

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПРИПОВЕРХНЕВИХ ПОРОЖНИН У ТВЕРДИХ ТІЛАХ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ІЧ-ТЕРМОГРАФІЇ

© Чекурін В., Сінькевич О., 2016

Розглянуто задачі ідентифікації приповерхневої еліптичної циліндричної порожнини у твердому тілі за даними, отриманими шляхом зондування стаціонарними тепловими потоками та вимірювання температурного поля поверхні з використанням техніки ІЧ-термографії. З використанням методу граничних елементів чисельно досліджено пряму задачу ідентифікації. На основі проведеного кількісного аналізу показано, що як інформативні параметри для ідентифікації можна вибирати значення максимуму та мінімуму збурення температурного поля за зондування зосередженими й однорідним тепловими потоками. З використанням виявлених інформативних параметрів обернену задачу ідентифікації сформульовано у вигляді нелінійної системи неявно заданих рівнянь.

Ключові слова: ідентифікація порожнин, теплове зондування, метод граничних елементів.

The problems for identification of a near-surface elliptically cylindrical tunnel cavity in a solid body with the use of the data, obtained by sounding the body with heat flows and measuring its surface temperature field, using the IR-thermography technique, have been considered in the paper. The direct identification problem has been formulated and numerically studied with the use of boundary element method. On this basis informative parameters have been detected. The maximum and minimum of the perturbation of temperature field caused by sounding the body with concentrated heat flows and uniform heat flow can be chosen as these informative parameters. With these identified parameters the inverse identification problem has been presented as a nonlinear system of implicit equations.

Key words: cavity identification, thermal sounding, boundary-element methods.

Вступ

Задачі неруйнівної ідентифікації структури твердих тіл посідають важливе місце у багатьох галузях прикладної науки і техніки. Відомі зокрема методи, які ґрунтуються на збудженні в об'єкті теплового процесу шляхом його нагрівання і вимірюванні температури поверхні [1–9]. Дані таких вимірювань використовують для формулювання обернених задач визначення структури та теплофізичних властивостей об'єкта. Так, у статті [2] запропоновано математичну модель і підхід до ідентифікації параметрів багат шарових тіл із використанням теплового зондування. Для розв'язування обернених задач за цим підходом тут застосовано дискретне перетворення Фур'є. У публікаціях [3–6] розглянуто гранично-елементний метод ідентифікації порожнин у довгому циліндрі, на основі даних і вимірюванні температури поверхні з використанням техніки ІЧ-термографії за зондування об'єкта зосередженими стаціонарними потоками тепла. За цим методом обернену задачу зводять до нелінійної неявно заданої системи рівнянь. Для розв'язування системи розроблено графічний [3] та ітераційний алгоритм, що ґрунтується на методі Гаусса–Ньютона [4–5]. Обидва алгоритми передбачають розв'язування відповідних прямих задач із використанням методу граничних елементів на кожній ітерації.

У статті [10] розроблено теоретичні засади і математичний апарат для термопружної ідентифікації кругової циліндричної порожнини у довгому циліндрі за локального нагріву об'єкта зовнішніми зосередженими стаціонарними потоками тепла. Як інформативні параметри іденти-

фікації тут використано температуру та компоненти термopружних переміщень зовнішньої поверхні.

У статті [11] розглянуто задачу ідентифікації приповерхневої кругової циліндричної порожнини у твердому тілі, розміри якого значно більші за діаметр порожнини. У цій статті розглянуто задачу ідентифікації приповерхневої тунельної еліптичної циліндричної порожнини.

Математична модель теплового зондування об'єкта

Розглянемо теплопровідний півпростір B , обмежений площиною $x_2 = 0$. Півпростір містить тунельну порожнину, обмежену поверхнею $\Gamma \otimes \mathbf{v}$, де $\Gamma \in x_1 O x_2$ – достатньо гладкий опуклий контур; \mathbf{v} – одинична нормаль до поверхні $x_1 O x_2$; x_1, x_2 – декартові координати. Геометрію контуру Γ визначає функція $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $s \in \mathfrak{R}$, яка залежить від скінченної кількості дійсних параметрів $b_1, b_2, \mathbf{K}, b_n$ ($n \in \square$).

Тіло нагріває зовнішній стаціонарний тепловий потік, який падає на поверхню $x_2 = 0$ тіла. Нормальна до поверхні $x_2 = 0$ складова інтенсивності потоку J_0 не залежить від координати в напрямку \mathbf{v} : $J_0 = J_0(x_1)$. Охолодження поверхні $x_2 = 0$ відбувається за механізмом конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температуру T_m якого задано. Поверхня $\Gamma \otimes \mathbf{v}$ порожнини теплоізолювана. За таких умов в тілі виникає стаціонарне двовимірне температурне поле $T(x_1, x_2)$.

