**УДК 528.06+528.1**

В. А. РЯБЧІЙ[1], В. В. РЯБЧІЙ[2*]

[1] Кафедра геодезії, Державний вищий навчальний заклад "Національний гірничий університет", просп. К. Маркса, 19, Дніпропетровськ, Україна, 49005.
[2] Кафедра геодезії, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, Львів, Україна, 79013, тел.: +38(056)3730720, +38(0562)472411; ел. пошта: ryabchyV@nmu.org.ua

# МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ПОДВІЙНИХ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ

**Мета**. Виконати дослідження із застосуванням критеріїв значимості систематичних похибок при математичному опрацюванні результатів подвійних рівноточних вимірів та встановити найбільш раціональний з них. При цьому, розробити методику виключення систематичної похибки з середніх значень подвійних рівноточних вимірів. **Методика** вирішення порушених питань ґрунтується на порівняльному аналізі формул, результатів експериментальних обчислень, розробці пропозицій та висновків. Встановлено, що, застосовуючи наведений у літературі критерії значимості систематичної похибки, можна одержати суперечливі висновки. **Результати**. Встановлено теоретичне значення кількості вимірів залежно від прийнятої довірчої ймовірності, коли висновки за критеріями значимості систематичної похибки при подвійних рівноточних вимірах збігаються. Виконані дослідження надають можливість якісно та більш точно опрацювати результати подвійних рівноточних вимірів. **Наукова новизна**. Удосконалено обґрунтування вибору критерію значимості систематичної похибки при подвійних рівноточних вимірах. Розроблена методика виключення систематичної похибки з середніх значень подвійних рівноточних вимірів та обчислення значення ймовірності, яка враховується при побудові довірчого інтервалу. **Практична значущість** роботи полягає в одержанні точніших результатів при математичному опрацюванні подвійних рівноточних вимірів, їх оцінки точності та детальнішому дослідженні таких вимірів завдяки удосконаленню методики та формул, наведених у літературі. Запропоновано вибір критерію значимості систематичної похибки при подвійних рівноточних вимірах залежно від кількості вимірів і розрахованої довірчої ймовірності. Крім цього, наведена методика виключення систематичної похибки з середніх значень подвійних рівноточних вимірів зменшує нев'язку в тих функціональних умовах, які є між відповідними середніми значеннями цих вимірів.

*Ключові слова*: подвійні рівноточні виміри; систематична похибка; критерії значимості систематичної похибки; ймовірність.

## Вступ

Під час виконання деяких рівноточних вимірів, зокрема і високоточних при спостереженнях за осіданням марок на спорудах, необхідні величини вимірюються двічі. У цьому випадку оцінку точності можна виконувати, використовуючи різниці між цими вимірами.

Будь-який процес виконання рівноточних вимірів може супроводжуватися не тільки випадковими похибками, а й систематичними. Не є винятком і подвійні виміри. Тому якщо в результатах подвійних рівноточних вимірів присутня систематична похибка, її слід враховувати під час виконання оцінки точності. Отже, дослідження впливу систематичних похибок на оцінку точності результатів подвійних вимірів є дуже важливим.

Математична обробка і оцінка точності подвійних рівноточних вимірів добре висвітлені у багатьох книгах, підручниках і навчальних посібниках [Большаков В. Д., 1983; Большаков В. Д., Маркузе Ю. И., Голубев В. В., 1989; Видуев Н. Г., Кондра Г. С., 1969; Войтенко С. П., 2003; Гайдаев П. А., Большаков В. Д., 1969; Зазуляк П. М., Гавриш В. І., Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д., 2007; Мазмишвили А. И., 1978; Папазов М. Г., Могильный С. Г., 1968; Рябчій В. А., Рябчій В. В., 2006; Смирнов Н. В., Белугин Д. А., 1969]. Також у літературі вказуються критерії, за якими визначається значимість систематичної похибки. Якщо величина систематичної похибки значима, то при оцінці точності її необхідно вилучати. А як же самі виміри? З них необхідно виключати систе-

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

матичну похибку чи ні? Якщо з вимірів не виключати систематичну похибку, то результати подвійних рівноточних вимірів і відповідні результати оцінки точності не будуть відповідати один одному.

При цьому, існують різні критерії визначення значимості систематичної похибки і при їх застосуванні одержуються протилежні висновки. Також у деяких наведених критеріях використовують довірчу ймовірність, вибір значення якої не обґрунтовується.

**Мета роботи**

Обґрунтувати раціональний вибір критерію визначення систематичної похибки та визначити, як її виключати з середніх значень подвійних рівноточних вимірів.

