Matkowsky B. J., and Volpert V. A. Turing pattern formation in the Brusselator model with superdiffusion, J. Appl. Math., 69, No. 1 (2008), pp. 251-272. 23. Nicolis G., Prigogine I. Self-organization in Non-equilibrium Systems, Wiley, New York, 1977. 24. Oldham K .B., Spanier J. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, New York: Acad. Press, 1974.

УДК 519-866

О. Трофимчук[1], П. Бідюк[2], О. Кожухівська[3], А. Кожухівський[3]
[1]Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАНУ
[2]Інститут прикладного системного аналізу НТУУ "КПІ"
[3]Черкаський державний технологічний університет,
кафедра інформатики та інформаційної безпеки

ЙМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ В СИСТЕМАХ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Ринок систем підтримки прийняття рішень (СППР) пропонує численні системи різного функціонального призначення і їх кількість постійно збільшується. Для подальшого поліпшення якості рішень, що приймаються за допомогою СППР, необхідно впроваджувати нові методи побудови математичних моделей, прогнозування та генерування альтернатив з використанням сучасних інформаційних технологій. Розроблено узагальнену процедуру побудови математичних моделей та оцінювання прогнозів на їх основі, сформовано послідовність дій стосовно обробки можливих невизначеностей під час моделювання і запропоновано методи врахування невизначеностей ймовірнісно-статистичного характеру у процесі побудови моделей, а також розглянуто ілюстративний приклад зменшення рівня невизначеності.

Ключові слова: математичне моделювання і прогнозування, ймовірнісно-статистичні невизначеності, байєсівський підхід до моделювання, урахування невизначеностей, системи підтримки прийняття рішень.

Available on the market decision support systems (DSS) provide a possibility for solving of a wide range of problems in various directions of human activities. To further enhance quality of decision making it is necessary to develop new methods and approaches to model constructing and decision making in the frames of modern concepts of DSS development using available information technologies.

The main objective of this study is in solving of the following problems: development of the general procedure for model constructing and decision alternatives generation using statistical or experimental data and expert judgments in the frames of DSS; development of procedure for processing possible probabilistic and statistical uncertainties in the model constructing process and forecasts estimating; to review some approaches to taking into consideration possible probabilistic and statistical uncertainties and to give an illustrative example for uncertainty reducing.

To develop DSS for modeling dynamic processes in various areas of human activities and forecasts estimation on the basis of these models we propose to use the following system analysis principles: hierarchical architecture, identification and taking into consideration of

possible uncertainties, tracking of all the stages of model constructing and forecasts estimating with separate sets of statistical quality criteria etc. An analysis is provided for selecting possible methods and techniques for taking into consideration statistical and probabilistic types of uncertainties identified in the process of data processing. The set of methods proposed for decreasing the negative influence of uncertainties are as follows: Kalman filters of various modifications, nonparametric regression, static and dynamic Bayesian networks, Bayesian regression, and hierarchical Bayesian modeling. The set of modern Kalman filtering techniques provides a possibility for taking into consideration an influence of external stochastic disturbances, measurement errors (noise), and estimation of non-measurable variables in the frames of linear and non-linear models. Estimation of non-measurable variables is possible when appropriate elements of covariance matrix for estimation errors have nonzero values. Nonparametric and Bayesian regressions have the features of modeling various probability distributions besides normal that are characteristic for specific cases. Such approach provides a possibility for reducing uncertainties that appear due to the use of incorrect probability distributions for model variables and its parameters. Static and dynamic Bayesian networks are a powerful probabilistic and statistical tool for modeling high dimensional processes and systems that are characterized by quantitative and qualitative variables, parametric uncertainty, expert judgments, hidden variables and unknown (unidentified) cause-and-effect relations. Their field of applications is very wide and continues to grow. The hierarchical Bayesian modeling reflects availability of parametric dependences at different levels of a complex system model. Such models provide more correct insight into hierarchical links and dependences in the frames of a system under investigation and consequently such models are more adequate to real world. Generally the set of Bayesian models provides many mentioned above possibilities for handling the uncertainties related to model constructing, forecasts estimating, and generating decision alternatives that could be rather easily implemented in the frames of intellectual DSS.

The main result of the study is in development of system analysis based theory for building modern DSS helping to construct mathematical models, estimate forecasts and compute decision alternatives using statistical data and expert judgments. High quality of the final result is achieved thanks to identification and taking into consideration of possible probabilistic and statistical uncertainties, and tracking of all computational stages within DSS using several sets of statistical quality criteria. The main attention is paid to application of Bayesian approaches to uncertainties handling. An example is given for reducing parametric model uncertainty with the use of Markov chain Monte Carlo computational procedure for parameter estimation.

Thus, we developed a systemic approach to constructing DSS aiming to forecasting model development and decision alternatives generation in conditions of influence of probabilistic, statistical and parametric uncertainties. The future studies will be directed towards further extension of the number of uncertainty processing techniques and their application to investigation of real life systems and processes.

Key words: mathematical modeling and forecasting, probabilistic and statistical uncertainties, Bayesian approach to modeling, uncertainty processing, decision support systems.

Вступ

Системи підтримки прийняття рішень (СППР) знаходять все ширше застосування фактично у всіх галузях людської діяльності завдяки їхнім новим функціональним можливостям стосовно множини можливих аспектів підтримки прийняття рішень. Зокрема, цьому сприяють нові можливості потужних сучасних інформаційних технологій, методів обробки даних та експертних оцінок, методів побудови математичних моделей, оцінювання прогнозів на необхідний часовий горизонт, а також стрімкий розвиток методів генерування альтернативних рішень [1, 2]. У напрямі подальшого розвитку методології побудови та реалізації СППР працює велика кількість учених та інженерів, зусилля яких спрямовані на розширення функціональності систем, поліпшення якості (точності та корисності) остаточних результатів, підвищення зручності використання систем та введення елементів їх адаптації до користувачів, зменшення строків розроблення та реалізації, розширення можливостей стосовно модифікації та подальшого функціонального розширення наявних систем.

