УДК 004.94;674.047

І. Борецька, Я. Соколовський
Національний лісотехнічний університет України

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОГО ПРОЦЕСУ СУШІННЯ ДЕРЕВИНИ З УРАХУВАННЯМ ГРАНИЦЬ ФАЗОВИХ ПЕРЕХОДІВ

Наведено математичну модель тепломасоперенесення у капілярно-пористих тілах для сушіння з урахуванням руху зони випаровування. Отримано аналітичні розв'язки нелінійних задач тепломасоперенесення для нестаціонарних режимів сушіння. Досліджено вплив тривалості етапів режимів сушіння на температуру фазового переходу в деревині.

Ключові слова: математична модель, тепломасоперенесення, фазові переходи, процес сушіння.

The mathematical model of heat and mass transfer in capillary-porous bodies for drying with taking into account the zone of evaporation movement is given in the work. The analytical solutions of nonlinear problems of heat and mass transfer for unsteady regimes of drying are received. The effect of duration of drying regimes on the temperature of phase transition in wood is investigated.

Key words: mathematical model, heat and mass transfer, phase transitions, process of drying.

Актуальність досліджень

Вибір раціональних технологій конвективного сушіння матеріалів із забезпеченням максимальних інтенсивностей процесів та мінімальних енергетичних ресурсів є важливим завданням. Складність процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, зумовлена перебігом взаємозв'язаних фізичних явищ тепломасоперенесення і деформування в умовах високої мінливості структурних та фізичних властивостей гігроскопічних тіл.

Сучасний підхід до математичного моделювання тепломасоперенесення у процесі сушіння матеріалів ґрунтується на застосуванні теорії теплопровідності. Вона дає змогу використовувати класичні методи математичної фізики для розв'язання конкретних крайових задач. Однак для врахування фазових переходів, зокрема рухомої зони випаровування всередині матеріалу, необхідно застосовувати методи дослідження некласичної теплопровідності. Тому розроблення математичних моделей тепломасообінних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з урахуванням руху границь фазових переходів, дослідження закономірностей їх зміни уможливлюють вдосконалення наявних та розроблення нових технологій конвективного сушіння.

Аналіз досліджень

Механізм поглиблення зони випаровування висушуваного матеріалу вперше дослідив Т. Шервуд [1, 2]. Подальші теоретичні та експериментальні підтвердження поглиблення поверхні випаровування наведено у працях [1, 3–5]. Є декілька підходів до моделювання процесів тепломасоперенесення у матеріалах під час сушіння з урахуванням руху поглиблення зони випаровування. Для деяких матеріалів критерій фазового переходу, що змінюється за координатою тіла, враховується у граничних умовах.

За іншого підходу моделювання процесу видалення вологи розглядається у межах задачі Стефана [6, 7]. З математичного погляду крайові задачі тепломасоперенесення або узагальнені крайові задачі принципово відрізняються від класичних задач. Залежність характеристичного розміру області випаровування від часу ускладнює застосування класичних методів розділення змінних або інтегральних перетворень. Аналітичні дослідження здійснено для обмежених випадків наперед відомого закону руху границі, наприклад, лінійного або параболічного. Для цього використовували методи теплових потенціалів [8, 9], контурного інтегрування [10], степеневих рядів [8, 11], "миттєвих" власних функцій Грінберга [12]. Отримання аналітичних розв'язків крайової задачі узагальненого типу в області з рухомою границею фазового переходу за довільним законом зводилося до інтегро-диференціальних рівнянь, зокрема інтегральних рівнянь Вольтера другого роду зі складними ядрами. Тому встановлювалися лише якісні результати поведінки таких систем.

У цьому аспекті важливі роботи [6, 13]. Отримані функціональні перетворення дали змогу застосовувати класичні методи розділення змінних з урахуванням різних змін руху границі для відповідних граничних умов у класичних системах координат. Доволі ефективним методом розв'язання задач нагрівання та кінетики сушіння вологих матеріалів є метод диференційних рядів [8]. Він дає змогу отримати числово-аналітичні розв'язки крайової задачі тепломасоперенесення для граничних умов третього роду.

Для багатовимірних задач тепломасоперенесення з фазовим переходом використання числових методів з явним виділенням границі фазових переходів у багатьох випадках пов'язано з алгоритмічними труднощами та значними обчислювальними затратами. Зокрема, для знаходження наближеного розв'язку широкого застосування набули методи "наскрізного" розрахунку [7] з використанням узагальненого формування класичної задачі Стефана, у якій невідомою є не температура, а ентальпія. Для числової реалізації математичних моделей використовують різницеві схеми [14, 15] та їх різні модифікації.

Тому метою цієї роботи є побудова математичної моделі та дослідження процесів тепломасоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням руху зони випаровування для нестаціонарного режиму сушіння, заданого у вигляді полінома експоненціальних функцій. Крайова задача теплопровідності у випадку лінійної триетапної зміни агента сушіння досліджена у працях [16, 17].

Математична модель тепломасоперенесення з урахуванням границь фазового переходу

Розглянемо задачу тепломасоперенесення капілярно-пористої пластини завтовшки $2L$ ($-L \le z \le L$, z – координата) за дії на її границю конвективного нестаціонарного потоку тепла. Пластина віднесена до декартової системи координат. У випадку наявності дисперсії розмірів пор треба враховувати наявність осушеної, двофазної та рідинної зон. Пори відкриті й у початковий момент часу насичені рідиною. У процесі сушіння пластина контактує з газовим середовищем, яке є сумішшю сухого повітря та пари. В процесі конвективного сушіння тепло, яке підводиться агентом сушіння, витрачається на випаровування рідини, нагрівання матеріалу і подолання енергії зв'язку з матеріалом. З випаровуваною вологою тепло частково повертається у середовище. Швидкість обміну теплом і масою, якщо внутрішньодифузійний опір малий, залежить тільки від опору примежового шару агента сушіння. Товщина і гідродинамічний стан пластини залежать від відносної швидкості нагрітого повітря. Рівномірність та симетрія двостороннього процесу сушіння матеріалу створюються циркуляцією нагрітого повітря.

