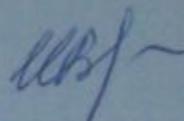


Міністерство освіти і науки України  
Національний університет "Львівська політехніка"

ШИМАНСЬКИЙ ВОЛОДИМИР МИХАЙЛОВИЧ



УДК 004.942; 674.047

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО  
ВОЛОГОПЕРЕНОСЕННЯ ТА В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ  
У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

**Автореферат**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Львів - 2016

**Дисертацією є рукопис.**

Робота виконана на кафедрі інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України Міністерства освіти і науки України, м. Львів

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, професор,  
**Соколовський Ярослав Іванович,**  
Національний лісотехнічний університет України,  
завідувач кафедри інформаційних технологій

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор  
**Гребеннік Ігор Валерійович,**  
Харківський національний університет  
радіоелектроніки,  
завідувач кафедри системотехніки

доктор технічних наук, старший науковий  
співробітник  
**Гайвась Богдана Іванівна,**  
Центр математичного моделювання  
Інституту прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
старший науковий співробітник відділу математичного  
моделювання нерівноважних процесів

Захист відбудеться 10 березня 2016 року о 16<sup>00</sup> годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.05 у Національному університеті «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12).

З дисертацією можна ознайомитися у науково-технічній бібліотеці Національного університету «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. Професорська, 1).

Автореферат розіслано 9 лютого 2016 р.

Учений секретар  
спеціалізованої вченої ради,  
доктор технічних наук, професор



Р.А. Бунь

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Технологічний процес сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, визначається зв'язком тепломасоперенесення та деформування. Матеріал деревини характеризується високою гідрофобністю, значною мінливістю фізико-механічних властивостей у напрямках анізотропії, складною природою просторових кореляцій, наявністю ефектів «пам'яті» та самоорганізації, що зумовлюються залишковими напруженнями. Розвиток напружень в умовах неізотермічного вологоперенесення та наявність залишкового напружено-деформівного стану є одними із основних стримувальних факторів інтенсифікації процесу сушіння. Велику роль у вирішенні цього завдання відіграє вдосконалення існуючих та побудова нових математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, що враховують складний комплекс взаємопов'язаних процесів та увесь спектр властивостей матеріалу.

Отримані принципово важливі науково-практичні результати не повною мірою відображають усю складність та багатогранність динаміки розвитку напружень та деформацій у деревині під час сушіння, зокрема у них не врахована складна природа просторових кореляцій, наявність ефектів «пам'яті» та самоорганізації у матеріалі. Тому побудова математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння є актуальним науковим завданням і дає змогу вирішувати завдання вибору раціональних параметрів цього технологічного процесу для підвищення якості висушеної деревини.

**Зв'язок роботи із науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана у межах науково-дослідних робіт Національного лісотехнічного університету України, а саме:

- “Математичне і програмне забезпечення автоматизації розрахунку багатofазних термодинамічних систем”, № держреєстрації 0110U000657, 2011-2012 рр.;
- “Програмно-алгоритмічні засоби та інформаційні технології автоматизації досліджень енерго-ефективних процесів сушіння деревини”, № держреєстрації 0113U001268, 2013-2014 рр.;
- “Математичне моделювання нерівноважних деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою”, № держреєстрації 0115U002316, 2015-2017 рр.

Дисертантові належать математичні моделі неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння, прикладне програмне забезпечення чисельної реалізації моделей, спосіб визначення повних напружень на поверхні висушеної деревини за величиною підведеного механічного зусилля до еталону.

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є розроблення математичних моделей та встановлення закономірностей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння.

Для досягнення поставленої мети передбачено розв'язання таких задач:

- синтезувати математичну модель неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння середовищ з фрактальною структурою;
- розробити математичну модель в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння;
- розробити алгоритм знаходження чисельного розв'язку систем диференціальних рівнянь з частинними похідними дробового порядку, що описують вказані вище моделі;
- розробити програмне забезпечення для чисельної реалізації моделей та апроксимації експериментальних даних повзучості деревини;
- провести аналіз та встановити закономірності тепломасоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння;
- розробити методику вимірювання напружень у висушеній деревині.

*Об'єкт дослідження* – процеси неізотермічного вологоперенесення та деформування у капілярно-пористих матеріалах під час сушіння.

*Предмет дослідження* – математичні моделі тепло- і вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння.

**Методи дослідження.** У дисертаційній роботі використано такі методи досліджень:

- методи матфізики, механіки спадкових середовищ та апарату інтегродиференціювання дробового порядку для розроблення математичних моделей;
- скінченно-різницеві та апроксимаційні методи для реалізації математичних моделей;
- методи об'єктно-орієнтованого аналізу та проектування програмного забезпечення;
- методи статистичного моделювання для перевірки адекватності моделей.

**Наукова новизна одержаних результатів полягає у такому:**

- розроблено нову математичну модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, яка дає можливість розширити її множину реалізацій, врахувати анізотропію змінних тепломеханічних характеристик, пружні, в'язко-пружні та залишкові деформації деревини, усадку гігроскопічних матеріалів, наявність ефектів «пам'яті» та самоорганізації, що притаманні середовищам з фрактальною структурою;
- вдосконалено двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з анізотропними теплофізичними характеристиками для нерегулярного та регулярного режимів процесу сушіння, яка на відміну від відомих, розширює множину її реалізацій шляхом врахування фрактальної структури та матеріалу;
- вперше досліджено двовимірне в'язко-пружне деформування деревини, як середовища з фрактальною структурою, в умовах неізотермічного вологоперенесення та встановлено закономірності впливу технологічних параметрів режиму сушіння, анізотропії змінних тепломеханічних характеристик на розподіли температури, вологовмісту і компонент напружено-деформованого стану, що дають змогу оцінити залишкові напруження у висушуваній деревині;

- вперше отримано скінченно-різницевої апроксимації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування деревини у процесі сушіння, які за допомогою дробового параметра  $\alpha$  враховують наявність ефектів «пам'яті» та самоорганізації у матеріалі під час реалізації цих моделей.

**Практичне значення одержаних результатів.** Розроблені математичні моделі та прикладне програмне забезпечення можуть бути використані для створення систем автоматизованого скінченно-різницевого розрахунку температури, вологовмісту та компонент напружень під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням їх фрактальної структури та технологічних параметрів агента сушіння.

Запропонований алгоритм апроксимації та отримані розрахункові співвідношення реологічної поведінки деревини за допомогою лінійної комбінації дробово-експоненціальних операторів дає змогу підвищити точність апроксимації експериментальних даних.

Розроблено методику вимірювання напружень на поверхні висушеної деревини для контролю та виявлення напружень, зокрема залишкових.

Результати дисертаційної роботи використано на ВКФ “Ледас-Україна” (м. Хуст, Закарпатська область, акт від 17.04.2015 р.) для аналізу розподілів температури, вологовмісту та компонент напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння, що дає можливість здійснити вибір режимних параметрів для забезпечення необхідної якості продукції. Результати наукових досліджень використано та відображено у програмах навчальних дисциплін кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України: “Математичне моделювання в інформаційних технологіях проектування”, “Обчислювальні методи механіки суцільного середовища”, “Моделювання систем”, “Штучні нейронні мережі” (акт від 24.03.2015 р.). За результатами досліджень отримано один патент України на корисну модель.

**Особистий внесок здобувача.** Усі наукові результати дисертаційної роботи належать особисто здобувачу. У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачу належить [3, 6, 8, 11, 18] – удосконалення математичної моделі неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою; [4, 10, 12, 16, 17, 19] – розроблення математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння; [5, 13, 21] – адаптація скінченно-різницевого методу для знаходження чисельного розв'язку моделей; [1, 9, 14, 15, 20] – аналіз закономірностей розподілу характеристик процесів неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування деревини у процесі сушіння; [7] – спосіб визначення повних напружень на поверхні висушеної деревини за величиною підведеного механічного зусилля до еталону; [2] – апроксимація експериментальних даних реологічної поведінки деревини лінійною комбінацією дробово-експоненціальних функцій.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на:

- 4th and 6th International Conferences of Young Scientists “Computer Science and Engineering” (Lviv, 2010, 2013);
- 6th International Conference of Computer Science and Informational Technologies CSIT-2011 (Lviv, 2011);

- Науково-практичній конференції “Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та освіті INFOTECH – 2011” (Севастополь, 2011);
- VI науково-практичній конференції з міжнародною участю “Математичне та імітаційне моделювання систем”, МОДС 2011 (Чернігів, 2011);
- Міжнародному молодіжному форумі “Радіоелектроніка і молодь в XXI столітті” (Харків, 2012);
- Міжнародних наукових конференціях “Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту” (Херсон, 2011, 2013, 2014);
- Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (Львів, 2013, 2014);
- III науково-технічній конференції “Обчислювальні методи та системи перетворення інформації” (Львів, 2014);
- 13-th International Conference “The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics” (Svalyava, 2015);
- Науково-практичній конференції професорсько-викладацького складу НЛТУ України в період 2009 - 2015 рр.;
- Дисертаційна робота у повному обсязі доповідалась та обговорювалась на науковому семінарі у Західному науковому центрі НАН України та МОН України (науковий керівник семінару, д.т.н., проф. Воробель Р. А.), Львів, 2015.