Узагальнена архітектура СППР передбачає наявність таких основних підсистем: підсистема забезпечення взаємодії з оператором або особою, що приймає рішення (ОПР); підсистема обробки даних та експертних оцінок з метою побудови математичних моделей, обчислення оцінок прогнозів та генерування альтернативних рішень, з яких вибирається краще для практичної реалізації; база знань і даних; підсистема представлення проміжних та остаточних результатів користувачеві у зручній для нього формі. Всі етапи обчислень повинні супроводжуватись контролем якості проміжних та остаточних результатів за допомогою відповідних множин статистичних критеріїв якості (критерії якості даних, критерії якості моделей і оцінок прогнозів та критерії якості рішень). СППР надають користувачеві свободу вибору необхідної множини обчислювальних інструментів для розв'язання задач визначеного класу, оперативно розширювати цю множину новими функціями та критеріями, комбінувати результати, отримані за допомогою різних методів, подання проміжні та остаточні результати у зручній для сприйняття формі, формувати спеціалізовані бази знань і даних тощо.

Розроблено узагальнену системно орієнтовану методологію проектування СППР з функціями ідентифікації та врахування можливих невизначеностей, які негативно впливають на отримувані результати.

Постановка задачі

Мета роботи полягає у розв'язанні таких задач: розроблення загальної процедури побудови моделі, оцінювання прогнозу та генерування альтернативних рішень з використанням СППР; сформувати послідовність дій стосовно обробки невизначеностей під час побудови моделей та оцінювання прогнозів; проаналізувати можливі типи невизначеностей, які можуть бути враховані під час розроблення СППР для обробки даних з метою оцінювання прогнозів та формування альтернативних рішень; запропонувати методи врахування невизначеностей ймовірнісно-статистичного характеру у процесі побудови моделей і розглянути ілюстративний приклад зменшення рівня невизначеності.

Процедура побудови моделі, оцінювання прогнозу та генерування альтернативних рішень за допомогою СППР

СППР надає ефективну допомогу користувачеві, якщо вона забезпечує таку послідовність виконання дій (функцій), яка максимально наближається до характеру мислення ОПР під час розв'язування задач прийняття рішень [2]. Узагальнену процедуру побудови моделі, оцінювання прогнозу та генерування альтернативних рішень з використанням СППР подано на рис. 1.

Що особливо характерно для системного підходу до проектування СППР такого типу – це використання критеріїв якості даних, якості (адекватності) моделі, яка будується за статистичними (експериментальними) даними, якості оцінок прогнозів, що обчислюються за моделлю, та якості рішень, що приймаються з використанням оцінок прогнозів. У процесі побудови математичної моделі досліджуваного процесу, як правило, оцінюють кілька кандидатів, з яких вибирають найкращу модель за множиною відповідних критеріїв. Хоча у цьому випадку остаточний вибір моделі повинен виконуватись після обчислення оцінок прогнозів, оскільки саме якість оцінок прогнозів – це остаточна характеристика якості моделі. Імітаційним моделюванням можна оцінити якість альтернативних рішень-кандидатів, які можуть бути згенеровані на основі моделі та оцінок прогнозів. Отже, аналіз якості результатів проміжних обчислень забезпечить належну якість остаточного результату, тобто вибраного рішення.

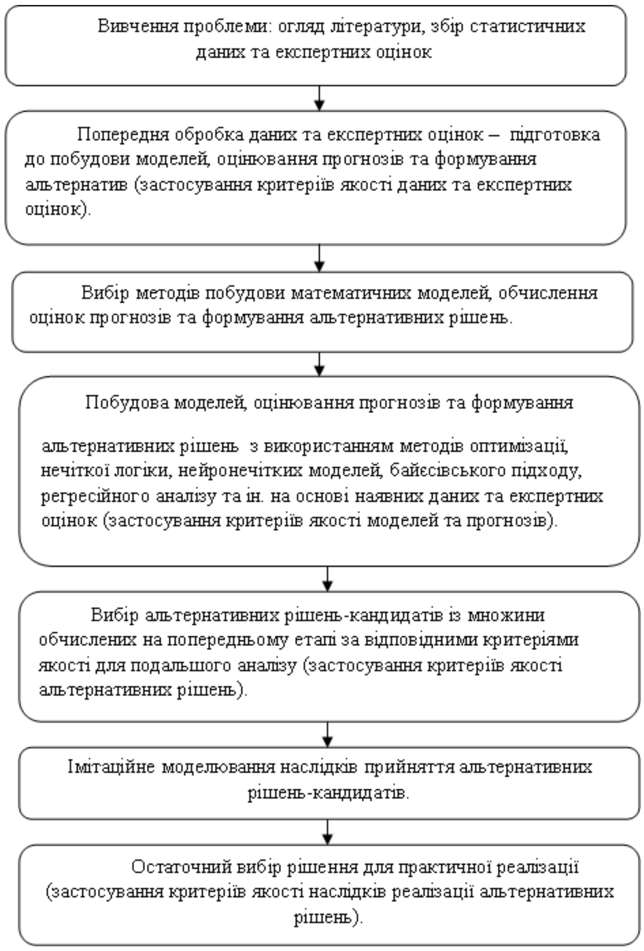


Рис. 1. Узагальнена процедура побудови моделі, оцінювання прогнозу та генерування альтернативних рішень з використанням СППР

Невизначеності даних, моделей та оцінок прогнозів

Практика створення СППР для розв'язання задач математичного моделювання, оцінювання прогнозів і прийняття рішень на їх основі свідчить про те, що системи такого типу необхідно проектувати і реалізовувати з використанням принципів системного аналізу [3]. Зокрема, це такі: ієрархічність, функціональна повнота, адаптивність до даних і користувача, ідентифікація і врахування невизначеностей, контроль всіх етапів обчислювального процесу за допомогою окремих множин статистичних критеріїв якості тощо. Надалі вважатимемо, що у процесі побудови моделей за статистичними даними, оцінювання прогнозів на основі створених моделей та генерування альтернативних рішень виникають ймовірнісно-статистичні, структурні і параметричні невизначеності. Послідовність виявлення, обробки та врахування невизначеностей подана на рис. 2. Всі згадані задачі можна успішно розв'язати за допомогою належно спроектованої та реалізованої СППР.