Нехай X – пряма, яка збігається з віссю x_1 . Тоді зумовлене наявністю порожнини збурення стаціонарного температурного поля $\mathcal{P}(\boldsymbol{\eta}) = T(\boldsymbol{\eta}) - \bar{T}(\boldsymbol{\eta})$ на кривій $X \cup \Gamma$ визначає граничне інтегральне рівняння:

$$\frac{1}{2} \mathcal{P}(\boldsymbol{\eta}) + \int_X \left(\Phi(\boldsymbol{\eta}, \xi) + \frac{h}{k} \Theta(\boldsymbol{\eta}, \xi) \right) \mathcal{P}(\xi) d\xi + \int_\Gamma \Phi(\boldsymbol{\eta}, \xi) \mathcal{P}(\xi) d\xi = - \int_\Gamma \Phi(\boldsymbol{\eta}, \xi) \bar{T}(\xi) d\xi, \quad (1)$$

де $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(x_1, x_2) \in X \cup \Gamma$ – радіус-вектор довільної точки на кривій $X \cup \Gamma$.

Тут використано позначення: $\bar{T}(\boldsymbol{\eta})$ та $T(\boldsymbol{\eta})$ – температурне поле у тілі за відсутності та наявності порожнини; h – коефіцієнт конвективного теплообміну; k – коефіцієнт теплопровідності матеріалу; $\Theta(\boldsymbol{\eta}, \xi) \equiv \frac{1}{2p} (\ln(1/r(\boldsymbol{\eta}, \xi)))$, $r(\boldsymbol{\eta}, \xi) \equiv |\boldsymbol{\eta} - \xi|$, $\Phi(\boldsymbol{\eta}, \xi) \equiv \Theta(\boldsymbol{\eta}, \xi) / \partial \mathbf{n}(\xi)$; \mathbf{n} – зовнішня нормаль до $X \cup \Gamma$.

Температурне поле \bar{T} задовольняє на прямій X граничне інтегральне рівняння:

$$\frac{1}{2} \bar{T}(\boldsymbol{\eta}) + \int_X \left(\Phi(\boldsymbol{\eta}, \xi) + \frac{h}{k} \Theta(\boldsymbol{\eta}, \xi) \right) \bar{T}(\xi) d\xi = \int_X \Theta(\boldsymbol{\eta}, \xi) \left(\frac{J_0(\xi)}{k} + \frac{h}{k} T_m \right) d\xi \quad (2)$$

Рівняння (1)–(2) визначають математичну модель зондування тіла стаціонарними тепловими потоками

Пряма задача ідентифікації та гранично-елементний метод її розв'язування

Сформулюємо в межах цієї моделі пряму задачу ідентифікації геометричних параметрів порожнини за результатами вимірювання температури тіла на зовнішній поверхні $x_2 = 0$.

Нехай задані: параметри $b_1, b_2, \mathbf{K}, b_n$, які визначають геометрію порожнини, коефіцієнт теплопровідності k та коефіцієнт конвективного теплообміну h , функція розподілу зондувального теплового потоку $J_0(x_1)$, температура T_m зовнішнього середовища. Знайти: а) збурення температурного поля $\mathcal{P}(x_1; J_0; b_1, b_2, \mathbf{K}, b_n)$ на зовнішній поверхні тіла B , яке зумовлене наявністю порожнини; б) виявити інформативні параметри $F_1, F_2, \mathbf{K} F_m$ температурного поля на зовнішній поверхні $\mathcal{P}(x_1)$, які чутливі до змін геометричних параметрів $b_1, b_2, \mathbf{K}, b_n$.

Розв'язування прямої задачі зводиться до послідовного розв'язування граничних інтегральних рівнянь (1) та (2) та дослідження впливу значень параметрів $b_1, b_2, \mathbf{K}, b_n$ на характеристики температурного поля $T(x_1), x_1 \in X$.

Для розв'язування рівнянь (1) та (2) застосуємо метод граничних елементів [12]. В результаті отримаємо СЛАР виду [11]

$$\mathbf{M}_{(11)}\mathcal{U}_{(1)} + \mathbf{M}_{(12)}\mathcal{U}_{(2)} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_{(21)}\mathcal{U}_{(1)} + \mathbf{M}_{(22)}\mathcal{U}_{(2)} = \mathbf{V},$$

