i+a_i\le c(x,\tau_{*j})/w_j+a_j, \\ \qquad \forall i\in\sigma_l,\ j\in N\backslash\sigma_l\ ,\ \text{і тоді}\ x\in\Omega_{*\sigma_l}, \qquad i=1,...,N\ , \quad l=\overline{1,L}, \\ 0\ \ \text{у інших випадках,}\end{cases}$$

як $\tau_{*1},...,\ \tau_{*N}$ вибирають оптимальний розв'язок задачі

$$G(\tau)\to\min_{\tau\in\Omega^N}\,, \tag{6}$$

де

$$G(\tau)=\int_\Omega \min_{\sigma_l\in M(N,k)}\sum_{i\in\sigma_l}[c(x,\tau_i)+a_i]\rho(x)\,dx\,. \tag{7}$$

Порівняння результатів розв'язання неперервних задач покриття і мультиплексного розбиття множин

Реалізуючи числовий алгоритм розв'язання задачі мультиплексного розбиття множини **A1-**k, як вже зазначалося вище, можна водночас визначати і радіус покриття відповідної кратності цієї множини як величину максимальної відстані між центром і найвіддаленішою точкою у підмножині k-го порядку, що обчислюється за формулою (1).

На рис. 1 наведені двократне кульове покриття і оптимальне дуплексне розбиття квадрата $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ з N=15 фіксованими центрами з такими параметрами: $c(x,\tau_i)$ – евклідова метрика, $a_i=0,\ w_i=1,\ i=\overline{1,N};\quad \rho(x)=1\ \forall x\in\Omega$. Величина радіуса покриття в обох задачах становить R=0.4353. Тут і далі на розбитті тонкою лінією проведений шуканий радіус покриття. На рис. 2, 3 наведено оптимальні двократне і трикратне кульові покриття, а також відповідного порядку оптимальні розбиття множини $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ з розміщенням N=15 і 17 центрів відповідно. Обчислений при цьому радіус двократного покриття дорівнює: R=0.28714 і R=0.2961 (рис. 2); R=0.33264 і R=0.33232 (рис. 3).

Радіуси двократного кульового покриття, які обчислені у процесі розв'язання неперервних задач оптимального дуплексного розбиття за N=13,15, 17, 19, 21, наведені у таблиці. Для порівняння в таблиці подано і результати розв'язання відповідних задач оптимального двократного кульового покриття за допомогою алгоритмів з [2] та [6].

Зазначимо, що розв'язання задачі (6) здійснювалося за допомогою r-алгоритму Шора [12]. З урахуванням того, що цей алгоритм забезпечує пошук лише локального мінімуму негладкої функції, а задача (6) – багатоекстремальна, за різних початкових наближень координат центрів можна отримати різні локальні розв'язки задач оптимального мультиплексного розбиття, а відповідно й радіус багатократного покриття кулями, центри яких є розв'язками задачі (6).

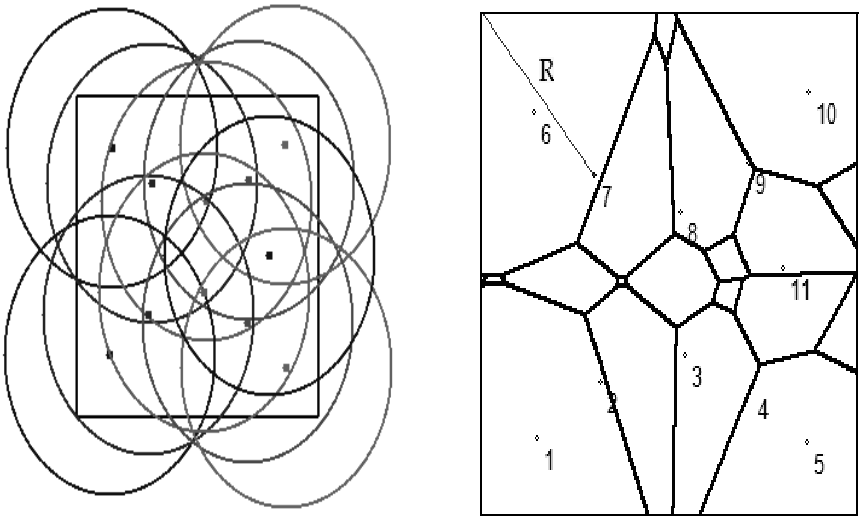

Рис. 1. Двократне покриття і дуплексне розбиття квадрата за N=11 фіксованих центрів