**Публікації.** Основні результати роботи опубліковано у 21 праці, зокрема: 6 статей у наукових фахових виданнях, 14 публікацій у матеріалах наукових конференцій. Отримано один патент України на корисну модель.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота загальним обсягом 193 сторінки складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаної літератури і додатків. Основний текст викладено на 149 сторінках, містить 66 рисунків та 12 таблиць. Бібліографічний список складається з 215 назв.

## **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, охарактеризовано наукову новизну і практичне значення результатів, відзначено особистий внесок автора, подано структуру та обсяг роботи.

У **першому розділі** проаналізовано сучасний стан математичного моделювання неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою.

Для опису нестационарних процесів, як правило, використовують оператори інтегрування та диференціювання, які зумовлюють накладання певних умов на протікаючі процеси та узагальнюють їх властивості. Зокрема, це стосується середовищ з фрактальною структурою, для яких є характерними біологічна мінливість реологічних властивостей, структурна неоднорідність, наявність ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу. Використання математичного апарата інтегро-диференціювання дробового порядку дає можливість врахувати вище згадані властивості матеріалу. Існують підходи Рімана-Ліувілля, Капуто, Грюнвальда-Летнікова та їх різноманітні модифікації щодо визначення операцій дробового інтегрування та диференціювання. Вагомий внесок у розвиток цього математичного апарата здійснили учені С. Г. Самко, А. А. Килбас, М. Caputo, I. Podlubny, К. В. Oldham,

В. В. Учайкин, S. Manabe, Y. Chen, Н. О. Вірченко, А. М. Нахушев, Е. Н. Огородников, Р. Curial та ін. Дослідження геометричної, фізичної та ймовірнісної інтерпретацій дробових операторів розглядають роботи R. Rutman, I. Podlubny, R. R. Nigmatullin, А. А. Станіславського, J. А. Т. Machado, В. Е. Тарасова, R. Gorenflo.

Вагомий внесок у розроблення математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння здійснили А. В. Ликов, П. С. Серговський, Б. Н. Уголев, Г. С. Шубін, П. В. Білей, Я. І. Соколовський, Б. І. Гайвась, І. В. Кречетов, Б. П. Поберейко, І. М. Озарків, М. В. Дендюк, Й. В. Андрашек, М. Lawniczak, S. Svensson, Т. Toratti. Дослідженими достатньою мірою є пружні та в'язко-пружні деформації. Однак залишкові деформації, зумовлені фрактальною структурою матеріалу деревини, не є достатньо вивченою областю такого процесу. Фрактальні ідеалізовані моделі, що будуються за допомогою математичного апарата інтегро-диференціювання дробового порядку, виокремлюють пружні і в'язкі властивості матеріалу та враховують фрактальну структуру матеріалу. Але їх застосування для моделювання напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння є обмежене одновимірним випадком та унеможливорює врахування усього діапазону зміни температури та вологовмісту. Успіху у цьому напрямку досягли Т. Alfrey, Р. Doty, R. Lewandowski, Т. S. Chang, М. Р. Singh. Дослідженням дифузійних процесів, що не повною мірою описуються законами Фіка і Фур'є і для яких необхідне залучення математичного апарата інтегро-диференціювання дробового порядку, займалися R. Metzler, J. Klafter, Ю. З. Повстенко, Я. Д. П'янило, Б. Й. Дацко, В. В. Учайкин, Р. Paradisi, R. Cesari, F. Mainardi, F. Tampieri, Л. А. Мержиевский.

Застосування апарата інтегро-диференціювання дробового порядку ускладнює математичні моделі неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння і вимагає вдосконалення чисельних методів для їх реалізацій, адже аналітичні методи є обмежено застосовними. Використання композицій скінченно-різницевих схем для знаходження чисельного розв'язку диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку можна знайти у роботах К. Diethelm, Ю. И. Бабенка, Yu. F. Luchko, R. Gorenflo, F. Mainardi, А. С. Simpson, I. Podlubny, С. Ю. Лукащука, І. В. Костригіна.

Проведений аналіз показав, що математичні моделі тепломасообмінних процесів та реологічної поведінки деревини під час сушіння нехтують залишковими напруженнями, мінливістю реологічних властивостей, структурною неоднорідністю, наявністю ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу у матеріалі. Тому актуальним науковим завданням є побудова математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою, зокрема деревині, у процесі сушіння за допомогою математичного апарата інтегро-диференціювання дробового порядку та встановлення закономірностей впливу технологічних параметрів режиму сушіння на динаміку температури, вологовмісту і компонент напружено-деформівного стану.

У **другому розділі**, використовуючи математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку та закони Фіка і Фур'є, вдосконалено двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів. Це дає можливість врахувати їх фрактальну структуру, анізо-

тропію тепломеханічних характеристик та розширити множину її реалізації. Цю математичну модель, що описується системою диференціальних рівнянь з частинними похідними дробового порядку Рімана-Ліувілля, реалізовано за допомогою методу скінченних різниць та розроблено відповідне програмне забезпечення.

Вдосконалено двовимірну математичну модель зміни температури  $T(\tau, \mathbf{x})$  та вологовмісту  $U(\tau, \mathbf{x})$  під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою протягом часу  $\tau \in [0, \tau_{end}]$  в осесиметричній області поперечного перерізу  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 \in [0, l_1], x_2 \in [0, l_2]\}$ , центр якого збігається з початком координат. Вона описується системою диференціальних рівнянь з частинними похідними дробового порядку:

$$\begin{aligned} c(T, U)\rho(U)\frac{\partial^\alpha T(\tau, \mathbf{x})}{\partial \tau^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda_1(T, U) \frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda_2(T, U) \frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_2} \right) + \varepsilon \rho_0 r \frac{\partial^\alpha U(\tau, \mathbf{x})}{\partial \tau^\alpha}; \\ \frac{\partial^\alpha U(\tau, \mathbf{x})}{\partial \tau^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( a_1(T, U) \frac{\partial U(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( a_2(T, U) \frac{\partial U(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_2} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( a_1(T, U) \delta(T, U) \frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( a_2(T, U) \delta(T, U) \frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

з відповідними граничними умовами 3-го роду:

$$\begin{aligned} \lambda_i(T, U) \frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x_i=l_i} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta(U(\tau, \mathbf{x})_{x_i=l_i} - U_p) &= \alpha_i(T(\tau, \mathbf{x})_{x_i=l_i} - t_c); \\ a_i(T, U) \delta(T, U) \frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x_i=l_i} + a_i(T, U) \frac{\partial U(\tau, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x_i=l_i} &= \beta(U_p - U(\tau, \mathbf{x})_{x_i=l_i}); \\ a_i(T, U) \delta(T, U) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x_i=0} + a_i(T, U) \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x_i=0} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x_i=0} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а також початковими умовами для нерегулярного режиму процесу сушіння:

$$T(\tau, \mathbf{x}) \Big|_{\tau=0} = T_0(\mathbf{x}); \quad U(\tau, \mathbf{x}) \Big|_{\tau=0} = U_0(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Для регулярного режиму, що характеризується відповідними значеннями критеріальних чисел Фур'є та Біо, початкові умови задаються функціями параболічного типу від просторових змінних. Тут,  $\alpha$  – дробовий порядок похідної;  $\lambda_i(T, U)$ ,  $a_i(T, U)$ ,  $\alpha_i(T, U)$  – коефіцієнти теплопровідності, вологопровідності та теплообміну відповідно;  $\beta(t_c, \varphi, \nu)$  – коефіцієнт вологообміну;  $U_p(t_c, \varphi)$  – рівноважний вологовміст, що є функцією від температури  $t_c$  та відносної вологості  $\varphi$  агента сушіння;  $c(T, U)$  – питома теплоємність;  $\rho(U)$  – густина;  $\rho_0$  – базисна густина;  $\delta(T, U)$  – термоградієнтний коефіцієнт;  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль;  $\varepsilon$  – коефіцієнт фазового переходу;  $\nu$  – швидкість руху агента сушіння;  $r$  – питома теплота пароутворення;  $T_0(\mathbf{x})$ ,  $U_0(\mathbf{x})$  – температура та вологовміст матеріалу у початковий момент часу.