$$\mathbf{M}_{(11)}\bar{\mathbf{U}}_{(1)} = \bar{\mathbf{V}}. \quad (4)$$

Тут $\mathcal{U}_{(1)}, \mathcal{U}_{(2)}$ та $\bar{\mathbf{U}}_{(1)}$ – вектори вузлових значень функції u та \bar{u} на прямій X і контурі Γ , де $u = \mathcal{U} - T_m$ та $\bar{u} = \bar{T} - T_m$; $\mathbf{M}_{(11)}, \mathbf{M}_{(12)}, \mathbf{M}_{(21)}$ та $\mathbf{M}_{(22)}$ – матриці розмірностей $N \times N, N \times N_\Gamma, N_\Gamma \times N$ та $N_\Gamma \times N_\Gamma$, $\mathbf{V} = \Phi \cdot (\mathbf{M}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{V}})$, де \mathbf{M} та Φ – матриці розмірності, $\bar{\mathbf{V}} = \Theta \cdot (\mathbf{J} + (T_m h/k)\mathbf{I})$, Θ – матриця розмірності $N \times N$, \mathbf{J} – вектор вузлових значень функції густини зондувального потоку на прямій X , \mathbf{I} – одиничний вектор завдовжки N .

Інформативні параметри за зондування зосередженими тепловими потоками

Застосуємо гранично-елементну модель теплового зондування (3), (4) для дослідження інформативних параметрів ідентифікації порожнини. Як такі параметри можна вибирати ті чи інші характеристики температурного поля поверхні $x_2 = 0$ за заданого теплового потоку $J_0(x_1)$. З цією метою дослідимо залежність характеристик температурного поля поверхні від геометричних параметрів порожнини та зондувального потоку. Числове дослідження проведемо на основі розв'язків відповідних прямих задач, сформульованих у межах моделі (3), (4).

Обмежимося тут випадком еліптичної циліндричної порожнини, за якого її геометрія визначається координатами центру еліпса x_0, y_0 , його півосями a_0, b_0 та кутом α повороту осей стосовно осі x_2 . Задачу розглядатимемо у безрозмірних координатах, нормованих на параметр a_0 .

Розглянемо спочатку зондування зосередженим тепловим потоком, ширина якого не перевищує розмірів порожнини. Нормальну складову інтенсивності J_0 однорідно розподілено на відрізок $W(\mathbf{x}) = [x - w/2; x + w/2] \subset X$:

$$J_0(x_1, \mathbf{x}) = \begin{cases} j_0, & x_1 \in [x - w/2; x + w/2] \\ 0, & x_1 \notin [x - w/2; x + w/2]. \end{cases} \quad (6)$$

Тут $j_0 > 0$ — інтенсивність зондувального потоку; \mathbf{x} – параметр, який визначає положення зосередженого теплового потоку на осі x_1 : $\mathbf{x} \in \Lambda = [-L/2; L/2] \subset X$, де $L \geq a_0$.

За таких умов збурення $\mathcal{U}(x_1)$ температурного поля на зовнішній поверхні залежить від параметрів $j_0, \mathbf{x}, w, x_0, y_0, b_0, \alpha$: $\mathcal{U}(x_1) = \mathcal{U}(x_1; j_0, \mathbf{x}, w, b_0, x_0, y_0, \alpha)$. Тож змінюючи параметри j_0, \mathbf{x} та w зондувального потоку, кожного разу отримуватимемо інше температурне поле в тілі, а відтак і нові дані, які можна використати для ідентифікації параметрів порожнини.

Ввівши безрозмірні параметри $p \equiv (b_0/a_0)$ і $q \equiv (y_0/a_0)$ та задавшись значеннями $L = 40$, $k = 1.15$, $w = 1$, $j_0 = 400$, $h = 2$, $T_m = 300$, провели розрахунок розподілів збурення $\mathcal{U}(x_1)$ вздовж прямої X для різних значень p, q та α за зондування зосередженим потоком з різними значеннями координати його центру $\mathbf{x} \in \{-10 + 2i, i = 0, 1, \mathbf{K}, 10\}$. На рис. 1, 2, наприклад, наведено результати цих розрахунків для фіксованих значень $p = 0.5$, $q = -3.5$.

З проведених кількісних досліджень випливає, зокрема, що значення координати максимуму збурення температурного поля $x_{\max} = \arg \max_{x_1} (\mathcal{T}(x_1, x))$ мало змінюється зі зміною значення $x \in [-10, 10]$. Максимум збурення $T_{\max} = \max_{x_1} (\mathcal{T}(x_1, x))$ зі зміною x досягає свого максимуму $T_{\max}^c = \max_x \max_{x_1} (\mathcal{T}(x_1, x))$ за значення $x = x_0$ у точці з координатою $x_{\max}^c = \arg \max_x \max_{x_1} (\mathcal{T}(x_1, x))$, яка практично не залежить від параметрів p , q та a і збігається з координатою x_0 центру порожнини

$$\arg \max_x \max_{x_1} (\mathcal{T}(x_1, x)) = x_0 \quad (7)$$

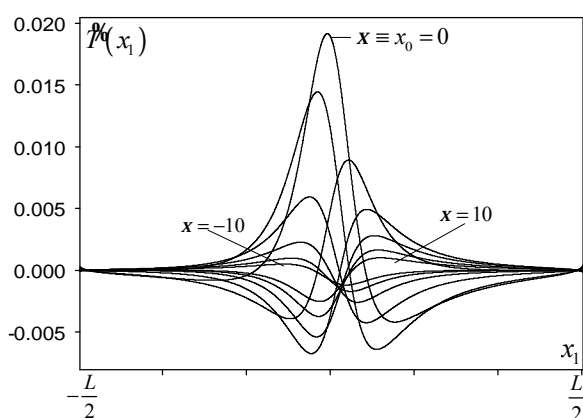


Рис. 1. Збурення температурного поля на зовнішній поверхні за зондування зосередженим потоком