Означення визначеності та невизначеності подано у багатьох роботах, зокрема в роботі [4]: "Визначеність – це умова стосовно отримання всіх знань, необхідних для вибору такого напряму руху, який приведе до найбільш прийнятного результату". На основі цього означення формулюється невизначеність: "Невизначеність для особи, що приймає рішення, визначається різницею між визначеністю та поточним станом інформації, наявної для прийняття рішення".

Вважатимемо, що невизначеності – це фактори, що негативно впливають на весь процес побудови математичної моделі, оцінювання прогнозів та формування альтернативних рішень. Їх поява зумовлена неповнотою та неточністю наших знань стосовно досліджуваного процесу чи об'єкта або некоректним вибором та застосуванням обчислювальних процедур тощо.

Невизначеності можуть бути зумовлені неповнотою даних та похибками (шумами) вимірів, наявністю впливу негативних випадкових збурень на функціонування досліджуваних об'єктів, неправильною оцінкою структури моделі або вибором типу ймовірнісних розподілів під час її побудови або ж неправильним вибором методу оцінювання параметрів моделі.

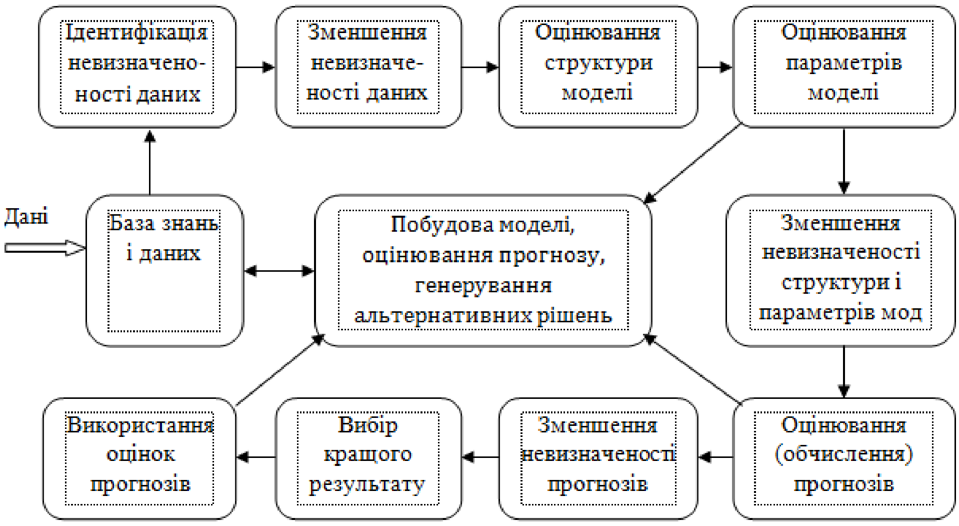


Рис. 2. Послідовність ідентифікації та обробки невизначеностей під час побудови моделей та оцінювання прогнозів

Задача ідентифікації невизначеностей даних розв'язується за допомогою спеціальних тестів та візуального дослідження даних. Деякі методи зменшення невизначеностей ймовірнісно-статистичного характеру розглянуто нижче. Рекомендації стосовно зменшення впливу невизначеностей структури і параметрів моделі потребують окремого аналізу. Невизначеності, пов'язані з даними та моделями, впливають на якість остаточного результату – оцінок прогнозів та рішень, які приймаються на їх основі. Послідовне зменшення впливу невизначеностей різного характеру і природи надає можливість суттєво покращити якість остаточних результатів [5].

Урахування невизначеностей ймовірнісно-статистичного типу

До невизначеностей статистичного типу зарахуємо такі: невизначеність стосовно типу розподілу даних та випадкових збурень, що діють на досліджувані процеси; наявність пропусків даних та великих імпульсних (екстремальних) значень у вибірках, що використовуються для побудови моделей процесів; наявність шумів (похибок) вимірів; наявність прихованих (невимірюваних) змінних; вплив коротких вибірок на якість моделей та оцінок прогнозів, обчислених на їх основі; недостатня інформативність даних; наявність різких стрибкоподібних змін у рядах даних (зміна режиму функціонування процесу). Останній ефект можна віднести також до випадкових структурних змін даних. Розглянемо деякі інструменти боротьби з невизначеностями статистичного характеру.

Фільтри Калмана. Зменшити негативний вплив зовнішніх випадкових збурень та похибок вимірів можна завдяки застосуванню належної модифікації оптимального адаптивного фільтра Калмана. За допомогою адаптивного фільтра можна оцінити деякі невідомі параметри математичної моделі процесу (об'єкта) у просторі станів (ПС) і скористатись цими оцінками для уточнення математичної моделі та підвищення ступеня її адекватності. Сьогодні використовуються декілька модифікацій оптимальних фільтрів залежно від постановки задачі дослідження [6]. Фільтри використовують також для оцінювання значень невимірюваних (прихованих) змінних завдяки наявності ненульових значень відповідних (недіагональних) компонент коваріаційних матриць похибок оцінок вектора стану моделі. Отже, оптимальні фільтри – це корисний статистичний інструмент для згладжування даних, урахування впливу випадкових збурень та похибок вимірів, оцінювання невимірюваних компонент вектора стану моделі, а також для короткострокового прогнозування.