Знаходження аналітичного розв'язку цієї задачі обмежене тільки частковими випадками. Тому для реалізації математичної моделі (1)–(3) використано скінченно-різницевої метод предиктор-коректор. В основі предиктора лежить явна різницева схема системи диференціальних рівнянь (1), а в основі коректора – неявна.

Приймемо, що похідна дробового порядку  $\alpha$  на відрізку  $[\tau^n; \tau^{n+1}]$  є похідною у розумінні Рімана-Ліувілля:

$$\left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} \right|_{\tau^n} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(\tau^n)}{(\tau^{n+1} - \tau^n)^\alpha} + \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{f'(\xi)}{(\tau^{n+1} - \tau^n)^\alpha} d\xi \right], \quad (4)$$

де  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$  – гамма-функція Ейлера;  $n$  – індекс часового інтервалу  $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ .

Її різницеву апроксимацію на відрізку  $[\tau^n; \tau^{n+1}]$  можна записати так:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \tau^\alpha} \right|_{\tau^n} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha}; \quad \Delta\tau = \tau^{n+1} - \tau^n. \quad (5)$$

Беручи до уваги різницеву апроксимацію похідної дробового порядку  $\alpha$  (5), побудовано схему скінченно-різницевої апроксимації системи диференціальних рівнянь (1). За  $\varpi=1$  вона приймає вигляд явної скінченно-різницевої схеми, а за  $\varpi=0$  – неявної:

$$\begin{aligned} c^\varpi \rho^\varpi \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= \frac{\lambda_1^\varpi}{h_{x_1}^2} \left( \varpi \Delta_j^n \Big|_i (T) + (1-\varpi) \Delta_j^{n+1} \Big|_i (T) \right) + \\ &+ \frac{\lambda_2^\varpi}{h_{x_2}^2} \left( \varpi \Delta_i^n \Big|_j (T) + (1-\varpi) \Delta_i^{n+1} \Big|_j (T) \right) + \varepsilon \rho_0 r \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha}; \\ \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= \frac{a_1^\varpi}{h_{x_1}^2} \left( \varpi \Delta_j^n \Big|_i (U) + (1-\varpi) \Delta_j^{n+1} \Big|_i (U) \right) + \frac{a_2^\varpi}{h_{x_2}^2} \left( \varpi \Delta_i^n \Big|_j (U) + (1-\varpi) \Delta_i^{n+1} \Big|_j (U) \right) + \\ &+ \frac{a_1^\varpi \delta^\varpi}{h_{x_1}^2} \left( \varpi \Delta_j^n \Big|_i (T) + (1-\varpi) \Delta_j^{n+1} \Big|_i (T) \right) + \frac{a_2^\varpi \delta^\varpi}{h_{x_2}^2} \left( \varpi \Delta_i^n \Big|_j (T) + (1-\varpi) \Delta_i^{n+1} \Big|_j (T) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $h_{x_1}$ ,  $h_{x_2}$  – кроки по просторових змінних  $x_1$  та  $x_2$  відповідно;  $\Delta_j^n \Big|_i (F) = F_{i-1}^n - 2F_{ij}^n + F_{i+1}^n$ ,  $\Delta_i^n \Big|_j (F) = F_{ij-1}^n - 2F_{ij}^n + F_{ij+1}^n$ ,  $coefficient^\varpi = coefficient(T_{ij}^{n+1-\varpi}, U_{ij}^{n+1-\varpi})$ .

На основі об'єктно-орієнтованого підходу розроблено прикладне програмне забезпечення для обчислення зміни температури та вологовмісту у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою. Воно ґрунтується на використанні скінченно-різницевого методу предиктор-коректор для реалізації математичної моделі (1)–(3). Проаналізувавши відносну похибку між отриманими значеннями із застосуванням цього методу, за згущення розбиття по часовій та просторових координатах показано його збіжність.

Також проведено валідацію та верифікацію математичної моделі за допомогою зіставлення одержаних результатів із експериментальними даними та результатами, отриманими іншими дослідниками у часткових випадках.

Отже, вдосконалено двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів, що дає змогу врахувати їх фрактальну структуру, анізотропію тепломеханічних характеристик та розширити множину її реалізацій. Розроблено прикладне програмне забезпечення, що ґрунтується на скінченно-різницевому методі предиктор-коректор, для обчислення значень температури та вологовмісту у висушуваному матеріалі.

**У третьому розділі**, використовуючи математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку та спадкову теорію Больцмана-Вольтерра, отримано нову математичну модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Вона дає можливість врахувати

в'язко-пружні та залишкові деформації деревини, усадку гігроскопічних матеріалів, наявність ефектів «пам'яті» та самоорганізації, що притаманні середовищам з фрактальною структурою.

Для моделювання напружено-деформівного стану під час сушіння деревини з урахуванням анізотропії в'язко-пружних властивостей та фрактальної структури матеріалу знаходимо компоненти векторів переміщень  $\mathbf{u}^T = (u_1, u_2)$  та напружень  $\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ , які задовольняють рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0. \quad (7)$$

Граничні умови, що враховують симетричність області та відсутність зовнішніх зусиль, прикладених до матеріалу, є такими:

$$u_j \Big|_{x_j=0} = 0; \quad \sigma_{ii} \Big|_{x_j=l_i} = 0. \quad (8)$$

Залежність між переміщеннями та деформаціями  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$  визначається за допомогою відомих співвідношень Коші. Зв'язок між компонентами напружень  $\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$  та деформацій деревини у процесі сушіння з урахуванням фрактальної структури середовища можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha \sigma_{11}}{\partial \tau^\alpha} &= C_{11} \left( \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{11}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T1}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{11} R_{11}(\tau - s, T, U) (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \\ &+ C_{12} \left( \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{22}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T2}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{12} R_{12}(\tau - s, T, U) (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}); \\ \frac{\partial^\alpha \sigma_{22}}{\partial \tau^\alpha} &= C_{21} \left( \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{11}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T1}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{21} R_{21}(\tau - s, T, U) (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \\ &+ C_{22} \left( \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{22}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T2}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{22} R_{22}(\tau - s, T, U) (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}); \\ \frac{\partial^\alpha \sigma_{12}}{\partial \tau^\alpha} &= 2C_{33} \left( \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{12}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T3}}{\partial \tau^\alpha} \right) - 2C_{33} R_{33}(\tau - s, T, U) (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}), \end{aligned} \quad (9)$$

де  $\boldsymbol{\varepsilon}_T = (\varepsilon_{T1}, \varepsilon_{T2}, 0)^T$  – вектор деформацій, компоненти якого зумовлені зміною температури  $\Delta T$  та вмісту вологи  $\Delta U$ , а  $C_{ij}$  – компоненти тензора пружності анізотропного тіла:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{T1} \\ \varepsilon_{T2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} \Delta T + \beta^{(1)} \Delta U \\ \alpha^{(2)} \Delta T + \beta^{(2)} \Delta U \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_1 \nu_2} & \frac{\nu_1 E_{22}}{1 - \nu_1 \nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_1 E_{22}}{1 - \nu_1 \nu_2} & \frac{E_{22}}{1 - \nu_1 \nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де  $E_{11}(T, U), E_{22}(T, U)$  – модулі Юнга;  $\nu_1(T, U), \nu_2(T, U)$  – коефіцієнти Пуассона;  $\mu(T, U)$  – модуль зсуву;  $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$  – коефіцієнти температурного розширення та вологісного всихання, відповідно.

Також додаються такі початкові умови:

$$\sigma_{ij} \Big|_{\tau=0} = 0; \quad \varepsilon_{ij} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (11)$$

Ядро релаксації, що описує реологічну поведінку деревини та накопичення залишкових напружень, вибираємо у вигляді:

$$R = \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i E_{\alpha}(\psi_i, \tau_{rel} - \tau) \right] h(\tau) h(\tau_{rel} - \tau) + \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j E_{\alpha}(\chi_j, \tau - \tau_{rel}) \right] h(\tau - \tau_{rel}), \quad (12)$$

де  $\xi_i$ ,  $\psi_i$ ,  $\gamma_j$ ,  $\chi_j$  – шукані коефіцієнти;  $h(t)$  – функція Хевісайда;  $E_{\alpha}(\beta, t)$  – функція Міттаг-Леффлера.

Коефіцієнти ядра релаксації (12) визначені за допомогою пошуку резольвенти ядра повзучості, яке записано у вигляді лінійної комбінації дробово-експоненціальних операторів Работнова. Своєю чергою коефіцієнти ядра повзучості обчислюємо шляхом апроксимації експериментальних даних повзучості деревини залежно від температури та вологовмісту. Використання операторів Работнова в апроксиманті цього ядра, дає змогу обчислити дробову складову  $\alpha$ , що входить у математичну модель неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Також встановлена залежність між цією складовою та породою деревини, температурою і вологовмістом.