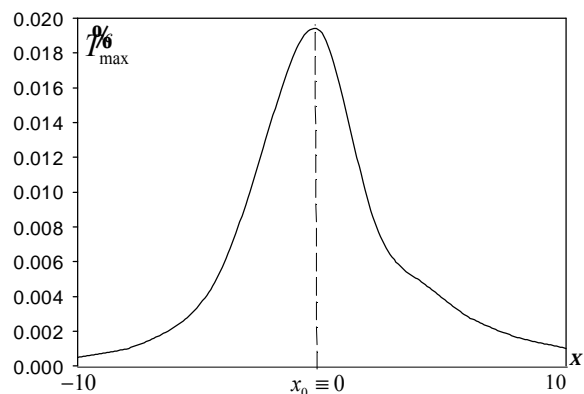


Рис. 2. Зміна значення максимуму збурення температурного поля зі зміною координати центру зондувального потоку

Отже, співвідношення (7) можна використати для ідентифікації параметра x_0 за даними вимірювання температурних полів поверхні за зондування зосередженими потоками за різних значень параметра x .

Проведені чисельні дослідження показали, що параметр $\mathcal{T}_{\max}^c = \max_x \max_{x_1} \mathcal{T}(x_1, x)$ істотно залежить від параметрів порожнини: $\mathcal{T}_{\max}^c = \mathcal{T}_{\max}^c(p, q, a)$. Тому визначене емпірично значення \mathcal{T}_{\max}^{ce} збурення температурного поля, зумовленого зосередженим тепловим потоком, можна використовувати як інформативний параметр для ідентифікації геометричних параметрів порожнини.

Інформативні параметри за зондування однорідним тепловим потоком

Проведемо дослідження температурного поля за зондування однорідним тепловим потоком виду (6), ширина якого w є значно більша від розмірів порожнини. Виберемо у формулі (6) $x \equiv x_0$, $w \equiv L$ та дослідимо вплив значень параметрів p , q і кута повороту a на збурення температурного поля поверхні $\mathcal{T}(x_1)$.

На рис. 3 та 4 показано результати розрахунку $\mathcal{T}(x_1)$, отримані за різних значень параметра $p \in \{0.1i, \forall i=1,2,\mathbf{K}10\}$ і фіксованих $q = -3.5$, $a = p/4$ та за різних значень параметра $q \in \{-6 + 0.5i, \forall i=1,2,\mathbf{K}10\}$ і фіксованих $p = 0.1$, $a = p/4$. На рис. 5 та 6 показано залежності $\mathcal{T}(x_1)$ за різних значень кута повороту $a \in \{p(i-1)/20, \forall i=1,2,\mathbf{K}21\}$ і фіксованих $p = 0.1$, $q = -3.5$.