Використання непараметричної регресії. Відомо, що для розв'язання задачі моделювання і прогнозування процесів довільної природи широко використовуються лінійні за параметрами математичні моделі або нелінійні стосовно змінних (лінійна та псевдолінійна регресія). Однак на використання лінійних і псевдолінійних моделей та методу найменших квадратів (МНК) для їх оцінювання накладаються доволі жорсткі умови, а саме:

– основна (залежна) змінна повинна мати нормальний розподіл з обмеженою постійною дисперсією:

$\{ y(k) \sim N(\bar{y}, s_y^2), \ s_y^2 = const \le c, \ c > 0$;

– випадковий процес у правій частині моделі $e(k)$ – це послідовність некорельованих однаково розподілених значень з нульовим середнім:

$$E[e(k)\, e(l)] = \begin{cases} s_e^2, & k=l; \\ 0, & k \neq l; \end{cases} \quad E[e(k)] = 0 \ , \ k = 0,1,2,...; \ \ l = 0,1,2,... .$$

– випадковий процес $e(k)$ не повинен бути корельованим із минулими значеннями основної змінної: $E[e(k)\ y(k-l)] = \begin{cases} s_e^2, & k=l; \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$

У наведених виразах E – символ математичного сподівання; k – дискретний час, зв'язаний з реальним неперервним часом t періодом дискретизації вимірів T_s: $t = kT_s$. Крім того, припускають, що регресори – це детерміновані величини, а пошук «найкращої» структури моделі здебільшого є проблематичним ("найкращої" взято у лапки, оскільки будь-яка модель – це апроксимація). Очевидно, що забезпечення згаданих обмежень на процеси далеко не завжди можливе. Загалом можна сказати, що класичний регресійний підхід до моделювання не завжди може забезпечити достатню структурну гнучкість (необхідний ступінь адаптованості до даних) під час побудови математичних моделей, тобто структура моделі характеризується невизначеністю.

Для того щоб зменшити кількість обмежень, під час побудови моделі можна скористатись непараметричною регресією. На відміну від класичної регресії, застосування непараметричної передбачає стохастичність регресорів, $X_1, X_2, ..., X_p$, тобто $X_i, i = 1,..., p$ – випадкові змінні, що практично завжди відповідає дійсності. Загальне представлення непараметричної регресії практично таке ж, як і класичної параметричної:

$$y(k) = j\ [\mathrm{X}(k)] + e(k) \, ,$$

де $e(k) = y(k) - j\ [\mathrm{X}(k)], \ E[e(k)|\mathrm{X}(k)] = 0$, але припущення стосовно цієї моделі дещо інші. По-перше, припускають, що похибка моделі непараметричної регресії залежить від значень регресорів X_i, а тому тип її розподілу залежить від розподілу регресорів. По-друге, регресори $X_1, X_2, ..., X_p$ можуть мати різні розподіли і кількість регресорів може бути довільно великою, тобто $\dim[\mathrm{X}] >> 2$. Оцінку функції $j\ [x(k)]$ для цієї регресії можна записати так [6]:

$$\hat{j}_n\ [x(k)] = \sum_{k=1}^{n} w_{n,k}(x)\, y(k) \, ,$$

де $x(k)$ – фактичні незалежні змінні моделі; $w_{n,k}(x)$ – вагові коефіцієнти, які визначають внесок вимірів основної змінної у значення функції і можуть бути представлені у вигляді: $w_{n,k}(x) = w_{n,k}(x, X_1,..., X_n) \in \Re$; n – кількість вимірів. Значення вагових коефіцієнтів та функції регресії можна оцінити за допомогою індикаторних функцій (partitioning estimate) або ядра Надарая–Уотсона [7]. Отже, застосування непараметричної регресії дає змогу зменшити статистичну невизначеність даних завдяки використанню фактичних розподілів змінних, що автоматично приводить до зниження невизначеності структури моделі.

Байєсівський підхід. У СППР часто виникає необхідність побудови моделей у формі розподілів випадкових величин (ВВ). Це можуть бути моделі самих змінних досліджуваного процесу, випадкових збурень та похибок вимірів. Як показано вище, задача визначення типу розподілу виникає також у регресійному моделюванні. У процесі побудови моделей у формі розподілів дискретних випадкових величин кожному значенню присвоюється ймовірність його появи. Сукупність значень ВВ та ймовірностей їх появи утворює розподіл ймовірностей для конкретного випадку. Завдання дослідника – встановити тип розподілу й обчислити оцінки його параметрів. У випадках, коли одночасно аналізуються дві і більше ВВ, виникає задача побудови спільних багатовимірних розподілів. Спільні розподіли дають можливість обчислювати умовні ймовірності, використовуючи відомі процедури нормування там, де це необхідно.

У процесі виконання ймовірнісних розрахунків часто використовується поняття умовної незалежності ВВ: $P(x,y|v)=P(x|v)\,P(y|v)$, де x і y – незалежні величини. Дуже корисною властивістю правила (теореми) Байєса $P(A|B)=P(B|A)P(A)/P(B)$ є те, що задачу визначення умовної ймовірності можна формулювати зворотно: "Якщо подія *A* сталася, то яка ймовірність того, що її спричинила подія *B*?".

Невизначеність ймовірнісного типу, тобто станеться деяка подія чи ні, можна врахувати за допомогою різних ймовірнісних моделей, наприклад, моделей байєсівського типу. Такий підхід відомий у спеціальній літературі як байєсівське програмування (парадигма) [8]. Клас моделей такого типу містить байєсівські мережі (БМ), динамічні байєсівські мережі (ДБМ), байєсівську регресію, ієрархічні байєсівські моделі, байєсівські фільтри, приховані марковські моделі, фільтри Калмана, байєсівські карти (відображення) та деякі інші.