Математична модель процесу тепломасоперенесення у пластині під час сушіння з урахуванням зміни у часі границі фазового переходу L_m будується так.

Рівняння енергії має вигляд:

$$[\Pi(c_v r_v + c_a r_a) + (1-\Pi)c_s r_s]\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(l_c \frac{\partial T}{\partial z}\right) + F, \quad L_m \le z \le L\,,\ 0 \le L_m \le L, \tag{1}$$

де c_v, c_a, c_s – питомі теплоємності пари, повітря, деревного скелета; r_v, r_a, r_s – густини цих самих компонентів вологої пластини; F – внутрішнє джерело; Π – пористість матеріалу.

Якщо водяна пара в зовнішньому середовищі не є насиченою, то відбувається процес випаровування з парового простору пластини від її поверхні в глибину тіла. Приймемо, що пори мають однаковий розмір і знехтуємо механізмом плівкового масоперенесення. Вважаємо, що теплові умови на поверхнях пластини однакові й процес сушіння симетричний відносно серединної поверхні. В зв'язку з відсутністю дисперсії розмірів пор за радіусами процес сушіння відбувається однаково по всьому перерізу тіла. В процесі сушіння у пластині виникає зона осушених пор та пор, насичених рідиною. Межа контакту L_m цих зон поширюється в глибину пористої пластини.

Зазначимо, що сушіння не буває повним. У гідрофільних порах залишається волога у вигляді пристінкового шару (зв'язана волога). Механізм плівкового перенесення рідини, зумовленого градієнтом розклинювального тиску та явищем термоосмосу, не враховуємо. Вважаємо, що ці процеси набагато менше впливають, ніж процеси фазового переходу. В зоні сушіння у порах пластини є повітря та пара води. Надалі вважатимемо, що поперечний розмір пор суттєво більший за середню довжину вільного пробігу наявних молекул. Це дає змогу записати вирази для потоків повітря $\vec{j}_a$ та пари $\vec{j}_v$ двокомпонентної суміші в зоні сушіння виразами [18]: $\vec{j}_k = r_k \vec{u} - D' \vec{\nabla} r_k$, $k = a; v$, де D' – ефективний коефіцієнт бінарної дифузії в порах.

Потік повітря всередину пластини кількісно значно менший за потік пари назовні, зумовлений фазовим переходом "вода–пара". У зв'язку з цим надалі нехтуватимемо потоком повітря $\vec{j}_a$, приймаючи $\vec{j}_a = 0$. Надалі вважатимемо локальну зміну густини пари r_v сталою, тобто нехай $\partial r_v / \partial t = 0$. Згідно з [18] отримаємо рівняння балансу маси пари $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_v = 0$.

Вплив пористої структури деревної пластини враховується введенням у рівняння Стефана–Максвелла ефективних коефіцієнтів бінарної взаємодії. Система рівнянь Стефана–Максвелла доповнюється рівнянням фільтрації Дарсі з ефективними характеристиками в'язкості m_g та проникності K_g

$$u = -\frac{K_g}{m_g} \frac{\partial P_g}{\partial z} , \tag{2}$$

де P_g – тиск газу в порах.

Приймемо, що для газової суміші виконується рівняння стану ідеального газу

$$P_g = \left(\frac{r_a}{M_a} + \frac{r_v}{M_v} \right) RT , \tag{3}$$

де M_a, M_v – молярна маса повітря і пари; R – газова стала.

Рівняння конвективного масоперенесення у пористій пластині в області $L_m < z < L$ набуде вигляду

$$r_a \frac{K_g}{m_g} \frac{\partial P}{\partial z} + D' \frac{\partial r_a}{\partial z} = 0 , \ \frac{\partial}{\partial y} \left(r_v \frac{K_g}{m_g} \frac{\partial P}{\partial z} + D' \frac{\partial r_v}{\partial z} \right) = 0 \tag{4}$$

Використовуючи рівняння стану для газової суміші та закон Дарсі (2), запишемо рівняння Стефана–Максвелла відносно функцій r_a, r_v – густин повітря та пари

$$r_a \frac{K_g}{m_g} \vec{\nabla} \left(\frac{r_a}{M_a} + \frac{r_v}{M_v} \right) RT + D' \vec{\nabla} r_a = 0 ,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left[r_v \frac{K_g}{m_g} \vec{\nabla} \left(\frac{r_a}{M_a} + \frac{r_v}{M_v} \right) RT + D' \vec{\nabla} r_v \right] = 0 , \tag{5}$$

де K_g – коефіцієнт проникності, залежний від радіуса та форми пор; m_g – коефіцієнт динамічної в'язкості газу.

Записана нелінійна система диференціальних рівнянь (5) чинна в області сушіння пор, яка обмежена граничною поверхнею (S) та поверхнею (S^*), що визначається координатою L_m.