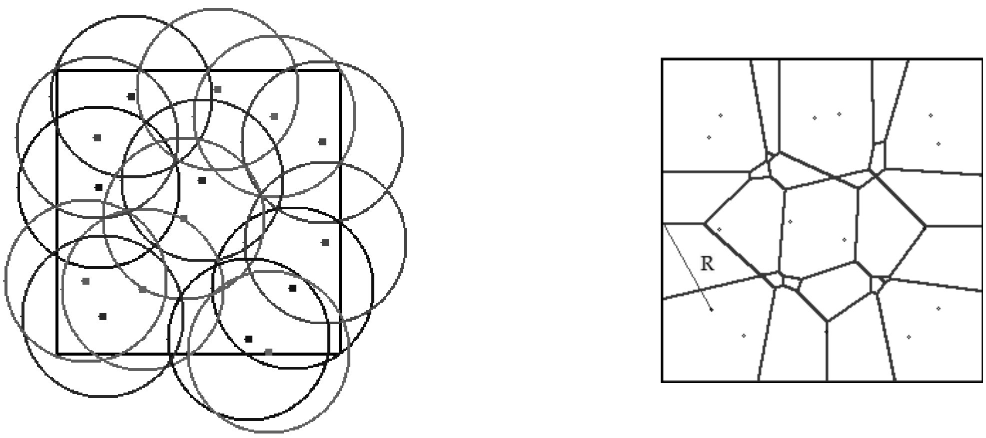

Рис. 2. Двократне мінімальне покриття і оптимальне дуплексне розбиття квадрата з розміщенням N=15 центрів

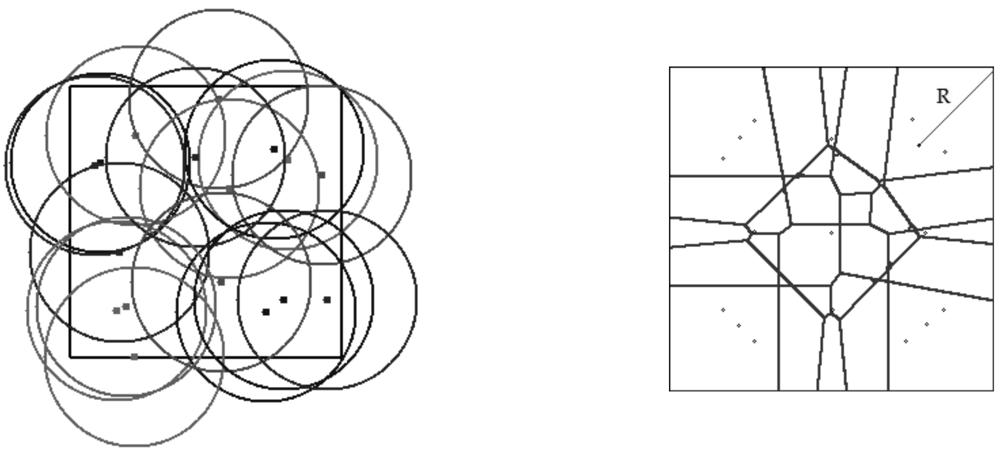

Рис. 3. Трикратне мінімальне покриття і оптимальне триплексне розбиття квадрата з розміщенням N=17 центрів

Мінімальний радіус двократного покриття одиничного квадрата

№	Значення R(τ*), отримане		
	у роботі [2]	за допомогою алгоритму 2 з [6]	розв’язанням задачі дуплексного розбиття
11	0.31280	0.3164	0.34042
13	0.29106	0.29700	0.29614
15	0.26650	0.27807	0.28771
17	0.25372	0.26570	0,27308
19	0.22766	0.23685	0.23529
21	0.21601	0.22500	0.23306

Мінімізація радіуса багатократного покриття обмеженої множини як критерій оптимальності у задачі мультиплексного розбиття множин

Численні обчислювальні експерименти з розв’язання задач мультиплексного розбиття з наведеним вище критерієм оптимальності й задач багатократного кульового покриття дали змогу зробити такі висновки. У випадку фіксованих центрів значення радіуса багатократного покриття, отримані під час розв’язання задачі (1) і задачі **A1-** k , збігаються. Така ситуація не простежується, коли у задачі мультиплексного розбиття центри мають бути розміщені. Постають питання: як має бути записаний цільовий функціонал задачі про оптимальне мультиплексне розбиття множини з розміщенням центрів або якими мають бути множина, що розділяється, та метрика на ній, щоб описана вище ситуація виникла?