Узагальнена структура байєсівської програми складається з таких елементів (кроків): (1) опис і постановка задачі, у якій ставиться запитання стосовно оцінювання умовної ймовірності: знайти $P(X_i|D,Kn)$, де X_i – цільова змінна (подія), ймовірність значення якої необхідно отримати в результаті застосування деякого вибраного правила формування ймовірнісного висновку; (2) використання експериментальних даних D і апріорних знань Kn для оцінювання структури і параметрів моделі конкретного типу; (3) вибір і застосування методу формування ймовірнісного висновку, який повинен дати відповідь на поставлене вище запитання; (4) аналіз якості остаточного результату. Очевидно, що наведена послідовність дій є певною мірою стандартною стосовно моделювання та формування висновку на основі експериментальних (статистичних) даних. Вона природно узгоджується з методами циклічної структурно-параметричної адаптації моделі до нових даних та експертних оцінок. Останні можуть бути корисними, наприклад, для оцінювання типів апріорних розподілів та структури моделі.

Сьогодні все популярнішими стають БМ та ДБМ, які формально можна подати четвіркою компонент: $\mathrm{N} = <\mathrm{V}, \mathrm{G}, \mathrm{P}, \mathrm{T}>$. Першою компонентою четвірки є множина змінних моделі V; другою – спрямований ациклічний граф G, вузли якого відповідають випадковим змінним модельованого процесу; P – спільний розподіл ймовірностей змінних (вершин графа) $\mathrm{V}=\{X_1, X_2, ..., X_n\}$; T – таблиці умовних ймовірностей, кількість яких визначається кількістю змінних моделі. Стосовно множини змінних виконується марковська умова, тобто кожна змінна мережі не залежить від усіх інших змінних, за винятком батьківських попередників цієї змінної.

У процесі побудови моделі спочатку ставиться задача обчислення значень взаємної інформації між усіма вершинами (змінними) мережі. Потім необхідно знайти оптимальну структуру мережі з використанням як критерію якості, наприклад, оцінки опису структури мережі мінімальної довжини (ОМД), яка аналізується і оновлюється на кожній ітерації алгоритму навчання. Використання ймовірнісно-статистичних моделей у формі БМ надає такі переваги: модель може містити кількісні та якісні (дискретні та неперервні) змінні одночасно; кількість змінних може бути великою (наприклад, кілька тисяч); для обчислення значень таблиць умовних ймовірностей можна використовувати статистичні дані та експертні оцінки; методика побудови БМ спрямована на виявлення істинних причинно-наслідкових зв'язків між змінними, що забезпечує високий ступінь адекватності результуючої моделі; структура мережі може доповнюватись моделями інших типів, наприклад, регресійними, моделями на основі м'яких обчислень, нейронними мережами тощо; для обчислення ймовірнісного висновку існує доволі широка множина методів, які можна використовувати у межах знаходження розв'язку однієї задачі. Отже, БМ – це потужний інструмент моделювання процесів (об'єктів) довільної природи в умовах наявності статистично-ймовірнісних та структурних невизначеностей (коли недостатньо інформації для оцінювання структури моделі).

Для зменшення впливу ймовірнісно-статистичних невизначеностей можна скористатись також моделями у формі байєсівської регресії, побудова та використання яких ґрунтуються на аналізі фактичних розподілів змінних і параметрів моделі. Так, проста одновимірна модель парної регресії має вигляд:

$$y(k)|\,x(k)=b_1+b_2\,x(k)+u(k),\quad k=0,1,...,n\,.$$

Припускають, що значення випадкового процесу $u_1,..., u_n$ – незалежні й можуть мати, наприклад, нормальний розподіл $\{u(k)\}\sim N(0,s_u^2)$; вектор невідомих параметрів складається з трьох елементів: $q=(b_1,\,b_2,\,s_u^2)^T$. Для вимірів основної змінної $\mathrm{y}=(y_1,...,y_n)^T$ та регресора $\mathrm{x}=(x_1,...,x_n)^T$ функція правдоподібності (без коефіцієнта пропорційності) має вигляд:

$$L(\mathrm{y}|\mathrm{x},\,b_1,\,b_2,s_u)=\frac{1}{s_u^N}\,\exp\left\{-\frac{1}{2s_u^2}\sum_{k=1}^{N}[\,y(k)-b_1-b_2\,x(k)]^2\right\}.$$

За умови прийняття спрощених (неінформативних) апріорних розподілів стосовно невідомих параметрів у вигляді:

$$g(b_1,b_2,s_u)=g_1(b_1)\,g_2(b_2)\,g_3(s_u)\,,$$
$$g_1(b_1)\propto const\,,$$
$$g_2(b_{21})\propto const\,,$$
$$g_3(s_u)\propto 1/s_u\,,$$

де $\propto$ – символ пропорційності, за теоремою Байєса можна знайти спільну апостеріорну щільність у вигляді [8]:

$$h(b_1,b_2,s_u|x,y)\propto\frac{1}{s}\,\frac{1}{s^N}\exp\left[-\frac{1}{2s^2}\sum_{k=1}^{N}\left(y(k)-b_1-b_2\,x(k)\right)^2\right],$$
$$-\infty<\,b_1,\,b_2<+\infty,\quad 0<s_u<\infty\,.$$

Оцінки параметрів моделі за методом максимальної правдоподібності визначаються так:

$$\hat{b}_1=\bar{y}-\hat{b}_2\,\bar{x};\qquad \hat{b}_2=\frac{\sum_{k=1}^{N}[\,x(k)-\bar{x}\,][\,y(k)-\bar{y}\,]}{\sum_{k=1}^{N}[\,x(k)-\bar{x}\,]\;\sum_{k=1}^{N}[\,y(k)-\bar{y}\,]},$$