Для подальших досліджень приймемо [2], що на рухомій поверхні (S^*) $z = L_m$ густину пари можна взяти такою, що дорівнює густині насиченої пари, тобто

$$r_v = r_{vn} \text{ на поверхні } z = L_m . \tag{6}$$

Умови на поверхнях $z = L$ газової зони запишемо так:

$$r_v \frac{K}{m_g}\frac{\partial P}{\partial z} + D'\frac{\partial r_v}{\partial z} = -j\,,\; r_a = r_{a0} \text{ на поверхні } z = L\,, \tag{7}$$

де $j = \tilde{b}\left(r_v - r_{v0}\right)$; $\tilde{b}$ – коефіцієнт масообміну. Оскільки задача масоперенесення надалі розв'язується у квазістаціонарному формулюванні (для атмосферного тиску середовища сушіння), а T_m - температура фазового переходу залежна від тиску насичення, то вважатимемо $T_m = f(P_n)$, де P_n – тиск насиченої пари.

Рівняння балансу енергії на рухомій межі фазових переходів $z = L_m$ запишемо у вигляді:

$$-l_c \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=L_m+0} = r_k \frac{K_g}{m_g}\frac{\partial P_g}{\partial z}\Big|_{z=L_m+0}\,, \tag{8}$$

$$T = T_m\,, \tag{9}$$

де l_c – теплопровідність висушеної зони, T_m – поки що не відома температура фазового переходу, яка залежить від тиску насиченої пари P_n.

Лінеаризоване рівняння стану на рухомій межі $z = L_m$ фазових переходів: $T_m = T_{mk} + a_{mk}P_n$, де $T_{mk} = \frac{9T_kV_k}{8V}, a_{mk} = \frac{3T_kV}{8V_k}$, T_k, V_k критична температура та тиск. Зокрема, в роботі [18] $T_m = 83 + 16\cdot 10^{-5}P_n$. В інших випадках коефіцієнти T_{mk}, a_{mk} визначаються з температурних режимів сушіння конкретного матеріалу. Граничні умови на границі $z = L$ виражають теплообмін між поверхнями пластини і сушильним агентом за законом Ньютона

$$l_c \frac{\partial T}{\partial z} + \tilde{a}\left[T - T_a(t)\right] = 0\,, \tag{10}$$

де $\tilde{a}$ – коефіцієнт теплообміну; $T_a(t)$ – змінна в часі температура агента сушіння. Функцію $T_a(t)$ можна подати у вигляді полінома від експоненціальних функцій

$$T_a(t) = T_1 + (T_2 - T_1)\sum_{i=1}^{N}\left(a_i e^{-b_i t}\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{N}\left(a_i e^{-b_i t}\right). \tag{11}$$

Тут для зручності перепозначено: $a_0 = T_1$, $a_i = (T_2 - T_1)a_i$; $D' = D^1{}_{ij} = \left(1/D_i^{\infty} + \left(1 - a_{ij}z_i\right)/D_{ij}\right)^{-1}$; $D^1{}_{va} = D^1{}_{av} = D'$ – ефективний коефіцієнт дифузії; $D_{va} = D_{av} = D_{ij}$ – ефективний бінарний коефіцієнт дифузії у макропорах; другий доданок у виразі $D_v^{\infty} = D^{\infty}$ враховує ефект течіння Кнудсена пари в мікропорах. Параметри a_i, b_i $(i = \overline{1, N})$ визначаються апроксимацією конкретного температурного режиму агента сушіння.

В початковий момент температура пластини задовольняє умову

$$T(t = 0) = f(z)\,, \tag{12}$$

де $f(z)$ – функції температури для періодів сталої та спадної швидкостей сушіння.

Визначимо відносну вологість W_m пористої пластини як відношення маси m_L рідини в ній у момент часу t до маси m_{Ln} рідини в момент часу $t = 0$ (насичення вологою)

$$W_m = \frac{m_L}{m_{Ln}} = \frac{\Pi L_m S r_L}{\Pi L S r_L} = \frac{L_m}{L} = \bar{z}_m, \tag{13}$$

де S – площа пор; r_L – густина води. Витрачена під час сушіння маса Δm рідини визначається так

$$\Delta m = m_{Ln} - m_L = \Pi S r_L L(1 - \bar{z}_m). \tag{14}$$

Отже, відносна насиченість пор рідиною у капілярно-пористому матеріалі за умови прийняття моделі циліндричних капілярів без урахування дисперсії розмірів пор збігається з безрозмірною координатою межі розділу фаз “рідина–газ”.

Швидкість зміни маси рідини в пластині визначається потоком j пари з неї, тобто

$$d\Delta m / dt = j S. \tag{15}$$

Тоді рівняння руху межі розділу фазового переходу має вигляд:

$$\frac{d\bar{z}_m}{dt} = -\frac{j(\bar{z}_m)}{\Pi r_L L} \tag{16}$$

для початкової умови

$$\bar{z}_m = 1. \tag{17}$$

Рівняння (1)–(17) утворюють математичну модель, яка описує конвективний процес сушіння капілярно-пористого тіла (пластини) з урахуванням рухомої границі фазових переходів. Відзначимо нелінійність рівнянь у сформульованій математичній моделі.

Дослідження процесу тепломасоперенесення для нестаціонарного режиму агента сушіння

У рівнянні теплопровідності (1) математичної моделі перейдемо до безрозмірної системи координат. Використаємо заміну $t = a_T t / L^2, \bar{z} = z / L^1$, $\bar{z}_m = L_m / L$, де $\bar{z}_m$ – безрозмірна координата межі фазового переходу. Рівняння теплопровідності набуде вигляду:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\bar{z}, t) = \frac{\partial^2 T(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}^2} + F, \tag{18}$$

де $F = \dfrac{L^2 W_1}{a_T C r}$ – внутрішнє джерело; $a_T = l_c / (\Pi[(1 - \bar{z}_m)(C_v r_v + C_a r_a)] + (1 - \Pi) C_s r_s)$.