Для реалізації математичної моделі (7)–(12) використаний скінченно-різнице-вий метод предиктор-коректор. Як і для задачі неізотермічного вологоперенесення, в основу предиктора покладена явна різницева схема, а коректора – неявна. Побудовано схему скінченно-різницевої апроксимації системи диференціальних рівнянь (9). Зокрема, за  $\varpi = 1$  вона прийме вигляд явної скінченно-різницевої схеми, а за  $\varpi = 0$  – неявної:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}|_{ij}^{n+1} - \sigma_{11}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}} &= C_{11} \left( \frac{(\varepsilon_{11}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{11}|_{ij}^n) - (\varepsilon_{T1}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T1}|_{ij}^n)}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}} \right) - C_{11} R_{11}(\tau^{n+1-\varpi} - s, T, U) (\varepsilon_{11}|_{ij}^{n+1-\varpi} - \varepsilon_{T1}|_{ij}^{n+1-\varpi}) + \\ &+ C_{12} \left( \frac{(\varepsilon_{22}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{22}|_{ij}^n) - (\varepsilon_{T2}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T2}|_{ij}^n)}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}} \right) - C_{12} R_{12}(\tau^{n+1-\varpi} - s, T, U) (\varepsilon_{22}|_{ij}^{n+1-\varpi} - \varepsilon_{T2}|_{ij}^{n+1-\varpi}); \\ \frac{\sigma_{22}|_{ij}^{n+1} - \sigma_{22}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}} &= C_{21} \left( \frac{(\varepsilon_{11}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{11}|_{ij}^n) - (\varepsilon_{T1}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T1}|_{ij}^n)}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}} \right) - C_{21} R_{21}(\tau^{n+1-\varpi} - s, T, U) (\varepsilon_{11}|_{ij}^{n+1-\varpi} - \varepsilon_{T1}|_{ij}^{n+1-\varpi}) + \\ &+ C_{22} \left( \frac{(\varepsilon_{22}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{22}|_{ij}^n) - (\varepsilon_{T2}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T2}|_{ij}^n)}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}} \right) - C_{22} R_{22}(\tau^{n+1-\varpi} - s, T, U) (\varepsilon_{22}|_{ij}^{n+1-\varpi} - \varepsilon_{T2}|_{ij}^{n+1-\varpi}); \\ \frac{\sigma_{12}|_{ij}^{n+1} - \sigma_{12}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}} &= C_{33} \left( \frac{(\varepsilon_{12}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{12}|_{ij}^n) - (\varepsilon_{T3}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T3}|_{ij}^n)}{2\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^{\alpha}} \right) - C_{33} R_{33}(\tau^{n+1-\varpi} - s, T, U) (\varepsilon_{12}|_{ij}^{n+1-\varpi} - \varepsilon_{T3}|_{ij}^{n+1-\varpi}). \end{aligned} \quad (13)$$

На основі об'єктно-орієнтованого підходу розроблено прикладне програмне забезпечення для реалізації моделі (7)–(12). Створено клас UserForm, призначений для організації взаємодії між середовищем та користувачем, тобто його засобами здійснена можливість задання геометричних, термофізичних та реологічних параметрів математичних моделей (1)–(3) та (7)–(12). Клас Solver призначений для реалізації моделей та обчислення зміни температури, вологовмісту та компонент напружено-деформівного стану у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою.

Проведено валідацію та верифікацію математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння шляхом співставлення отриманих результатів із результатами, одержаними

іншими дослідниками у часткових випадках. Показана збіжність застосовуваного скінченно-різницевого методу предиктор-коректор.

Отже, отримано нову математичну модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, яка дає змогу розширити множину реалізацій моделі, врахувати пружні, в'язко-пружні та залишкові деформації деревини, усадку гігроскопічних матеріалів, наявність ефектів «пам'яті» та самоорганізації, що притаманні середовищам з фрактальною структурою. Розроблено прикладне програмне забезпечення для обчислення компонентів напружено-деформівного стану деревини під час сушіння з урахуванням фрактальної структури матеріалу. Встановлено залежність між дробовим показником  $\alpha$  та породою деревини, її температурою і вологовмістом.

У **четвертому розділі** наведено результати реалізації отриманих математичних моделей для дослідження компонент напружено-деформівного стану деревини в умовах неізотермічного вологоперенесення з урахуванням фрактальної структури матеріалу, що дає можливість кількісно описати вплив параметрів агента сушіння, фізичних характеристик матеріалу та ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу на зміну температури, вологовмісту та нормальних і тангентальних напружень. Для реалізації отриманих моделей використовувалось розроблене прикладне програмне забезпечення.

Аналіз зміни температури (рис. 1, а) та вологовмісту (рис. 1, б) під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою показав, що математична модель (1)–(3) дає змогу врахувати взаємозалежність процесів тепло- та вологоперенесення. Значення температури на поверхні взірця зростає і прямує до температури агента сушіння, а вологовмісту зменшується до рівноважного вологовмісту. Аналіз динаміки вологовмісту у різних геометричних точках поперечного перерізу бруска (рис. 2, а) показав, що на початку процесу сушіння частина вологи випаровується через поверхню матеріалу, а деяка її частина прямує до центра взірця. Це підтверджує той факт, що процес дифузії вологи має нижчу інтенсивність на поверхні матеріалу під час вологообміну з навколишнім середовищем. Своєю чергою, максимальні градієнти вологовмісту утворюються в середині висушуваного матеріалу.

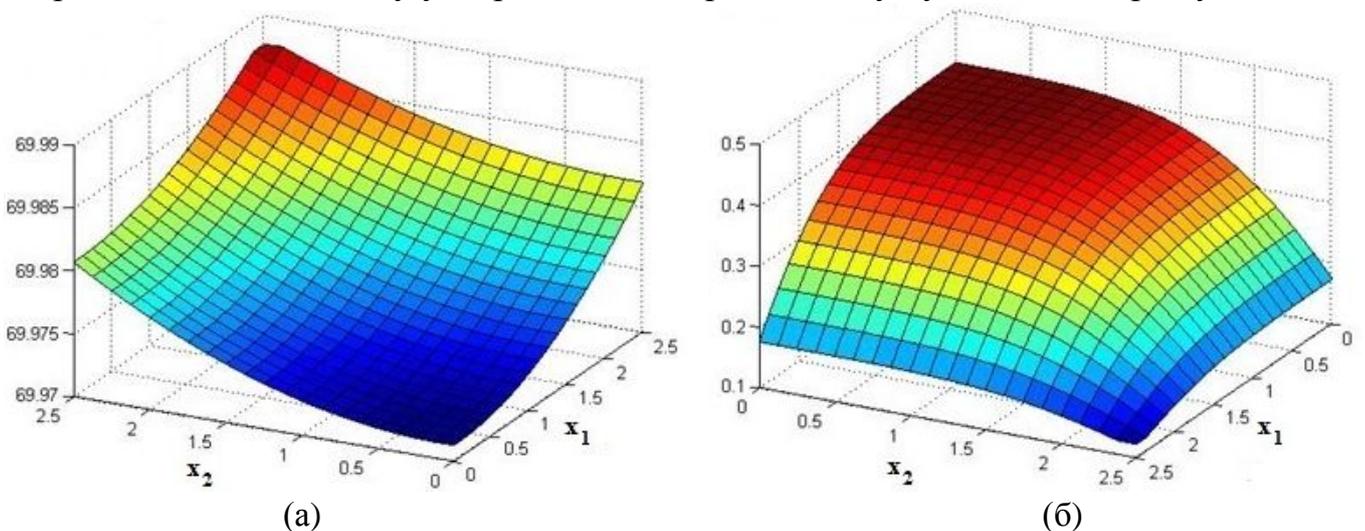


Рис. 1. Зміна температури через 3 год. (а) та вологовмісту через 24 год. після початку сушіння (б) у поперечному перерізі дубового бруска залежно від просторових координат

Досліджено динаміку температури та вологовмісту під час сушіння деревини. Це надало змогу кількісно оцінити вплив фрактальної структури матеріалу, анізотропії тепломеханічних властивостей та параметрів агента сушіння на температуру та вологовміст матеріалу. Врахування фрактальної структури деревини дає змогу розширити множину реалізацій математичної моделі неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння шляхом вибору дробового показника  $\alpha$ . Він дає змогу описати вплив реологічних властивостей, початкових характеристик та породи деревини на зміну температури та вологовмісту.