де $\bar{x}=N^{-1}\sum_{k=1}^{N}x(k),\quad \bar{y}=N^{-1}\sum_{k=1}^{N}y(k)$, а незміщена оцінка дисперсії випадкового процесу обчислюється за виразом:

$$\hat{s}_u^{\,2}=s^2=\frac{1}{N-2}\sum_{k=1}^{N}[\,y(k)-\hat{b}_1-\hat{b}_2\,x(k)]\,.$$

Спільна апостеріорна щільність для параметрів моделі відповідає двовимірному розподілу Стьюдента:

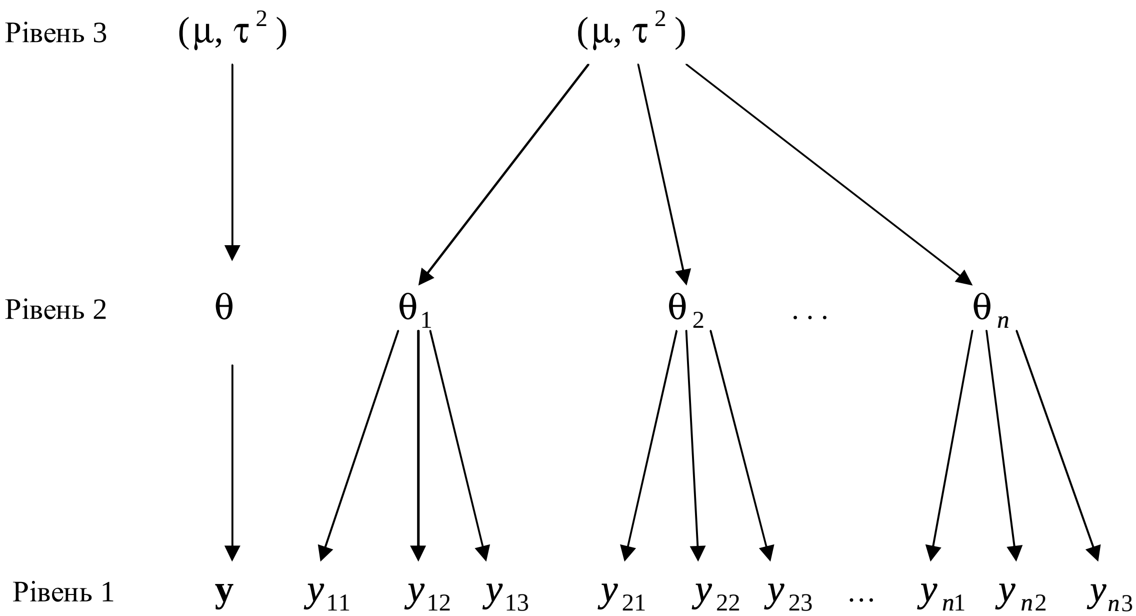
$$h_1(b_1,\,b_2\,|\mathrm{y},\mathrm{x})\propto\Big\{(N-2)s^2+N(b_1-\hat{b}_1)^2+(b_2-\hat{b}_2)^2\sum_{k=1}^{N}x(k)^2+$$
$$+\,2(b_1-\hat{b}_1)(b_2-\hat{b}_2)\sum_{k=1}^{N}x(k)\Big\}^{-0,5N}.$$

Отже, можна виконувати уточнення розподілів змінних і параметрів моделі, що сприяє підвищенню її ступеня адекватності. На основі відомого нового спостереження x^* та апріорної інформації стосовно моделі можна знайти прогнозний інтервал для основної змінної y^*:

$$p(y^*|x^*) = \iiint L(y^*|x^*, b_1, b_2, s)\, h(b_1, b_2, s\,)\,|\,\mathrm{x,y})\, db_1, db_2, ds\ .$$

Ієрархічне байєсівське моделювання. Ієрархічне моделювання – це підхід до побудови складних моделей, що ґрунтується на побудові множини простих умовних розподілів, які утворюють одну модель. Він природно поєднується з теорією формування байєсівського ймовірнісного висновку за допомогою сучасних числових методів байєсівських обчислень [9, 10]. Ієрархічні моделі належать до класу маргінальних моделей (тобто остаточним результатом є розподіл $P(\mathrm{y})$, де $\mathbf{y}$ – наявний вектор даних), які формуються з послідовності умовних розподілів вибраних змінних, серед яких приховані змінні. На рис. 3 подано графічне представлення послідовності умовних моделей для трьох рівнів ієрархії.

Стрілки на рис. 3 вказують на змінні (або параметри), які визначаються за умови, що накладаються попередніми батьківськими змінними. Таке представлення передбачає, що дані $\mathbf{y}$ розміщуються на першому (нижньому) рівні, а гіперпараметри моделі (m, t^2) на третьому (верхньому) рівні. Тому стрілки, які вказують на наявні причинно-наслідкові залежності, спрямовані вниз. У цьому прикладі множина параметрів $q = (q_i, i = 1, 2, ..., n)$, $q_i \sim N(m, t^2)$ другого рівня визначає розподіли $y_i \sim N(q_i, s^2)$, $i = 1, 2, ..., n$, а параметри розподілу $\{q_i\}$ визначаються парою (m, t^2) .