Граничні умови на границі $\bar{z} = 1$ будуть такі:

$$\partial T / \partial \bar{z} + H_T [T - T_a(t)] = 0, \ H_T = \tilde{a} L / l, \tag{19}$$

$\tilde{a}$ – коефіцієнт теплообміну, а на межі фазового переходу $\bar{z} = \bar{z}_m$ приймаємо, що

$$T = T_m. \tag{20}$$

Побудуємо розв’язок (18)–(20) для початкової умови: $T(\bar{z}, 0) = f(\bar{z})$.

Розв’язок рівняння теплоперенесення шукаємо у вигляді $T = T_1 + T^*$, де $T_1 = c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-b_i t}$ представляє розв’язок рівняння теплопровідності, який задовольняє граничні умови задачі без врахування початкової умови, а T^* є розв’язком рівняння теплопровідності, яке задовольняє початкову умову й однорідні граничні умови. Підставимо цей вираз у рівняння (18) і прирівняємо подібні члени в рівнянні та крайових умовах (19), (20) так, щоб величини c_0, c_i задовольнили рівняння та крайові умови, а функція T^* – нульові граничні умови та підправляли початкову умову. Тоді, для знаходження c_0 і c_1 $(i = \overline{1, n})$, отримаємо диференційні рівняння:

$$d^2 c_0 / d\bar{z}^2 = 0, \; d^2 c_i / d\bar{z}^2 + b_i c_i = 0, \tag{21}$$

які задовольняють умови:

$$\partial c_0(1)/\partial\bar{z} + H_T[c_0(1) - a_0] = 0, \; c_0(\bar{z}_m) = T_m;$$
$$\partial c_i(1)/\partial\bar{z} + H_T[c_i(1) - a_i] = 0, \quad c_i(\bar{z}_m) = 0. \tag{22}$$

Для знаходження T^* отримаємо крайову задачу:

$$\partial^2 T^*(\bar{z},t)/\partial\bar{z}^2 = \partial T^*(\bar{z},t)/\partial t \; ; \tag{23}$$
$$\partial T^*(1,t)/\partial\bar{z} + H_T T^*(1,t) = 0; \; T^*(\bar{z}_m,t) = 0;$$
$$T^*(\bar{z},0) = f(\bar{z}) - c_0(\bar{z},0) - \sum_{i=1}^{n} c_i(\bar{z},0). \tag{24}$$

Для побудови розв'язку крайової задачі (23)–(24) використаємо функцію впливу задачі (18)–(20) з однорідними граничними умовами за відсутності функції внутрішнього джерела. Функція впливу має вигляд

$$G(\bar{z},\bar{z}_m,x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2H_T \frac{\left[\dfrac{\sin m_n(\bar{z}-\bar{z}_m)}{m_n}\right]\left[\cos m_n(1-x) + H_T\dfrac{\sin m_n(1-x)}{m_n}\right]e^{-m_n^2 t}}{\cos m_n(1-\bar{z}_m)\left[\left(m_n^2 + H_T^2\right)(1-\bar{z}_m) + H_T\right]}, \tag{25}$$

де m_n – корені трансцендентного рівняння $tg m_n(1-\bar{z}_m) = -m_n / H$.

Вирази для c_0, c_i шукаємо у вигляді $c_0 = c_0 + d_0\bar{z}$; $c_i = c_i \cos\sqrt{b_i}\,\bar{z} + d_i \sin\sqrt{b_i}\,\bar{z}$.

Якщо граничні умови задовольняють вирази для c_i (22), отримаємо залежності для знаходження невідомих величин c_0, d_0, c_i, d_i $(i = \overline{1,n})$:

$$c_0 = T_m - H_T \frac{a_0 - T_m}{[H_T(1-\bar{z}_m)+1]}\bar{z}_m, \; d_0 = H_T \frac{a_0 - T_m}{[H_T(1-\bar{z}_m)+1]};$$
$$c_i = \frac{H_T\left[\sin\sqrt{b_i}\,(1-\bar{z}_m) - a_i\cos\sqrt{b_i}\,\bar{z}_m\right]}{\sqrt{b_i}\cos\sqrt{b_i}\,(1-\bar{z}_m)}\frac{\sin\sqrt{b_i}\,(1-\bar{z}_m)}{\cos\sqrt{b_i}\,\bar{z}_m},$$
$$d_i = -\frac{H_T\left[\sin\sqrt{b_i}\,(1-\bar{z}_m) - a_i\cos\sqrt{b_i}\,\bar{z}_m\right]}{\sqrt{b_i}\cos\sqrt{b_i}\,(1-\bar{z}_m)}. \tag{26}$$

Зазначимо, що c_i, d_i є функціями рухомої координати $\bar{z}_m$ фазового переходу.

Тоді

$$c_0 = T_m + H_T \frac{a_0 - T_m}{[H_T(1-\bar{z}_m)+1]}(\bar{z}-\bar{z}_m); \; c_i = C_i \frac{\sin\sqrt{b_i}(\bar{z}-\bar{z}_m)}{\sqrt{b_i}}, \text{ де } (i = \overline{1,n}). \tag{27}$$

З (27) видно, що $c_i(\bar{z}_m) = 0$ для $i = 1,2 \ldots N$.