Виявлено, що для порід деревини з меншою густиною фрактальна структура матеріалу має більший вплив на зміну вологовмісту у процесі сушіння, ніж для твердіших порід (рис. 2, б). Зокрема, для брусків з однаковими геометричними розмірами, початковими значеннями температури, вологовмісту та заданими параметрами агента сушіння значення вологовмісту після 24 годин сушіння із урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування у центрі бруска відрізняються для деревини: дуба – на 2,7 %; бука – на 3,8 %; сосни – на 5,2 %.

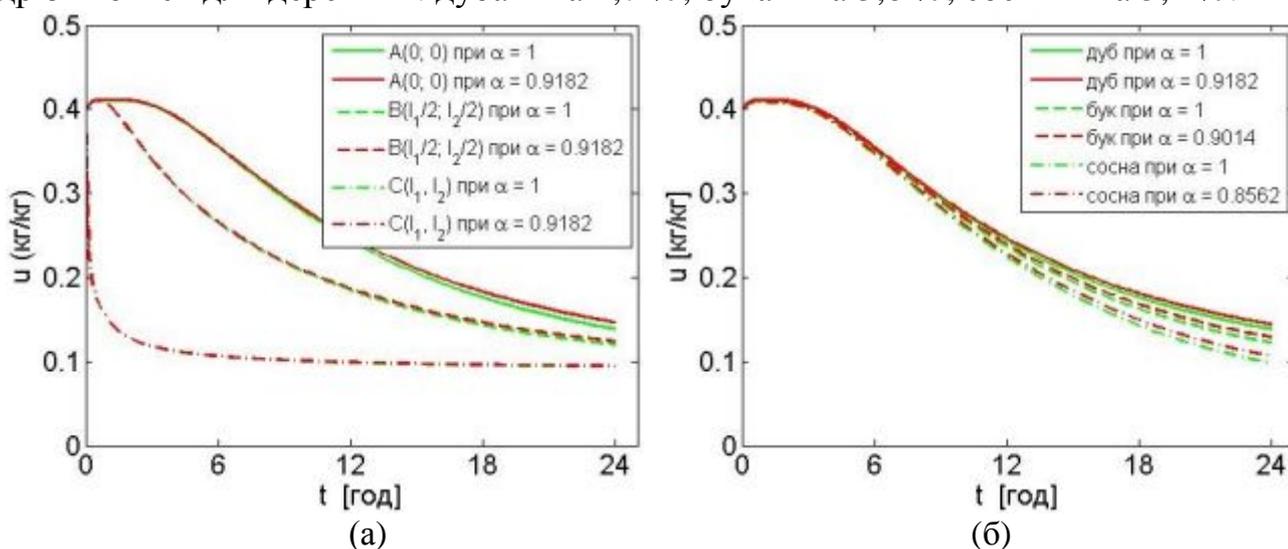


Рис. 2. Зміна вологовмісту у точках  $A(0;0)$ ,  $B(l_1/2; l_2/2)$  і  $C(l_1; l_2)$  поперечного перерізу дубового бруска (а) та у точці  $C(l_1; l_2)$  (б) для брусків із різних порід деревини

Досліджено, що зі зниженням температури (рис. 3, а) та підвищенням відносної вологості агента сушіння (рис. 3, б) процес вологовидалення у деревині уповільнюється. Вплив фрактальної структури середовища істотніший за збільшення відносної вологості агента сушіння. Значення вологовмісту у центрі соснового бруска із урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування за відносної вологості  $\varphi = 50\%$  відрізняються на 3,2 %, за  $\varphi = 60\%$  – на 4,4 %, а за  $\varphi = 70\%$  – на 7,1 %.

Зміна вологовмісту під час сушіння деревини зумовлює появу стискаючих нормальних напружень на поверхні взірця та розтягуючих – у його центрі (рис. 4, а). Для сталих параметрів режиму сушіння абсолютні значення компонент напружень швидше зростають для твердіших порід ніж для порід з меншою густиною (рис. 4, б). Вплив ефекту «пам'яті», що є характерним для матеріалів з фрактальною структурою, є суттєвішим для порід деревини з меншою густиною. Різниця між значеннями  $\sigma_{11}$  із урахуванням цієї структури та без її урахування для дуба не перевищує 5,7 %, бука – 8,3 %, сосни – 22,7 %. Отримані результати дають змогу проаналізувати

зувати динаміку розвитку залишкових напружень у висушуваній деревині. Зокрема, за однакових режимів сушіння та геометричних розмірів взірця величини залишкових напружень для порід із меншою густиною є вищими ніж для твердіших порід.

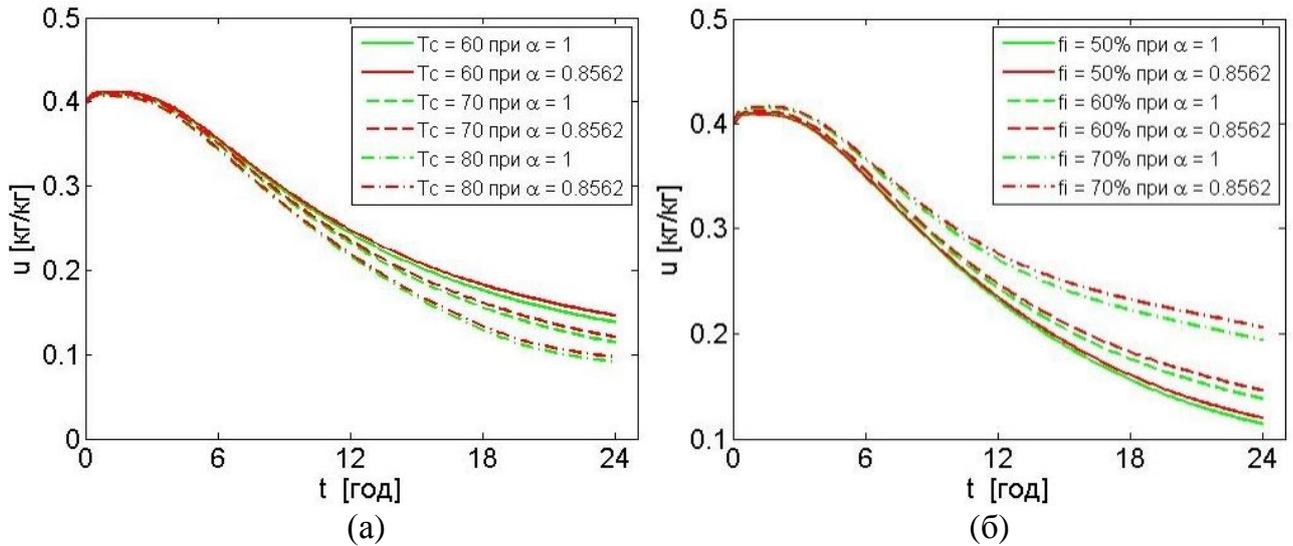


Рис. 3. Зміна вологовмісту у точці  $C(l_1; l_2)$  соснового бруска за різних значень температури (а) та відносної вологості (б) агента сушіння

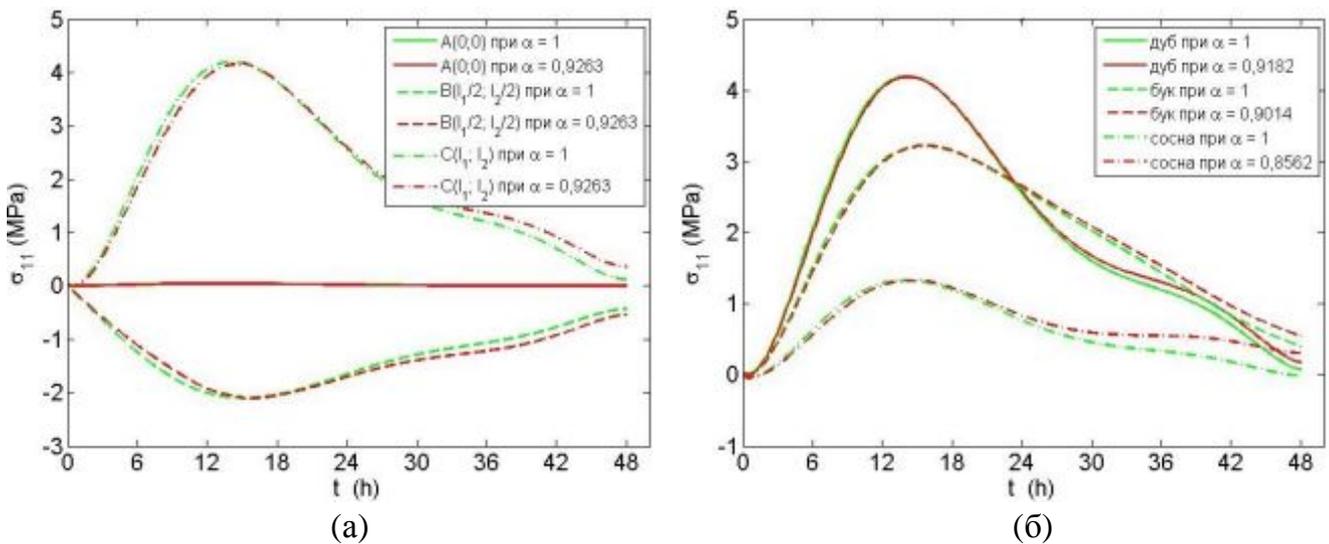


Рис. 4. Зміна компоненти напружень  $\sigma_{11}$  у точках  $A(0;0)$ ,  $B(l_1/2; l_2/2)$  і  $C(l_1; l_2)$  поперечного перерізу букового бруска (а) та у точці  $C(l_1; l_2)$  поперечного перерізу брусків із різних порід деревини (б)