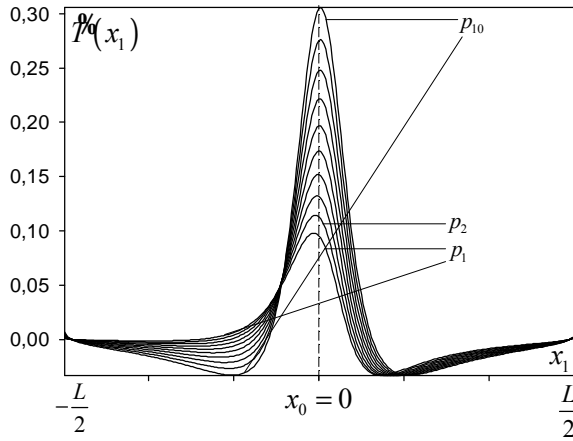


Рис. 3. Вплив параметра p на збурення температурного поля поверхні

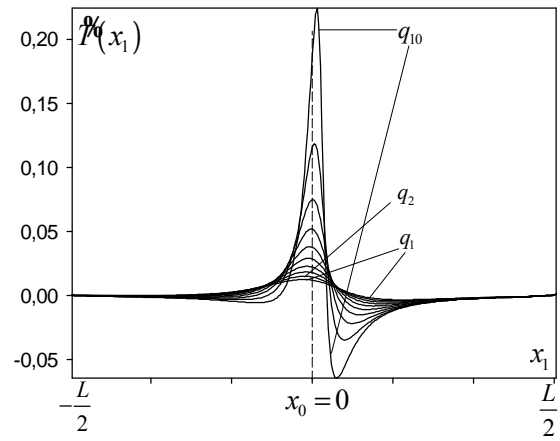


Рис. 4. Вплив параметра q на збурення температурного поля поверхні

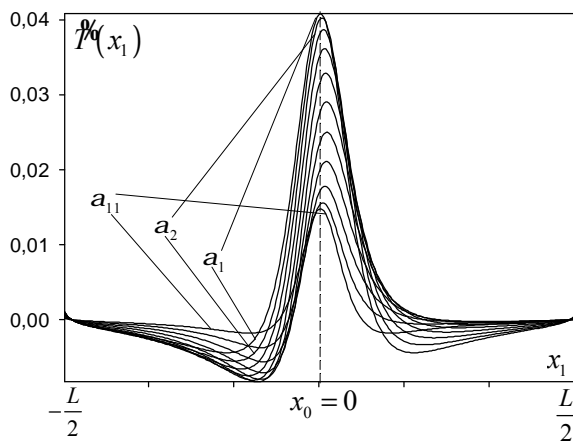


Рис. 5. Вплив параметра $a \in [0\mathbf{K}p]$ на збурення температурного поля поверхні

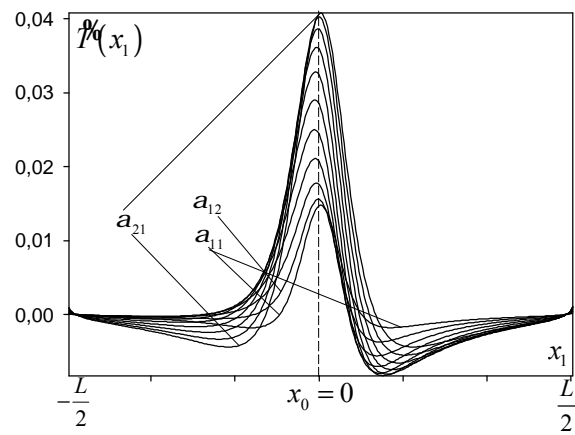


Рис. 6. Вплив параметра $a \in [p\mathbf{K}2p]$ на збурення температурного поля поверхні

Із проведених числових експериментів випливає, що значення максимуму $T_{\max}^{\%} = \max_{x_1}(T(x_1))$ та мінімуму $T_{\min}^{\%} = \min_{x_1}(T(x_1))$ температурного поля $T(x_1)$ істотно залежать від геометричних параметрів порожнини: $T_{\max}^{\%} = T_{\max}^{\%}(p, q, a)$, $T_{\min}^{\%} = T_{\min}^{\%}(p, q, a)$, тому емпірично визначені значення максимуму $T_{\max}^{\%}$ та мінімуму $T_{\min}^{\%}$ збурення температурного поля, яке виникає на поверхні тіла за зондування однорідним тепловим потоком, можна використати як інформативні параметри ідентифікації. На рис. 7–9 показано залежності параметрів $T_{\max}^{\%}$ та $T_{\min}^{\%}$ від параметрів p , q , a , які підлягають ідентифікації, отримані на основі проведених числових досліджень.

Рис. 7 ілюструє залежність інформативних параметрів $T_{\max}^{\%}$ та $T_{\min}^{\%}$ від параметрів $p \in [0.1\mathbf{K}1]$ та $q \in [-2, -2.5, \mathbf{K}, -6.5]$ за фіксованого $a = p/4$. На рис. 8 показано залежності $T_{\max}^{\%}$ та $T_{\min}^{\%}$ від кута $a \in [0\mathbf{K}p]$ за різних значень параметра $q \in \{-1 - 0.5i, \forall i = 1, 2, \mathbf{K}10\}$ за фіксованого $p = 0.1$, $a = p/4$. На рис. 9 показані залежності $T_{\max}^{\%}$ та $T_{\min}^{\%}$ від кута $a \in [0\mathbf{K}p]$ за різних значень параметра $p = \{0.1i, \forall i = 1, 2, \mathbf{K}, 10\}$ за фіксованого $q = -3.5$.