Функцію $\sum_{i=1}^{N} c_i(x)$ запишемо у вигляді $\sum_{i=1}^{N} c_i(x) = \sum_{i=1}^{N} C_i \dfrac{\sin\sqrt{b_i}(x-\bar{z}_m)}{\sqrt{b_i}}$, де

$$C_i\left(\sqrt{b_i},\bar{z}_m\right) = \frac{H_T\left[\sin\sqrt{b_i}\,(1-\bar{z}_m) - a_i\cos\sqrt{b_i}\,\bar{z}_m\right]}{\cos\sqrt{b_i}\,(1-\bar{z}_m)\cos\sqrt{b_i}\,\bar{z}_m}. \tag{28}$$

Для знаходження $T^*(\bar{z}, \bar{z}_m, t)$ використаємо функцію (25), що задовольняє умови $T_m(\bar{z}_m,t) = 0$, $T_a(1,t) = 0$. Розв'язок крайової задачі (23), (24) отримаємо за допомогою функції впливу (25), якщо замість $f(\bar{z})$ взяти

$$f_1(\bar{z}) = f(\bar{z}) - \bar{T}_0, \text{ де } \bar{T}_0 = \sum_{i=0}^{N} c_i(\bar{z}). \tag{29}$$

Тоді згідно з (21)–(22) отримаємо

$$T^*(\bar{z},t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin m_n(\bar{z}-\bar{z}_m)}{m_n} \exp\left(-m_n^2 t\right), \tag{30}$$

де

$$A_n = \frac{1}{\Delta_n(m_n,\bar{z}_m)} \int_{\bar{z}_m}^{1} f_1(\bar{z}) \left[\cos m_n(1-\bar{z}) + \frac{H}{m_n}\sin m_n(1-\bar{z})\right] d\bar{z}. \tag{31}$$

$$\Delta_n(m_n,\bar{z}_m) = \cos m_n(1-\bar{z}_m)\left[\left(m_n^2 + H^2\right)(1-\bar{z}_m) + H\right]$$

Для знаходження $T^*(\bar{z},\bar{z}_m,t)$ використаємо розв'язок (21), що задовольняє умови $T_m(\bar{z}_m,t) = 0$,$T_a(1,t) = 0$. Якщо початковий розподіл температури рівномірний, тобто $T(\bar{z},0) = T_0$, то, з урахуванням (21), внесок початкової температури в $T^*(\bar{z},\bar{z}_m,t)$ матиме вигляд:

$$T_0^*(\bar{z},\bar{z}_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin m_n(\bar{z}-\bar{z}_m)}{m_n} A_n^*(\bar{z}_m) e^{-m_n^2 t}, \tag{32}$$

$$A_n^* = \frac{2T_0 H_T}{\Delta_n}\left\{\frac{\sin m_n(1-\bar{z}_m)}{m_n} - \frac{H_T}{m_n^2}\left[\cos m_n(1-\bar{z}_m) - 1\right]\right\} \tag{33}$$

Внесок у $T^*(\bar{z},\bar{z}_m)$ від суми $\sum_{i=1}^{N} c_i(\bar{z})$ подамо у вигляді

$$T_j^{\ *} = -\int_{\bar{z}_m}^{1} \sum_{i=1}^{N} c_i(x) \times G(\bar{z},\bar{z}_m,x,t)\,dx =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-m_n^2 t}\left[\frac{\sin m_n(\bar{z}-\bar{z}_m)}{m_n}\right] \int_{\bar{z}_m}^{1} \left[\cos m_n(1-x) + H_T \frac{\sin m_n(1-x)}{m_n}\right] \sum_{i=1}^{N} C_i \sin\sqrt{b_i}(x-\bar{z}_m)\,dx,$$

де

$$B_n = \frac{2H_T}{\cos m_n(1-\bar{z}_m)\left[\left(m_n^2 + {H_T}^2\right)(1-\bar{z}_m) + H_T\right]}; \tag{34}$$

$$\int_{\bar{z}_m}^{1} \left[\cos m_n(1-x) + H_T \frac{\sin m_n(1-x)}{m_n}\right] \sum_{i=1}^{N} C_i \sin\sqrt{b_i}(x-\bar{z}_m)\,dx = Z_{n1} - Z_{n2},$$

де $Z_{n1} = \sum_{i=1}^{N} C_i \left\{-\frac{\cos\left[\sqrt{b_i}(1-\bar{z}_m)\right]}{2\left(\sqrt{b_i}-m_n\right)} - \frac{\cos\left[\sqrt{b_i}(1-\bar{z}_m)\right]}{2\left(\sqrt{b_i}+m_n\right)} + \frac{\cos\left[m_n(1-\bar{z}_m)\right]}{2\left(\sqrt{b_i}-m_n\right)} + \frac{\cos\left[m_n(1-\bar{z}_m)\right]}{2\left(\sqrt{b_i}+m_n\right)}\right\}$,

$$Z_{n2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{C_i H_T}{m_n}\left\{\frac{\sin\left[\left(\sqrt{b_i}(1-\bar{z}_m)\right)\right]}{2\left(\sqrt{b_i}-m_n\right)-} - \sin\frac{\left(\sqrt{b_i}(1-\bar{z}_m)\right)}{2\left(\sqrt{b_i}+m_n\right)} - \frac{\sin\left[\left(m_n(1-\bar{z}_m)\right)\right]}{2\left(\sqrt{b_i}-m_n\right)} + \frac{\sin\left[\left(m_n(1-\bar{z}_m)\right)\right]}{2\left(\sqrt{b_i}+m_n\right)}\right\}$$