Досліджено вплив параметрів агента сушіння на динаміку компонент напружень під час сушіння деревини. Зі збільшенням відносної вологості на 20 % абсолютні значення компонент напружень зменшуються на 38 % (рис. 5, б), а зі зниженням температури на 20 °C (рис. 5, а) – на 33 %. Фрактальна структура матеріалу істотніше проявляється за інтенсифікації процесу сушіння. Зокрема, різниця між значеннями компонент напружень із урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування при температурі агента сушіння  $t_c = 80$  °C коливається в межах 28 %, а при відносній вологості  $\varphi = 50\%$  – 23,4 %. Отже, за збільшення температури та зниження відносної вологості агента сушіння залишкові напруження у висушуваній деревині накопичуються інтенсивніше.

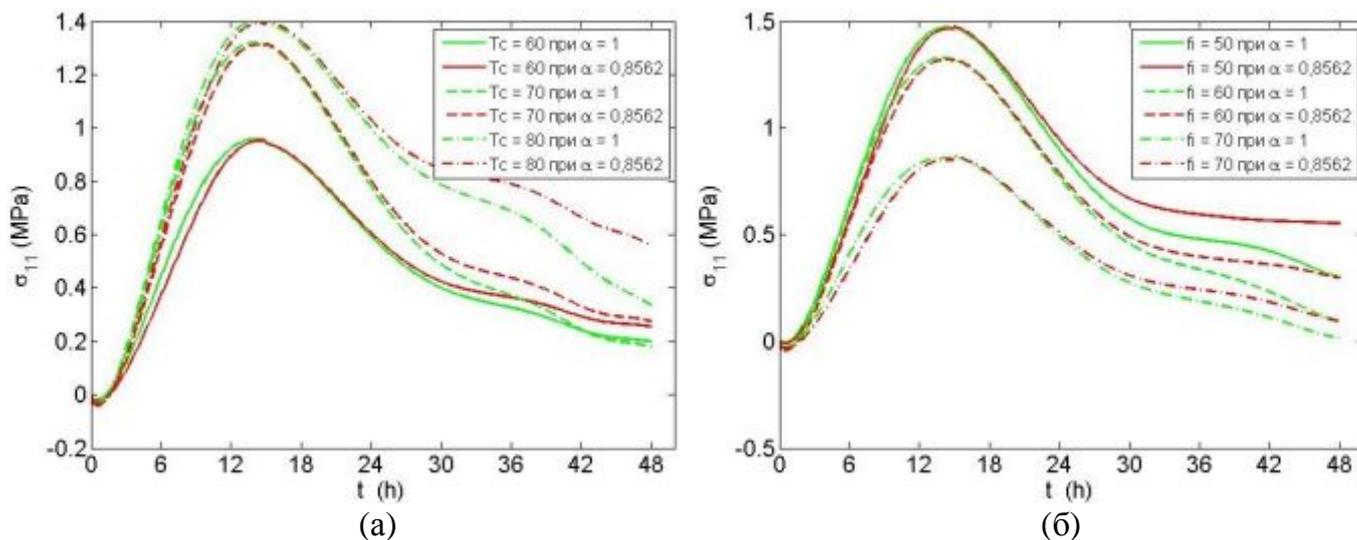


Рис. 5. Зміна компоненти напружень  $\sigma_{11}$  у точці  $C(l_1; l_2)$  для соснового бруска за різних значень температури (а) та відносної вологості (б) агента сушіння

Проаналізовано зміну вологовмісту (рис. 6, а) та компонент напружень (рис. 6, б) для двоступеневого та одноступеневого режимів сушіння деревини з урахуванням її фрактальної структури. Сушіння в одноступеневому режимі моделювалось за таких параметрів агента сушіння: температура –  $t_c = 70^\circ C$ , відносна вологість –  $\varphi = 60\%$ .

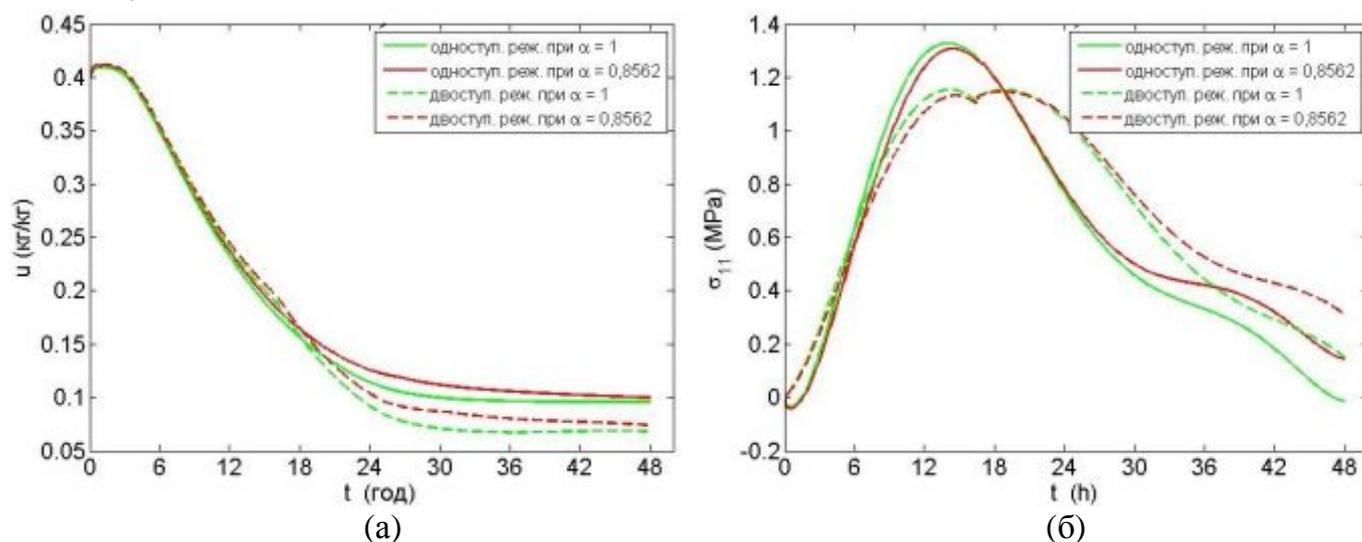


Рис. 6. Зміна вологовмісту у точці  $A(0;0)$  (а) та компоненти напружень  $\sigma_{11}$  в точці  $C(l_1; l_2)$  (б) поперечного перерізу соснового бруска за одно- та двоступеневого режимів сушіння

На першому ступені двоступеневого режиму сушіння параметри агента сушіння такі: температура –  $t_c = 60^\circ C$ , відносна вологість –  $\varphi = 65\%$ . За досягнення вологовмісту значення, що дорівнює  $u = 0.2$  кг/кг процес сушіння переходить у другий ступінь, для якого параметри агента сушіння встановлюються у значення: температура –  $t_c = 77^\circ C$ , відносна вологість –  $\varphi = 30\%$ . Величини компонент напружень  $\sigma_{11}$  після 48 годин сушіння деревини з урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування за одноступеневого режиму відрізняються на 20,7%, а за двоступеневого – 21,1%. Отже, застосування двоступеневого режиму сушіння дає змогу зменшити максимальні значення нормальних і тангентальних напружень у

висушуваній деревині. Проте інтенсифікація процесу сушіння на другому ступені цього режиму зумовлює зростання залишкових напружень.

Отримано функції релаксації, вільної енергії та ентропії для реологічних моделей Максвелла, Фойгта та Кельвіна, що враховують фрактальну структуру матеріалу. Це дає змогу розширити множину застосування цих моделей та обчислити їх термодинамічні характеристики, які враховують ефекти «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу матеріалу. Також проаналізовано динаміку цих функцій для фрактальних реологічних моделей порівняно з класичними моделями.