Запропонуємо таку модифікацію критерію якості мультиплексного розбиття в задачі **A2-** k :

$$F_R(\overline{\omega},\tau^N)=\max_{l=1,L}\ \sup_{x\in\Omega_{\sigma_l}}\ \max_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i\right)\rho(x).$$

Неважко помітити: якщо в $F_R(\overline{\omega},\tau^N)$ вибрати такі параметри: $c(x,\tau_i)$ – евклідова метрика, $a_i=0,\ w_i=1,\ i=\overline{1,N};\quad \rho(x)=1\ \forall x\in\Omega$, то задача **A2-** k з таким критерієм мультиплексного розбиття стає еквівалентною до задачі (2) пошуку покриття множини заданою кількістю куль мінімального радіуса. Тим самим можна отримати ще одну конструктивну математичну формалізацію задачі оптимального багатократного кульового покриття і її різні узагальнення.

Висновки

Отже, на прикладах розв’язання неперервних задач багатократного кульового покриття множин, а також задач пошуку розбиття відповідної кратності цих множин, продемонстрована можливість визначення радіуса покриття під час розв’язання неперервних лінійних задач мультиплексного розбиття множин. Для задачі мультиплексного розбиття множини з розміщенням центрів запропоновано критерій якості розбиття, який дає змогу отримувати таке розташування центрів, яке збігається з набором центрів куль **мінімального** радіуса, що покривають *k*-кратно задану множину.

1. Михалева А. А. Непрерывные задачи оптимального шарового покрытия и их практические приложения // III Международный форум студентов, аспирантов, молодых ученых. – Днепропетровск, 2015. – С. 504 – 506. 2. Галиев Ш. И., Карпова М. А. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 2010. – Т. 50, № 4. – С. 757–769. 3. Киселева Е. М., Коряшкина Л. С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи: монография. – К.: Наукова думка, 2013. – 606 с. 4. Farahani R. Z. Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Berlin, Heidelberg: 2009. – Springer-Verlag: 530 p. 5. Киселева Е. М., Коряшкина Л. С., Михалева А. А. Конструктивные алгоритмы решения непрерывных задач многократного покрытия // Системные технологии. – Д.: ДМетАУ, 2014. –

Вып. 4 (93). – С. 3–16. 6. Коряшкина Л. С., Михалева А. А., Навоенко В. И. Применение методов оптимального разбиения множеств к непрерывным задачам многократного покрытия // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ, 2014. – С. 141–154. 7. Киселева Е. М., Коряшкина Л. С., Михалева А. А. Непрерывная задача многократного шарового покрытия с ограничениями и метод ее решения // Системні технології. Дніпропетровськ. – 2015. – №1. – С. 165–179. 8. Z. Drezner. The p-centre problem – heuristic and optimal algorithms. J/ OR Soc. 1984. V. 35. P. 741 – 748. 9. Галиев Ш. И. Направление убывания для минимаксиминных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34. – № 3. – С. 323–343. 10. Preparata F. P., Shamos M. I. 1985. Computational Geometry: An Introduction (Texts and Monographs in Computer Science). New York: Springer-Verlag New York, Inc: 390. 11. Коряшкина Л. С. Обобщение одного класса задач бесконечномерного математического программирования // Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2015: тези доповідей Десятої міжнар. наук.-практ. конф. (Чернігів, 22 – 26 червня 2015 р.). – Чернігів: ЧНТУ, 2015.– С. 160–164. 12. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.

УДК 519.8

О. Мриглод
Інститут фізики конденсованих систем НАН України

АВТОМАТИЗОВАНИЙ АЛГОРИТМ ПОШУКУ ТЕРМІНІВ У НАУКОВИХ ПУБЛІКАЦІЯХ

Описано послідовність застосування одного з алгоритмів автоматизованого пошуку наукових термінів, модифікованого з огляду на специфіку поставленої задачі. Проаналізовано сукупність наукових документів з вибраної тематики, погрупованих за кількома дисциплінарними напрямами. В результаті комбінації лінгвістичного та статистичного підходів до аналізу текстів визначено перелік найважливіших термінів, що дають змогу оцінити спектр дрібніших тематичних напрямів у публікаціях з кожної дисципліни.

Ключові слова: інтелектуальний аналіз тексту, автоматизований пошук термінів, текст, публікація.

The application of partially modified semi-automatic algorithm of scientific terms searching is described in this paper. The set of research papers of a given topic within several disciplines were analyzed. The combination of linguistic and statistical approach to the analysis of texts gave a possibility to get the list of the most important terms. These terms can be used to reveal the spectra of subtopics in the set of selected publications within each discipline.

Key words: text mining, semi-automatic terms identification, text, publication.

Вступ

Серед наукометричних досліджень важливе місце посідають проблеми вивчення структури науки та її еволюції. Виявлення так званих “гарячих напрямів” та спостереження за розвитком окремих тематик – це задачі, розв’язок яких може бути вельми корисним для практичного використання. Адже інформація про те, які напрями у науці сьогодні є особливо затребуваними та