Для завершення процесу сушіння $\bar{z}_m = 0$ отримаємо $Z_n(0) = Z_{n1}(0) - Z_{n2}(0)$, де

$$Z_{n1}(0) = \sum_{i=1}^{N} C_i \left\{-\frac{\cos\left[\sqrt{b_i}\right]}{2\left(\sqrt{b_i}-m_n\right)} - \frac{\cos\left[\sqrt{b_i}\right]}{2\left(\sqrt{b_i}+m_n\right)} + \frac{\cos\left[m_n\right]}{2\left(\sqrt{b_i}-m_n\right)} + \frac{\cos\left[m_n\right]}{2\left(\sqrt{b_i}+m_n\right)}\right\},$$

$$Z_{n2}(0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{C_i H_T}{m_n}\left\{\frac{\sin\left[\left(\sqrt{b_i}\right)\right]}{2\left(\sqrt{b_i}-m_n\right)} - \sin\frac{\left(\sqrt{b_i}\right)}{2\left(\sqrt{b_i}+m_n\right)} - \frac{\sin\left[\left(m_n\right)\right]}{2\left(\sqrt{b_i}-m_n\right)} + \frac{\sin\left[\left(m_n\right)\right]}{2\left(\sqrt{b_i}+m_n\right)}\right\}.$$

$$Z_n(1) = (Z_{n1}(1) - Z_{n2}(1) = 0$$

$$Z_{n1}(1) = \sum_{i=1}^{N} C_i \left\{ -\frac{1}{2\left(\sqrt{b_i} - m_n\right)} - \frac{1}{2\left(\sqrt{b_i} + m_n\right)} + \frac{1}{2\left(\sqrt{b_i} - m_n\right)} + \frac{1}{2\left(\sqrt{b_i} + m_n\right)} \right\} = 0,$$

$$Z_{n2}(1) = \sum_{i=1}^{N} \frac{C_i H_T}{m_n} \left\{ \frac{\sin 0}{2\left(\sqrt{b_i} - m_n\right) -} - \frac{\sin 0}{2\left(\sqrt{b_i} + m_n\right)} - \frac{\sin 0}{2\left(\sqrt{b_i} - m_n\right)} + \frac{\sin 0}{2\left(\sqrt{b_i} + m_n\right)} \right\} = 0$$

$$T_c{}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin m_n(\bar{z} - \bar{z}_m)}{m_n} Z_n(\bar{z}_m) e^{-m_n t}, \qquad (35)$$

$$Z_n(\bar{z}_m) = Z_{n1} - Z_{n2},$$

Температуру за нестаціонарного конвективного нагрівання (11) можна записати

$$T(\bar{z}, t) = c_0(\bar{z}) + \sum_{i=1}^{N} \left[c_i(\bar{z}) e^{-b_i t} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin m_n(\bar{z} - \bar{z}_m)}{m_n} Z_n(\bar{z}_m) e^{-m^2{}_n t}, \qquad (36)$$

де

$$Z_n(\bar{z}_m) = \frac{2T_0 H_T}{\Delta_n} \left\{ \frac{\sin m_n(1 - \bar{z}_m)}{m_n} - \frac{H_T}{m_n^2} \left[\cos m_n(1 - \bar{z}_m) - 1 \right] \right\} + (Z_{n1} - Z_{n2}). \qquad (37)$$

При цьому $T^* = T_0^* + T_c^*$ задовольняє умови $T^*(\bar{z}_m, \bar{z}_m) = T^*(\bar{z}_m, 1) = 0$.

Формула (36) дає змогу обчислити значення температури в довільній точці за товщиною пластини і в довільний момент часу залежно від координати фазового переходу.

Дослідження процесу масоперенесення для симетричного конвективного сушіння

Вважаємо, що теплові умови на поверхнях пластини однакові й процес сушіння симетричний відносно серединної поверхні. В зв’язку з симетрією задачі проведемо дослідження для однієї з половин пластини. Розглянемо математичну модель масоперенесення (5)–(7). Введемо безрозмірні змінні $r_a = r_{a0} \bar{r}_a$, $r_v = r_n \bar{r}_v$, $z = L\bar{z}$ для заданої температури середовища сушіння $T_c = \frac{1}{t_\Pi} \int_0^{t_\Pi} \int_0^1 T d\bar{z} dt$, де r_{ao} – густина повітря на зовнішніх стінках пластини. Проінтегрувавши друге рівняння системи (5), отримаємо:

$$\frac{d\bar{r}_a}{d\bar{z}} + b\frac{d\bar{r}_v}{d\bar{z}} + a\frac{1}{\bar{r}_a}\frac{d\bar{r}_a}{d\bar{z}} = 0, \qquad (38)$$

$$\bar{r}_v \left(\frac{d\bar{r}_a}{d\bar{z}} + b\frac{d\bar{r}_v}{d\bar{z}} \right) + a\frac{d\bar{r}_v}{d\bar{z}} + b^* a(\bar{r}_{v1} - \bar{r}_{v0}) = 0, \qquad (39)$$

Граничні умови (6), (7), (36), (37) набудуть вигляду

$$j = b' r_n(\bar{r}_{v1} - \bar{r}_{v0}),\ \bar{r}_a = 1 \text{ на поверхні } \bar{z} = 1, \qquad (40)$$

$$\bar{r}_v = 1 \text{ на поверхні } \bar{z} = \bar{z}_m, \qquad (41)$$

де $a = \frac{D' M_a m_g}{K_g r_{a0} R T_c}$, $b = \frac{r_n}{r_{a0}} \frac{M_a}{M_v}$, $b^* = \frac{L b'}{D'}$.

Інтегруючи рівняння (38) по $\bar{z}$, отримуємо $\bar{r}_a + b\bar{r}_v + a \ln \bar{r}_a = C_1$.