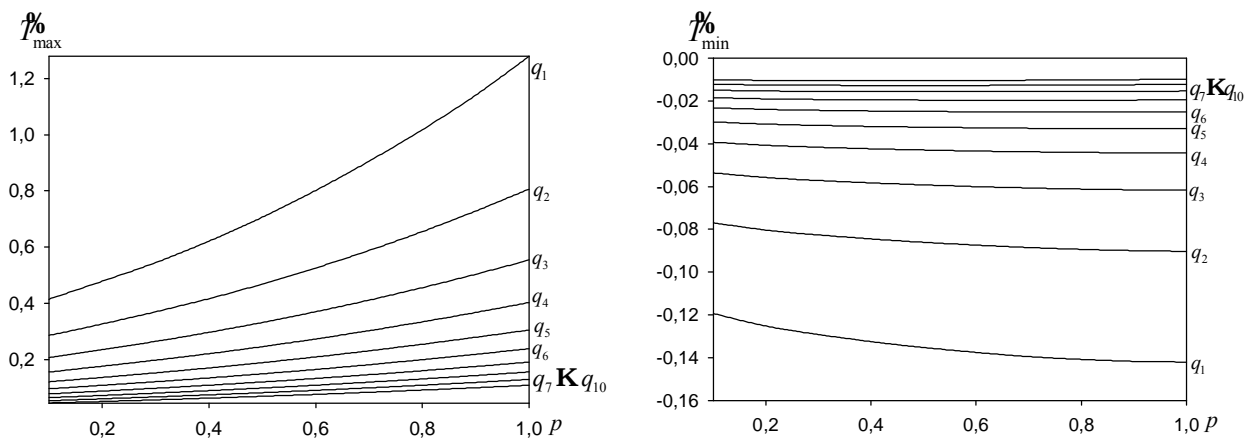


Рис 7. Залежності $\%_{\max}$ та $\%_{\min}$ від параметрів p і q за фіксованого $a = p/4$

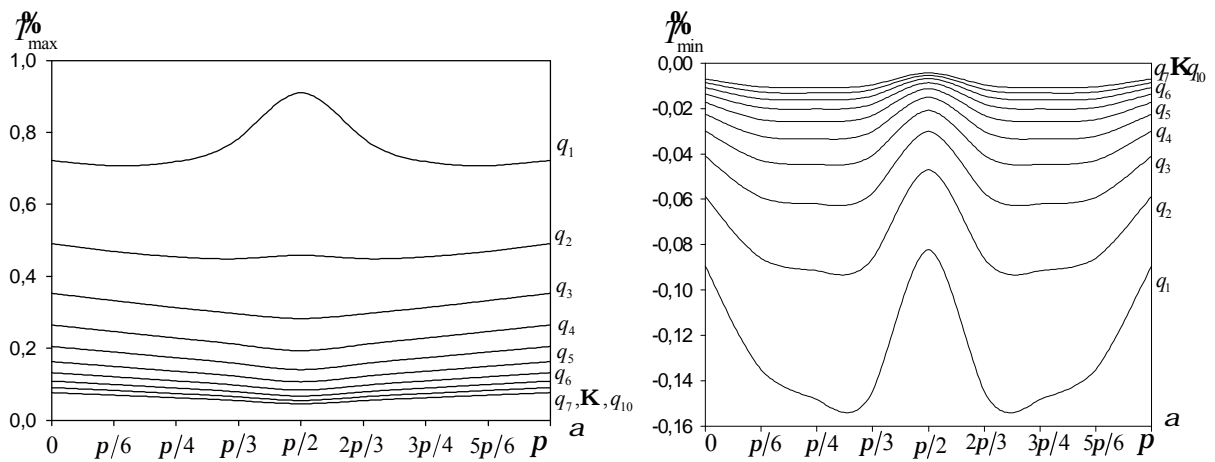


Рис 8. Залежності $\%_{\max}$ та $\%_{\min}$ від параметрів a і q за фіксованого $p = 0.1$

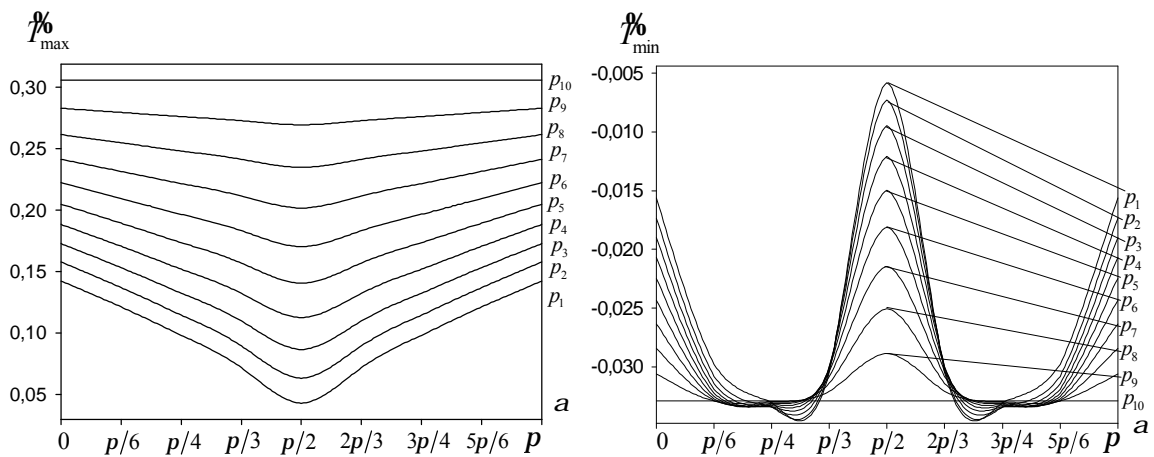


Рис 9. Залежності $\%_{\max}$ та $\%_{\min}$ від параметрів a і p за фіксованого $q = -3.5$