Отже, було проаналізовано динаміку температури, вологовмісту і компонент напружено-деформівного стану під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням фрактальної структури середовища залежно від фізико-механічних властивостей матеріалу, параметрів агента та режимів сушіння.

У **п'ятому розділі**, для визначення показника  $\alpha$  похідної дробового порядку і коефіцієнтів ядер релаксації та повзучості математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння здійснено апроксимацію експериментальних даних повзучості деревини залежно від її температурно-вологісних характеристик та породи. З цією метою розроблено прикладне програмне забезпечення, що ґрунтується на методі найменших квадратів, яке дає змогу визначити параметри шуканої апроксиманти із заданою точністю, побудованої у вигляді лінійної комбінації дробово-експоненціальних операторів. Встановлена залежність дробового параметра  $\alpha$  від початкової температури, вологовмісту та породи деревини. Для матеріалів із більшою густиною  $\alpha$  менше відхиляється від одиниці, що свідчить про невеликий вплив фрактальних властивостей матеріалу. Натомість зі зниженням початкової температури або вологовмісту ці властивості проявляються істотніше. Отже, врахування знайдених показника  $\alpha$  та ядер релаксації під час реалізації цих математичних моделей дає змогу отримати динаміку температури, вологовмісту та компонент напружень, включаючи залишкові напруження у висушуваній деревині з урахуванням наявних у ній ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу.

Для контролю та виявлення напружень, зокрема залишкових, у процесі сушіння деревини запропоновано методику вимірювання напружень на поверхні висушеного матеріалу за величиною підведеного механічного зусилля до еталону. Цей спосіб відрізняється тим, що визначення напруженого стану здійснюється шляхом вимірювання напружень на поверхні еталона, який виготовляється з цього самого матеріалу, за допомогою підведення зовнішніх механічних зусиль до нього. Це дає можливість контролювати граничні та залишкові напруження у висушуваній деревині для забезпечення необхідної якості.

Отже, розроблене прикладне програмне забезпечення дає змогу визначити дробовий параметр  $\alpha$  та коефіцієнти ядер релаксації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у процесі сушіння деревини залежно від її початкової температури, вологовмісту та породи. Використання запропонованої методики вимірювання напружень на поверхні висушеного матеріалу для контролю напружень, отриманих за допомогою реалізації цих моделей, дає змогу підібрати раціональні параметри агента сушіння та регулювати

процес переходу до наступного режиму сушіння деревини, що забезпечує підвищення якості продукції.

## ВИСНОВКИ

У дисертації вирішено актуальне наукове завдання побудови та реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння, зокрема деревини, що має важливе значення для обґрунтування раціональних параметрів та підвищення ефективності технологічного процесу за умови забезпечення необхідної якості продукції.

1. Отримано математичну модель в'язко-пружного деформування деревини під час сушіння з урахуванням її фрактальної структури, яка дає змогу врахувати ефекти «пам'яті» і самоорганізації у висушуваній деревині, усадку гігроскопічних матеріалів, анізотропію змінних тепломеханічних характеристик та уможливорює оцінити компоненти напружено-деформівного стану і залишкові напруження, що зумовлені змінними градієнтами температури та вологовмісту.

2. Вдосконалено двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння деревини, як матеріалу з анізотропними теплофізичними характеристиками, для регулярного та нерегулярного режимів, яка на відміну від відомих, дає змогу розширити множину її реалізацій шляхом врахування фрактальної структури матеріалу залежно від породи, початкових значень температури та вологовмісту.

3. Апроксимовано експериментальні дані повзучості деревини за допомогою дробово-експоненціальних операторів залежно від її породи та температурно-вологісних характеристик із забезпеченням необхідної точності, що дає можливість отримати розрахункові співвідношення реологічної поведінки матеріалу та визначити дробовий параметр  $\alpha$  математичних моделей.

4. Розроблено об'єктно-орієнтоване прикладне програмне забезпечення для реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою за допомогою скінченно-різницевого методу предиктор-коректор, яке дає змогу визначити зміну температури, вологовмісту та компонент напружень у деревині під час сушіння. Збіжність методу показано шляхом аналізу відносної похибки, а адекватність отриманих результатів – шляхом зіставлення з відомими експериментальними даними.

5. Досліджено двовимірне в'язко-пружне деформування деревини, як середовища з фрактальною структурою в умовах неізотермічного вологоперенесення та встановлено закономірності впливу технологічних параметрів режиму сушіння, фізичних властивостей, притаманних матеріалам з фрактальною структурою, анізотропії змінних тепломеханічних та теплофізичних характеристик на динаміку температури, вологовмісту і компонент напружено-деформівного стану та оцінити залишкові напруження у висушуваній деревині. Зокрема виявлено, що залишкові напруження: для порід із меншою густиною можуть сягати 22,7 %; з інтенсифікацією режиму сушіння зі сталими параметрами збільшуватись на 23,4 %; для багатоступеневого режиму складати 21,1 %.

6. Розроблено методику вимірювання напружень на поверхні висушеної деревини та прикладне програмне забезпечення для апроксимації експерименталь-

них даних повзучості матеріалу за допомогою лінійної комбінації дробово-експоненціальних операторів, які прийняті для практичного використання на ВКФ "Ледас-Україна" (м. Хуст, Закарпатська обл.) з метою вибору раціональних параметрів та регулювання процесу переходу до наступного режиму сушіння, для підвищення якості продукції та ефективності цього технологічного процесу. Результати наукових досліджень впроваджені у навчальний процес Національного лісотехнічного університету України.

## **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

### **Статті у наукових фахових виданнях**

1. Sokolowskyi Ya. Mathematical modelling of non-isothermal moisture transfer and rheological behavior in capillary-porous materials with fractal structure during drying / Ya. Sokolowskyi, V. Shymanskyi // *Computer and Information Science*. – Canadian Center of Science and Education – Vol. 7, No. 4 – 2014. – P. 111-122.

2. Шиманський В. М. Апроксимація експериментальних даних повзучості деревини з використанням дробово-експоненціального оператора / В. М. Шиманський // *Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць*. – Львів : НЛТУ України, 2015. – Вип. 25.1. – С. 397-402.

3. Соколовський Я. І. Фрактальна модель тепло- і масоперенесення у капілярно-пористих матеріалах / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // *Вісник Національного університету «Львівська політехніка», Комп'ютерні науки та інформаційні технології*. № 694. – Львів : НУ «ЛП», 2011. – С. 424-428.

4. Соколовський Я. І. Математична модель тепловологоперенесення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. – Львів : Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2012. – Вип. 16. – С. 133-142.

5. Соколовський Я. І. Чисельне моделювання неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // *Вісник Національного університету «Львівська політехніка» : Комп'ютерні науки та інформаційні технології*. – № 710. – 2011. – С. 159-164.

6. Соколовський Я. І. Двовимірний математичний модель вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // *Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць*. – Львів : НЛТУ України, 2011. – Вип. 21.2. – С. 341-348.

7. Патент України на корисну модель №61580. Спосіб прямих вимірювань повних напружень на поверхні висушеного пиломатеріалу / Б. П. Поберейко, В. М. Шиманський, Я. І. Соколовський ; заявл. 20.12.2010 ; опубл. 25.07.2011, Бюл. № 14.

### **Тези доповідей, матеріали наукових конференцій**

8. Sokolovskiy Ya. The numerical modeling of the deformational-relaxation and heat-mass exchange fields in capillary-porous materials with fractal structure / Ya. Sokolowskyi, V. Shymanskyi, I. Boretska, O. Sykala / *Proceeding of the VI th International*