а *б*

Рис. 3 Графічне представлення послідовності умовних моделей для випадку трьох рівнів ієрархії: а – спрощене подання; б – розширене представлення з ілюстрацією умовної незалежності

Припустимо, що значення параметрів s^2 і t^2 – відомі скінченні величини, а параметр m невідомий з апріорним розподілом p_m. Тоді спільну апріорну щільність для (q, m) можна подати у вигляді: $p_m(m)\prod_i p_q(q_i|m)$, а спільний апріорний розподіл для вектора параметрів q визначається інтегралом по m:

$$p(q) = \int p_m(m) \prod_i p_q(q_i \mid m)\, d\,m\,.$$

Якщо припустити, що μ має рівномірний (неінформативний) апріорний розподіл, апостеріорний розподіл для q_i матиме вигляд [9, 11]:

$$q_i \sim N(\tilde{q}_i, v_i)\,,$$

$$\text{де } \tilde{q}_i = (y_i / s^2 + \bar{y}/t^2)/(1/s^2 + 1/t^2)\,;\ v_i = s^2 (s^2/n + t^2)/(s^2 + t^2)\,;$$

$\bar{y} = n^{-1} \sum y_i$ – вибіркове середнє.

Приклад аналізу ймовірнісно-статистичної невизначеності. Розглянемо ілюстраційний приклад уточнення значення параметра моделі стаціонарного процесу і зменшення ступеня статистичної невизначеності з використанням байєсівського підходу оцінювання за методом Монте-Карло для марковських ланцюгів (МКМЛ). У цьому випадку ланцюг Маркова першого порядку формується з послідовності значень оцінок невідомого параметра. Процес представлено зашумленою короткою вибіркою зі стандартним відхиленням похибок вимірів $s_e = 0{,}15$; також припустимо, що $0 \le q \le 1$ (умова стаціонарності процесу). Мета побудови імітаційної моделі полягає у визначенні оцінки параметра апроксимуючої функції $j\,(x,k)$, яка встановлює залежність між вхідною та вихідною змінними:

$$y(x,k) = j\,(x,k) + e\,(k), \quad k = 1,\ldots,n\,, \quad \{e\,(k)\} \sim N(0;\, 0{,}0225)\,,$$

де n – кількість вимірів. Вибіркову щільність для основної змінної виберемо у вигляді:

$$L(y \mid j\,(q)) \propto \exp\left\{ -\frac{1}{2}\,(\mathrm{y} - j\,(q))^T\, \Sigma_y^{-1}\,(\mathrm{y} - j\,(q)) \right\},$$

де $\mathrm{y} = [\,y(x_1, \ldots, y(x_n)\,]^T$; $j\,(q) = [\,j\,(x_1, q), \ldots, j\,(x_n, q)\,]^T$; $\Sigma_y = \mathrm{I}_n\, 0{,}15^2$; I_n – одинична матриця відповідної розмірності; $\propto$ – символ пропорційності, який використовують у випадках, коли права частина потребує додаткового нормування. Для постановки задачі оцінювання у байєсівській формі необхідно вибрати апріорний розподіл для невідомого параметра, тобто $p\,(q)$. Якщо немає інформації стосовно апріорного розподілу, часто приймають, що він рівномірний (неінформативний) у деякому інтервалі значень, наприклад, $[\,0,\,1\,]$. Згідно з правилом Байєса апостеріорний розподіл для q можна записати у вигляді:

$$p\,(q,\, y) \propto L(y \mid j\,(q))\; p\,(q) \propto$$

$$\propto \exp\left\{ -\frac{1}{2}\,(\mathrm{y} - j\,(q))^T\, \Sigma_y^{-1}\,(\mathrm{y} - j\,(q)) \right\} \mathrm{I}\,.$$

Очевидно, що застосування апріорних інформативних розподілів можливе і корисне за умови наявності відповідної інформації.

Для генерування значень з апостеріорних розподілів часто застосовують належну модифікацію методу МКМЛ, який широко використовують у випадках використання багатовимірних розподілів [10]. Однією з доволі простих процедур є алгоритм Метрополіса:

1 – задати початкове значення параметра θ_0;

2 – на основі поточного значення θ_i згенерувати із симетричного розподілу кандидата на наступну оцінку θ'_{i+1};

3 – обчислити ймовірність прийняття/відхилення згенерованої оцінки $a = \min\,\{1,\, p\,(q'_{i+1} \mid y)/p\,(q_i \mid y)$;

4 – присвоїти наступне значення оцінці параметра:

$$q_{i+1}=\begin{cases} q'_{i+1} & \text{з ймовірністю } a\,, \\ q_i & \text{з ймовірністю } 1-a\,; \end{cases}$$

5 – продовжити ітерації до збіжності оцінки.

Критеріями зупинки процесу оцінювання параметрів можуть бути автокореляційні функції послідовності оцінок або вибрані порогові значення стосовно приросту оцінки. Як правило, кількість ітерацій процедури МКМЛ становить $n\,1000$, $n=2,3,...$. Велику допомогу в розв'язанні задач оцінювання з використанням МКМЛ надає система R, яка є у вільному доступі.

Для обчислення середнього апостеріорного розподілу як оцінки параметра використано 3500 останніх значень з 4500 згенерованих. Отримане значення $\hat{q}=0,756$ свідчить про стаціонарність процесу. Послідовність значень оцінок випадкового процесу $\{\hat{e}(k)\}=\{y(k)\}-\{j\,(x,\hat{q})\}$, обчислених з використанням знайденого значення параметра моделі, має такі характеристики: $\{\hat{e}(k)\}\sim N(0{,}3\cdot 10^{-4};\,0{,}0149)$, тобто стандартне відхилення становило 0,122. Отже, апріорно задана стандартним відхиленням невизначеність вимірів ($s_e=0{,}15$;) зменшилась до $s_{\hat{e}}=0{,}122$.

Очевидно, що переваги цього методу проявляються під час розв'язування задач оцінювання багатовимірних моделей, тобто оцінювання векторів параметрів у випадках, коли аналітичні процедури застосувати неможливо. У межах методу МКМЛ існує множина підходів до генерування псевдовипадкових послідовностей, які можуть забезпечити належну точність апостеріорних оцінок за прийнятний час обчислень.