Сталу інтегрування $C_1 = 1 + b\bar{r}_{v1}$ знайдено з другої умови (40), де $\bar{r}_{v1}$ – невідоме безрозмірне значення густини пари на поверхні $\bar{z} = 1$. Провівши лінеаризацію з урахуванням того, що потоком повітря в порах знехтувано, (тоді безрозмірна густина повітря в порах мало відрізняється від одиниці), отримуємо: $\frac{d\bar{r}_a}{d\bar{z}} = -\frac{b}{1+a}\frac{d\bar{r}_v}{d\bar{z}}$. Тоді рівняння (40) з урахуванням (41) запишеться так:

$$\frac{b}{(1+a)}\bar{r}_v\frac{d\bar{r}_v}{d\bar{z}} + \frac{d\bar{r}_v}{d\bar{z}} + b*(\bar{r}_{v1} - \bar{r}_{v0}) = 0.$$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд:

$$\frac{b}{(1+a)}\frac{\bar{r}_v^{\,2}}{2} + \bar{r}_v + b*(\bar{r}_{v1} - \bar{r}_{v0})\bar{z} = C_2, \tag{42}$$

де $C_2 = \frac{b}{(1+a)}\frac{1}{2} + 1 + b*(\bar{r}_{v1} - \bar{r}_{v0})\bar{z}_m$ – стала інтегрування, яка визначена з умови (41).

Безрозмірну густину пари за товщиною шару визначимо за формулою

$$\bar{r}_v(\bar{z}, \bar{z}_m) = -A + \sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{r}_{v1} - \bar{r}_{v0})(\check{z} - \bar{z}_m)}, \tag{43}$$

де $A = (1+a)/b;\ A_1 = -b*A;\ \ A_2 = (A+1)^2$.

Тиск пари в довільній точці $\bar{z}$ за товщиною пластини визначається за формулою:

$$P(\bar{z}, \bar{z}_m) = \left[-A + \sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{r}_{v1} - \bar{r}_{v0})(\check{z} - \bar{z}_m)}\right] r_n \frac{RT}{M_v}.$$

Тоді на поверхні пластини ($\bar{z} = 1$) виконується рівняння

$$\frac{b}{(1+a)}\frac{(\bar{r}_{v1}^{\,2} - 1)}{2} + \bar{r}_{v1} - 1 + b*(\bar{r}_{v1} - \bar{r}_{v0})(1 - \bar{z}_m) = 0.$$

Його розв’язок визначає величину безрозмірної густини пари. Позначимо $\bar{z}*_m = 1 - \bar{z}_m$. $\bar{z}*_m = W*_m$ – зміна відносної вологості в процесі сушіння. Фізично прийнятна вітка розв’язку має вигляд:

$$\bar{r}_{v1} = -(A + A_1\bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3\bar{z}_m^* + A_1^2\bar{z}_m^{*2}}, \tag{44}$$

де

$$A_3 = 2A_1(A + \bar{r}_{v0}). \tag{45}$$

Якщо відома густина пари на стінці, згідно з умовою (39), величину потоку j подамо так:

$$j = H_m\left[-(a_1 + A_1\bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3\bar{z}_m^* + A_1^2\bar{z}_m^{*2}}\right], \tag{46}$$

де $a_1 = A + h_0;\ H_m = b' r_n$.

Визначимо відносну вологість W_m пористої пластини за формулою (13), (14), де

$$\Delta m_L = \Pi S r_L L(1 - \bar{z}_m) = \Pi S r_L L\bar{z}_m^* \tag{47}$$

– витрачена під час сушіння маса рідини.

З (46) отримуємо рівняння для визначення зміни відносної вологості в часі та рівняння руху межі розділу фаз рідина–газ

$$\frac{d\bar{z}*_m}{dt} = \frac{j(\bar{z}*_m)}{\Pi r_L L} = \frac{b r_n}{\Pi r_L L}\left[-(a_1 + A_1\bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3\bar{z}_m^* + A_1^2\bar{z}_m^{*2}}\right] \tag{48}$$

для початкової умови

$$\bar{z}_m^* = 0 \text{ для } t = 0. \tag{49}$$

Для розв’язання задачі Коші (48), (49) використаємо заміну змінних

$$\sqrt{A_2 + A_3\bar{z}_m^* + A_1^2\bar{z}_m^{*2}} = f + \bar{z}_m^* A_1. \tag{50}$$

Оскільки $\bar{z}_m^* = \dfrac{f^2 - U}{A_3 - 2fA_1}$ та $\dfrac{d\bar{z}_m^*}{df} = 2\dfrac{\left(-A_1 f^2 + A_3 f - A_1 A_2\right)}{\left(A_3 - 2A_1 f\right)^2}$, приведемо рівняння (48) до вигляду:

$$2\left(\frac{-A_1 f^2 + A_3 f - A_1 A_2}{\left(A_3 - 2A_1 f\right)^2}\right)\frac{df}{dt} = H\left(f - a_1\right). \tag{51}$$

Враховуючи, що $f - a_1 = \dfrac{2A_1 f - A_3}{A_1}$, останнє рівняння запишемо так:

$$4A_1\left(\frac{A_1 f^2 - A_3 f + A_1 A_2}{\left(2A_1 f - A_3\right)^3}\right)df = Hdt\ . \tag{52}$$

Загальний інтеграл рівняння (52) має вигляд:

$$\frac{1}{2A_1}\ln\left|-A_3 + 2A_1 f\right| + \frac{A_3^{\ 2} - 4A_1^{\ 2}A_2}{4A_1}\frac{1}{\left(-A_3 + 2A_1 f\right)^2} = H_m t + A_5\,, \tag{53}$$

де сталу інтегрування A_5 знаходимо з умови (52):

$$A_5 = \frac{1}{2A_1}\ln\left|-A_3 + 2A_1\sqrt{A_2}\right| + \frac{A_3 + 2A_1\sqrt{A_2}}{4A_1\left(A_3 - 2A_1\sqrt{A_2}\right)}. \tag{54}$$