Обернена задача

Вважатимемо, що коефіцієнти теплопровідності k та конвективного теплообміну h є задані параметри, а також, що проекція контуру порожнини на вісь x_1 належить відрізку $[-L/2, L/2] \subset X$, який апріорі відомий.

Отримання вхідних даних для оберненої задачі ідентифікації геометричних параметрів порожнини передбачає такі кроки: 1) зондування тіла зосередженим тепловим потоком із заданими

інтенсивністю j_0^c та шириною w за різних значень координати центру цього потоку $x \in [-L/2, L/2]$ з одночасним вимірюванням, із використанням техніки ПЧ-термографії, розподілів температурного поля поверхні $T^{ce}(x_1, x)$, $x_1 \in [-L/2, L/2]$ для кожного значення x ; 2) розрахунок розподілів температурного поля поверхні тіла без порожнини $\bar{T}^c(x_1, x)$, шляхом розв'язування граничного інтегрального рівняння (2) для заданих значень параметрів теплового потоку j_0 , w та $x \in [-L/2, L/2]$ із використанням методу граничних елементів; 3) обчислення збурення температурного поля $\mathcal{P}^{ce}(x_1, x) = T^{ce}(x_1, x) - \bar{T}^c(x_1, x)$; 4) зондування тіла однорідним тепловим потоком інтенсивності j_0 , який покриває відрізок $[-L/2, L/2]$, з одночасним вимірюванням із використанням техніки ПЧ-термографії розподілу температурного поля поверхні $T^e(x_1)$; 5) розрахунок розподілу температурного поля поверхні тіла без порожнини $\bar{T}(x_1)$ шляхом розв'язування граничного інтегрального рівняння (2) для заданого значення параметра теплового потоку j_0 ; 6) обчислення збурення температурного поля поверхні $\mathcal{P}^e(x_1) = T^e(x_1) - \bar{T}(x_1)$.

Сформулюємо обернену задачу.

Дано: параметри теплових потоків для зосередженого j_0^c , w і однорідного j_0 зондування та відповідні їх емпіричні залежності $\mathcal{P}^{ce}(x_1, x)$ та $\mathcal{P}^e(x_1)$, де $x_1, x \in [-L/2, L/2]$.

Знайти: геометричні параметри порожнини x_0 , p , q , a .

Задачу розв'язуватимемо в два етапи.

На першому етапі, використовуючи формулу (7), визначимо абсцису x_0 центра порожнини

$$x_0 = \arg \max_x \max_{x_1} \mathcal{P}^{ce}(x_1, x). \quad (8)$$

На другому етапі визначимо параметри p , q та a за відомого параметра x_0 .

Для цього розглянемо функціонали:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\max}^{ce}(p, q, a) &= \max_x \max_{x_1} \mathcal{P}^{ce}(x_1, x_0; p, q, a), \\ \mathcal{P}_{\max}^{ce}(p, q, a) &= \max_{x_1} \mathcal{P}^{ce}(x_1; p, q, a), \quad \mathcal{P}_{\min}^{ce}(p, q, a) = \min_{x_1} \mathcal{P}^{ce}(x_1; p, q, a), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\mathcal{P}^{ce}(x_0, x; p, q, a)$ – збурення температурного поля поверхні за зосередженого зондування в точці $x = x_0$ та $\mathcal{P}^{ce}(x_1; p, q, a)$ – збурення температурного поля поверхні за однорідного зондування, знайдені із розв'язків відповідних прямих задач для заданих параметрів p , q , a . Обчислимо емпіричні значення інформативних параметрів $\mathcal{P}_{\max}^{ce} = \max_x \max_{x_1} \mathcal{P}^{ce}(x_1, x)$, $\mathcal{P}_{\max}^{ce} = \max_{x_1} (\mathcal{P}^{ce}(x_1))$ та $\mathcal{P}_{\min}^{ce} = \min_{x_1} (\mathcal{P}^{ce}(x_1))$ і утворимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\max}^{ce}(p, q, a) - \mathcal{P}_{\max}^{ce} = 0 \\ \mathcal{P}_{\max}^{ce}(p, q, a) - \mathcal{P}_{\max}^{ce} = 0 \\ \mathcal{P}_{\min}^{ce}(p, q, a) - \mathcal{P}_{\min}^{ce} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Розв'язуючи систему (10) знайдемо параметри порожнини p , q , a .