- Conference on Computer Science and Informational Technologies 'CSIT-2011'. – Lviv, 2011. – P. 210-213.
9. Sokolowskyi Ya. Mathematical modeling of rheological behavior and distribution of temperature and moisture fields in the drying of lumber / Ya. Sokolowskyi, V. Shymanskyi, A. Nechepurenko, S. Xabors'kyj, M. Dmytrus' / 13-th International Conference "The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics". – Svalyava, 2015. – P. 214-217.
10. Sokolowskyi Ya. Mathematical modelling of unisothermal moisture transfer and deformation-relaxation fields in capillary-porous materials with fractal structure / Ya. Sokolowskyi, V. Shymanskyi / Computer Science & Engineering: Proceedings of the 6th International Conference of Young Scientists 'CSE-2013'. – Lviv : Lviv Polytechnic Publishing House, 2013. – P. 100-103.
11. Соколовський Я. І. Математична модель волого перенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський / 4 International Conference of Young Scientists – Computer Science and Engineering 'CSE-2010'. – Львів, 2010. – С. 228-229.
12. Соколовський Я. І. Математичне моделювання реологічної поведінки та температурно-вологісних полів у процесі сушіння матеріалів з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський / Обчислювальні методи та системи перетворення інформації: збірник праць III-ї науково-технічної конференції. – Львів : ФМІ НАН України, 2014. – С. 51-55.
13. Соколовський Я. І. Математичне моделювання температурно-вологісних полів та реологічної поведінки капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський / Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Матеріали XX Всеукраїнської наукової конференції. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – С. 138-139.
14. Соколовський Я. І. Автоматизація аналізу та моделювання деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів / Я. І. Соколовський, І. Б. Борецька, О. В. Мокрицька, В. М. Шиманський, А. П. Здолбіцький / VI науково-практична конференція з міжнародною участю «Математическое и имитационное моделирование систем» (МОДС 2011). – Чернігів, 2011. – С. 74-75.
15. Соколовський Я. І. Автоматизована система моделювання взаємозв'язаних деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів у капілярно-пористих матеріалах / Я. І. Соколовський, О. В. Мокрицька, М. Ф. Сало, В. М. Шиманський, А. П. Здолбіцький / Матеріали науково-практичної конференції "Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та освіті" (INFOTECH 2011). – Севастополь, 2011. – С. 105.
16. Соколовський Я. І. Математичне моделювання напружено-деформівного стану у середовищах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський, А. П. Здолбіцький, О. П. Сикала / Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту: Матеріали міжнародної наукової конференції. – Херсон : ХНТУ, 2013. – С. 292-294.
17. Соколовський Я. І. Математичне моделювання неізотермічного вологоперенесення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський / Сучасні

проблеми прикладної математики та інформатики: Матеріали XIX Всеукраїнської наукової конференції. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2013. – С. 119-120.

18. Соколовський Я. І. Математичне моделювання тепловологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський, І. М. Крошній, М. Ф. Сало / Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: Материалы международной научной конференции. – Т. 1. – Херсон : ХНТУ, 2011. – С. 117-119.

19. Соколовський Я. І. Моделювання реологічної поведінки капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський, І. Б. Борецька, В. Я. Семенюк / Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы обчислювального інтелекту: Матеріали міжнародної наукової конференції. – Херсон : ХНТУ, 2014. – С. 177-178.

20. Соколовський Я. І. Чисельне моделювання тепломасообмінних процесів з використанням штучних нейронних мереж / Я. І. Соколовський, І. Б. Борецька, І. М. Крошній, В. М. Шиманський, І. Д. Капран / Матеріали науково-практичної конференції “Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та освіті” (INFOTECH 2011). – Севастополь, 2011. – С. 104.

21. Шиманський В. М. Чисельне моделювання напружено-деформіного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / В. М. Шиманський / Молодіжний форум «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харків, 2012. – С. 193-194.

## АНОТАЦІЇ

**Шиманський В. М. Математичне моделювання неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю: 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет “Львівська політехніка”, Міністерство освіти і науки України, Львів, 2016.

Дисертацію присвячено вирішенню наукового завдання побудови математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою, зокрема деревини, у процесі сушіння. Для врахування ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу, притаманних зокрема деревині, використано математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку. Отримано математичні моделі неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням їх фрактальної структури. Побудовано скінченно-різницеві апроксимації цих математичних моделей. Розроблено прикладне програмне забезпечення, що ґрунтується на скінченно-різницевому методі предиктор-коректор, для їх реалізації. Воно дає змогу отримати динаміку температури, вологовмісту та компонент напружень, включаючи залишкові напруження, у висушуваній деревині з урахуванням її фрактальної структури. Апроксимовано експериментальні дані повзучості деревини за допомогою дробово-експоненціальних операторів, також виявлені залежності між дробовим показником та її породою, температурою і вологовмістом. Проаналізовано характеристики процесу

тепломасоперенесення та напружено-деформівного стану під час сушіння деревини з урахуванням її фрактальної структури за різних термомеханічних параметрів матеріалу, режимів та параметрів агента сушіння. Запропоновано спосіб визначення повних напружень на поверхні висушеної деревини за величиною підведеного механічного зусилля до еталону.

*Ключові слова:* математична модель, фрактальна структура, інтегродиференціювання дробового порядку, неізотермічне вологоперенесення, в'язкопружне деформування, метод скінченних різниць, процес сушіння.

**Шыманский В. М. Математическое моделирование неізотермического влагопереноса и вязко-упругой деформации в средах с фрактальной структурой.** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности: 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Национальный университет “Львівська політехніка”, Министерство образования и науки Украины, Львов, 2016.

Диссертация посвящена решению научного задания построения математических моделей неізотермического влагопереноса и вязко-упругой деформации в процессе сушки капиллярно-пористых материалов с фрактальной структурой.

Создание адекватных математических моделей процесса теплопереноса и напряженно-деформированного состояния в процессе сушки древесины осложняется тем, что древесина характеризуется сложной природой пространственных корреляций, наличием эффектов «памяти», самоорганизации и сверхмедленных процессов диффузионного типа. Для построения соответствующих математических моделей целесообразно использовать математический аппарат интегродифференцирования дробного порядка, который позволяет учесть все упомянутые свойства материалов.

Опираясь на основные законы термодинамики, усовершенствована математическая модель неізотермического влагопереноса в процессе сушки капиллярно-пористых материалов, учитывающая их фрактальную структуру. Получено конечно-разностную аппроксимацию системы дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка и граничных условий данной задачи. Разработано прикладное программное обеспечение для численной реализации моделируемого процесса.

На основе методов математической физики и механики наследственных сред разработана новая математическая модель вязкоупругой деформации капиллярно-пористых материалов, учитывающая их фрактальную структуру. Также создано прикладное программное обеспечение для ее реализации, основанное на конечно-разностном методе предиктор-корректор. Проведено валидацию и верификацию математических моделей путем сопоставления результатов с экспериментальными данными и результатами полученными другими исследователями.

Аппроксимированы экспериментальные данные ползучести древесины с помощью дробно-экспоненциальных операторов, а также выявлена зависимость между дробным показателем и ее породой, температурой и влажностью.

Проанализировано динамику температуры, влагосодержания и компонент напряжений при сушке древесины с учетом ее фрактальной структуры в зависимости от ее термомеханических свойств и параметров агента сушки. Также исследовано поведение соответствующих характеристик для двухступенчатого режима сушки древесины с учетом ее фрактальной структуры.

Предложена методика прямого измерения полных напряжений на поверхности высушенной древесины по величине подведенного механического усилия к эталону, изготовленного из измеряемого материала. Разработано программное обеспечение для определения рациональных настроек агента сушки и регулирования процесса перехода к следующему режиму сушки, что в свою очередь приводит к повышению качества продукции и энергоэффективности этого технологического процесса.

*Ключевые слова:* математическая модель, фрактальная структура, интегрирование дробного порядка, неизотермический влагоперенос, вязкоупругое деформирование, метод конечных разностей, процесс сушки.

**Shymanskyi V. M. Mathematical modeling of non-isothermal moisture transfer and visco-elastic deformation in materials with fractal structure.** – On the rights of manuscript.

Dissertation for the degree of Ph.D., specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2016.

The dissertation is devoted to solving scientific task of constructing mathematical models non-isothermal moisture transfer and visco-elastic deformation in capillary-porous materials with fractal structure which include a wood during drying. The mathematical tools of integration and differentiation of fractional order for accounting the effects of "memory", self-organization and deterministic chaos inherent in the wood was used. The mathematical models of non-isothermal moisture transfer and visco-elastic deformation in capillary-porous materials during drying which consider their fractal structure was received. The finite-difference approximations for those mathematical models were built. The application software which based on predictor-corrector finite-difference method for numerical realization those models was developed. It enables to get the dynamics of temperature, moisture and stress components, including residual stresses, in the drying wood with accounting its fractal structure. The experimental data of wood creep was approximated using fractional exponential operators also identified relationship between the fractional component and wood species, temperature and humidity fields. The characteristics of the heat and moisture transfer processes and stress-strain state during wood drying with accounting the fractal structure of material with different thermo-mechanical material parameters, drying modes and drying agent parameters were analyzed. The method of determining the full stress on the surface of dried lumber by the value of mechanical force conducted to standard was proposed.

*Keywords:* mathematical model, fractional structure, integration and differentiation of fractional order, non-isothermal moisture transfer, visco-elastic deformation, finite difference method, drying process.

Підписано до друку 04.02.2016 р.  
Формат 60×90 1/16. Папір офсетний.  
Друк на різнографі. Умовн. друк. арк. 1,5. Обл.-видав. арк. 0,89.  
Тираж 100 прим. Зам. 160052.

Поліграфічний центр  
Видавництва Національного університету "Львівська політехніка"  
вул. Ф.Колесси, 4, 79013, Львів  
*Регістраційне свідоцтво серії ДК № 4459 від 27.12.2012 р.*