З отриманих співвідношень можна визначити час, для якого відносна насиченість досягає значення $\bar{z}_m^*$. Він визначається за формулою:

$$t = \frac{\left\{\ln\left|\dfrac{2A_1 f - A_3}{2A_1\sqrt{A_2} - A_3}\right| + \dfrac{1}{2}\left[A_3^{\ 2} - 4A_1^{\ 2}A_2\right]\left[\dfrac{1}{\left(2A_1 f - A_3\right)^2} - \dfrac{1}{\left(2A_1\sqrt{f}A_2 - A_3\right)^2}\right]\right\}}{2H_m A_1}\ . \tag{55}$$

Повний час процесу сушіння визначають за формулою:

$$t_{\Pi} = \frac{1}{2H_m A_1^{\ 2}}\left\{\ln\left|\frac{f_0 - \left(A + \bar{r}_{v0}\right)}{\sqrt{A_2} - \left(A + \bar{r}_{v0}\right)}\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\left(A + \bar{r}_{v0}\right)^2 - \left(A + 1\right)^2\right]\left[\frac{1}{\left[f_0 - \left(A + \bar{r}_{v0}\right)\right]^2} - \frac{1}{\left[\sqrt{A_2} - \left(A + \bar{r}_{v0}\right)\right]^2}\right]\right\}, \tag{56}$$

де $f_0 = -A_1 + \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2 + A_3} = -A_1 + \sqrt{A_1^{\ 2} + \left(A + 1\right)^2 + 2A_1\left(A + \bar{r}_{v0}\right)}$.

З цього виразу видно, що час сушіння (55), та повний час сушіння (56) залежать від відносної насиченості парою середовища $\bar{r}_{v0}$ та приведеного коефіцієнта масообміну A_1. Мінімізуючи повний час осушення за цими параметрами та знаючи залежність коефіцієнтів масообміну від критерію Рейнольдса, можна визначити швидкість обдуву та насиченість вологою агента сушіння, які мінімізують час сушіння пористого тіла.

Висновки

Наведена одновимірна нестаціонарна математична модель процесу тепломасоперенесення для сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням границі поглиблення зони випаровування. Отримані аналітичні вирази для дослідження температурних і вологісних полів у висушуваній пластині в довільний момент часу залежно від координати фазового переходу та параметрів зміни агента сушіння.

Запропонована методика досліджень та встановлені закономірності процесу сушіння вологої пластини можуть бути використані для розроблення систем автоматизованого моделювання та аналізу таких процесів, а також для вибору раціональних технологій сушіння.

1. Лыков А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. − М.: Энергия, 1968. − 472 с. 2. Шервуд Т. К. Сушка твердых тел. – Гослесиздат., 1936. 3. Шубин Т. С. Сушка и тепловая обработка древесины. – М.: Лесная промышленность, 1990. – 336 с. 4. Гайвась Богдана. Математичне моделювання конвективного сушіння матеріалів з урахуванням механотермодифузійних процесів / Б. Гайвась // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології : наук. зб. – Львів : ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2010. – Вип. 12. – С. 9–37. 5. Гринчик Н. Н. Інтенсивність фазових переходів // Н. Н. Гринчик, В. А. Цурко // Инженерно-физический журнал. – 2002. – Т. 75, № 3. – С. 135–141. 6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнение математической физики: учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с. 7. Данилюк И. И. О задаче Стефана // Успехи математических наук, 1985, т.40, вып.5 (245), с.133–185. 8. Любов Б. Я. Метод решения краевых задач диффузии для областей с границей, движущейся по произвольному закону / Б. Я. Любов, Э. М. Карташов // Изд. вузов. Серия Физика. – 1970, № 12. – С.97–101. 9. Карташов Э. М. Метод решения обобщенных краевых задач уравнения теплопроводности в области с границей, движущейся по произвольному закону / Э. М. Карташов, Г. М. Бартенев, Б. Я. Любов // В кн.: Тепло и массоперенос. – Минск. – 1972, т.8 – С. 274–285. 10. Квальвассер В. И. Методы нахождения функции Грина краевых задач уравнения теплопроводности для отрезка прямой с равномерно движущимися границами / В. И. Квальвассер, Я. Ф. Рутнер // Докл. АН СССР. – 1964, т. 165, № 6. – С. 1273-1276. 11. Петухов Б. С. Теплообмен в ядерных энергетических установках / Б. С. Петухов, Л. Г. Генин, С. А. Ковалеви др. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 548 с. 12. Гринберг Г. А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях / Г. А. Гринберг // Прикладная математика и механика. – 1967, т.31, №2. – С. 393–403. 13. Дульнев Г. Н., Новиков В. В. Процессы переноса в неоднородных средах. – Л.: Энергоатомиздат, 1991, 248 с. 14. Галанин М. П., Савенков Е. Б. Методы вычислений. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: Учеб. пособие. – М.: Изд-во ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2006, 72 с. 15. Патанкар С. В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – 312 с. 16. Гайвась Б. І. Осушення пористих тіл в сушильних установках при м'яких режимах / Б. І. Гайвась, І. Б. Борецька // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. пр. – Львів: НЛТУ України. - 2011. Вип. 21.9 – С. 317–324. 17. Гайвась Б. Вплив режиму сушильного агента на осушення пористих тіл / Б. Гайвась, І. Борецька // Комп'ютерні технології друкарства. – 2011. – № 26. – Львів. – С. 231–240. 18. Дерягин Б. В. Поверхностные силы / Б. В. Дерягин, Чураев Н. В., Муллер В. М. – М: Наука, 1985. – 398 с.