У працях [4, 5] розроблено ітераційні алгоритми, що ґрунтуються на методі Гаусса–Ньютона для розв'язування неявно означених систем нелінійних рівнянь виду (10), які передбачають розв'язування відповідних прямих задач із використанням методу граничних елементів на кожній ітерації.

Висновки

Розглянуто задачі ідентифікації геометричних параметрів приповерхневої тунельної еліптичної циліндричної порожнини у твердому тілі на основі даних, отриманих зондуванням поверхні тіла стаціонарними тепловими потоками та вимірювання температурного поля частини вільної поверхні тіла з використанням техніки ІЧ-термографії. Запропоновано математичну модель у вигляді двовимірних граничних інтегральних рівнянь, у межах якої сформульовані прямі задачі ідентифікації. Розглянуто випадки сканування вільної поверхні зосередженими потоками та зондування однорідним потоком. З використанням методу граничних елементів досліджено розв'язки прямих задач. Встановлено, що за сканування зосередженим тепловим потоком збурення температурного поля поверхні досягає свого максимуму за умови, що координата центру зондувального потоку збігається із абсцисою центру порожнини. Значення цього максимуму, а також значення максимуму і мінімуму збурення температурного поля поверхні, яке виникає за зондування однорідним потоком, істотно залежать від геометричних параметрів порожнини та її відстані від поверхні, тому їх можна використати як інформативні параметри ідентифікації. Це дало змогу звести обернену задачу ідентифікації до нелінійної неявно заданої системи рівнянь, яку можна розв'язувати, використовуючи ітераційний гранично-елементний метод, розроблений раніше.

Отримані результати можна використати для створення методів та засобів безконтактної ідентифікації внутрішньої структури твердих тіл із застосування техніки ІЧ-термографії.

У подальших дослідженнях слід розглянути можливість реалізації запропонованого підходу у випадку зондування нестаціонарними тепловими потоками.

1. Ищук И. Н. Идентификация свойств скрытых подповерхностных объектов в инфракрасном диапазоне волн / И. Н. Ищук, А. И. Фесенко, Ю. Ю. Громов. – М.: Машиностроение, 2008. – 184 с. 2. Чекурін В. До ідентифікації параметрів багатошарових тіл із використанням теплового зондування / В. Чекурін // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 9–20. 3. Чекурін В. Двовимірні стаціонарні задачі ідентифікації порожнин у циліндричних тілах на основі даних ІЧ-термографії / В. Чекурін, О. Сінькевич // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 15. – С. 105–115. 4. Чекурін В. Гранично-елементний метод для задач ідентифікації порожнин у циліндричному тілі з використанням локального нагріву та даних ІЧ-термографії / В. Чекурін, О. Сінькевич // Електроніка та інформ. технології. – 2013. – Вип. 3. – С. 122–132. 5. Чекурін В. Гранично-елементний метод розв'язування двовимірних стаціонарних задач теплової ідентифікації тунельної порожнини у довгому циліндрі / В. Чекурін, О. Сінькевич // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип. 11. – С. 108-117. 6. Чекурін В. Гранично-елементні алгоритми для задача ідентифікації порожнини в циліндричному тілі за температурним полем поверхні / В. Чекурін, О. Сінькевич // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2014. – Вип. 22. – С. 118-128. 7. Brett J. I. Selecting a Nondestructive Testing Method. Part VI: Infrared Inspection Techniques – Thermography // AMMTIAC Quarterly. – 3 (2). – P. 9–12. 8. Hamid Fazeli. Shape identification problems on detecting of defects in a solid body using inverse heat conduction approach / Hamid Fazeli, Masoud Mirzaei // Journal of Mech. Scie. and Tech. – 2012. – 26 (11). – P. 1681–1690. 9. Mohammad Javad Kazemzadeh-Parsi. Location and size identification of circular cavities via boundary temperature measurements using artificial neural network / Mohammad Javad Kazemzadeh-Parsi, Mohammad Amin Ahmadfard, Alireza Tahavvor // 19th Annual Conference on Mechanical Engineering-ESME2011, 10-12 May, 2011. – Birjand, Iran: The University of Birjand, 2011. 10. Чекурін В. Гранично-елементний метод термопружної ідентифікації порожнини в довгому циліндричному тілі / В. Чекурін, О. Сінькевич // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2013. – Вип. 3 (56). С. – 148-158. 11. Vasylyl Chekurin. Boundary element method for thermal identification of near-surface cylindrical cavity / V. Chekurin, O. Sinkevych // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 19. – С. 215–227. 12. Becker A. A. The boundary element method in engineering / A. A. Becker. – UK, 1992.