Висновки

У процесі побудови математичних моделей за статистичними (експериментальними) даними є такі три основні види невизначеностей: ймовірнісно-статистичні, структурні й параметричні. Врахування цих невизначеностей можливе завдяки використанню належно спроектованої та реалізованої СППР із застосуванням принципів системного аналізу – ієрархічності, адаптивності, функціональної повноти, аналізу якості результатів обчислень на всіх етапах моделювання і генерування рішень тощо. Процедури ідентифікації та врахування невизначеностей проектуються та реалізуються послідовно згідно з ієрархією процесу обробки даних.

Для обробки та врахування ймовірнісно-статистичних невизначеностей запропоновано множину моделей байєсівського типу, що відомі у спеціальній літературі як байєсівське програмування. Такий підхід забезпечує побудову моделей високого ступеня адекватності в умовах наявності пропусків даних та з використанням в одній моделі числових даних і експертних оцінок, а також в умовах, коли виникають труднощі із встановленням коректних причинно-наслідкових зв'язків між змінними. Крім того, використання у моделях багатовимірних умовних розподілів, що фактично існують на практиці, сприяє подальшому покращенню характеристик моделі та отриманню прийнятного за якістю результату. Ієрархічне моделювання природно поєднується з теорією формування ймовірнісного висновку за допомогою сучасних числових методів байєсівських обчислень. Розглянутий приклад покращення статистичних характеристик моделі свідчить про наявність практично орієнтованих методів зменшення впливу невизначеностей на процес прийняття рішень на основі модельного підходу.

У подальших дослідженнях необхідно розглянути можливості зменшення впливу невизначеностей, пов'язаних із структурою і параметрами математичної моделі, та виконати необхідні обчислювальні експерименти з використанням СППР описаного типу.

1. Holsapple C. W. Decision support systems: a knowledge – based approach / C. W. Holsapple, A. B. Whinston. – New York: West Publishing Company, 1996. – 863 p. 2. Burstein F. Handbook on decision support systems 1: basic themes / F. Burstein, C. W. Holsapple. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 908 p. 3. Zgurovsky M. Z. System analysis: theory and applications / M. Z. Zgurovsky, N. D. Pankratova. – Berlin: Springer-Verlag, 2007. – 447 p. 4. Nikolaidis E. Engineering design reliability *handbook / E. Nikolaidis, D. M. Ghiocel, S. Singhal. – New York: CRC Press, 2004. – 1216 p. 5. Wit E. All models are wrong: an introduction to model uncertainty / E. Wit, E. Van den Heuvel, J.-W. Romeijn // Statistica Neerlandica. – Vol. 66. – No. 3. – 2012. – P. 217–236. 6. Gibbs B. P. Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling / B. P. Gibbs. – Hoboken (New Jersey): John Wiley & Sons Inc., 2011. – 627 p. 7. Gyorfi L. Distribution-free theory of nonparametric regression / L. Gyorfi, M. Kohler, A. Krzyzak, H. A. Walk. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 664 p. 8. Bernardo J. M. Bayesian theory / J. M. Bernardo, A. F. M. Smith. – New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2000. – 586 p. 9. Press S. J. Subjective and objective Bayesian statistics / S. J. Press. – Hoboken: John Wiley & Sons, Ltd, 2003. – 558 p. 10. Bolstad W. M. Understanding computational Bayesian statistics / W. M. Bolstad. – Hoboken (New Jersey): John Wiley & Sons, Ltd, 2010. – 334 p. 11. Lindley D. V., Smith A. F. M. Bayes estimates for the linear model / D. V. Lindley, A.F. M. Smith // J. Royal Statist. Soc. – Vol. 34B. – 1972. – P. 1–41.*

УДК 681.5.015:007

Г. Ракитянська
Вінницький національний технічний університет

РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЧІТКИХ ЛОГІЧНИХ РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ ОБЕРНЕНОГО ВИВЕДЕННЯ

Розглянуто задачу оберненого логічного виведення на основі багатовимірних нечітких відношень. Запропоновано метод розв’язання систем нечітких логічних рівнянь з розширеною max-min композицією та еквівалентних систем з ієрархічною max-min/min-max композицією. Доведено властивості множини розв’язків таких систем. Задача знаходження множини розв’язків формулюється у вигляді задачі оптимізації, для розв’язання якої використовується генетичний алгоритм. Запропонований підхід ілюструється прикладом технічної діагностики.

Ключові слова: обернене логічне виведення, композиційне правило виведення, багатовимірні нечіткі відношення, розв’язання систем нечітких логічних рівнянь.

In this paper the problem of inverse logical inference based on multivariable fuzzy relations is considered. The method for solving systems of fuzzy logical equations with the extended max-min composition and equivalent systems with the hierarchical max-min/min-max composition is proposed. The properties of the solution set for such systems are also proven. The problem of the solution set finding is formulated in the form of the optimization problem which is solved using the genetic algorithm. The proposed approach is illustrated by the example of technical diagnosis.

Key words: inverse logical inference, compositional rule of inference, multivariable fuzzy relations, solving systems of fuzzy logical equations.

Вступ

Широке коло задач, які виникають у техніці, медицині, економіці та інших сферах і потребують відновлення причин за спостережуваними наслідками, належить до класу обернених задач [1]. Зручним інструментом формалізації експертної інформації під час моделювання причинно-наслідкових зв’язків є теорія нечітких множин [2]. Модель об’єкта будується на основі композиційного правила виведення Заде [2], яке зв’язує вхідні та вихідні змінні об’єкта (причини і наслідки) за допомогою матриці нечітких відношень. Задача відновлення входів (причин) формулюється у вигляді оберненого нечіткого логічного виведення і потребує розв’язання системи