**Основні формули**

За рівноточних подвійних вимірів систематична похибка $\sigma$ обчислюється фактично за формулою простої арифметичної середини [Большаков В. Д., 1983; Войтенко С. П., 2003; Зазуляк П. М., Гавриш В. І., Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д., 2007 та ін.]:

$$\sigma = \frac{\Sigma d}{n}, \qquad (1)$$

де $d$ – значення різниці у парах; $n$ – кількість пар.

У випадку значимості систематичної похибки її необхідно виключати з кожної різниці:

$$d_i' = d_i - \sigma\ . \qquad (2)$$

У деяких посібниках [Большаков В. Д., Маркузе Ю. И., Голубев В. В., 1989 та ін.] наведені критерії визначення значимості систематичної похибки при рівноточних вимірах, тобто коли нею можна нехтувати, а коли її треба виключати:

$$|\Sigma d| \le 0{,}25\Sigma|d|\,, \qquad (3)$$

$$|\Sigma d| \le 1{,}25 t_\beta \frac{\Sigma|d|}{\sqrt{n}} \qquad (4)$$

або

$$|\Sigma d| \le 2{,}5 \frac{\Sigma|d|}{\sqrt{n}}\,, \qquad (5)$$

де $t_\beta$ – значення коефіцієнта Стьюдента, який встановлюється за значеннями кількості надлишкових вимірів і довірчої ймовірності.

Обґрунтування вибору значення довірчої ймовірності у зазначеній вище літературі не наводиться. Автори [Видуев Н. Г., Кондра Г. С., 1969] указують, що "при використанні сучасної теорії похибок вимірювань досить часто виникають непорозуміння з вибором довірчої ймовірності, тобто з вибором "ступеня впевненості" або "міри ризику".

**Критерії значимості систематичної похибки**

У формулі (5) коефіцієнт 2,5 одержують при кількості пар $n \ge 28$ і коефіцієнті Стьюдента $t_\beta = 2$ (при довірчій ймовірності $\beta = 0{,}95$). Виходить, що критерій (5) можна використовувати тільки при $n \ge 28$ і $\beta = 0{,}95$. За меншої кількості пар рівноточних вимірів та довірчій ймовірності цю формулу використовувати недоречно і необхідно використовувати критерій (3) або (4).

Але результати застосування критеріїв (3) і (4) до деяких рядів рівноточних подвійних вимірів не збігаються, тобто вони протилежні. Частково проблема застосування цих двох критеріїв значимості систематичної похибки (3) і (4) при подвійних рівноточних вимірах наведена у [Івіна Д.С., Рябчій В. В., 2013; Рябчий В. А., Ивина Д. С., 2013]. Для наочності наведемо простий приклад. Сума різниць $\Sigma d$ = 40 мм, сума абсолютних значень різниць $\Sigma|d|$ = 100 мм, кількість пар $n$ = 30, коефіцієнт Стьюдента $t_\beta$ = 2,0 (при довірчій ймовірності $\beta$ = 0,95). Тоді:

$$40 > 0{,}25 \cdot 100 \text{ або } 40 > 25;$$

$$40 < 1{,}25 \cdot 2{,}0 \cdot 100 / \sqrt{30} \text{ або } 40 < 45{,}6.$$

Звідки виходить, що за цими критеріями одержують протилежні результати. Тобто за критерієм (4) систематичною похибкою можна нехтувати, а за критерієм (3) нею нехтувати не можна. Також за інших умов, іншої кількості вимірів ця закономірність здебільшого зберігається. Очевидно, що це є не припустимим. Необхідно користуватись лише одним критерієм, тоді обчислювачі будуть одержувати ті самі результати. Відповідно до [Большаков В. Д., Маркузе Ю. И., Голубев В. В., 1989] автори характеризують перший критерій як більш "жорсткий".

З наведеного вище виходить, що необхідно виконати обґрунтування вибору критеріїв.

Наведемо приклад математичної обробки результатів рівноточних подвійних вимірів при значимості систематичної похибки (табл. 1).

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

*Таблиця 1*

**Вихідні дані та результати обчислень**

*Table 1*

**Initial data and results of calculations**

| № з/п | Перевищення, мм | | Різниці $d$, мм | $d^2$, мм$^2$ | Різниці $d'$, мм | $d'^2$, мм$^2$ | Середні перевищення $\overline{h}$, мм | Виправлені перевищення $\overline{h}_{випр}$, мм |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | прямо, $h$ | зворотно, $h'$ | | | | | | |
| 1 | 1205 | -1202 | 3 | 9 | 1,8 | 3,24 | 1203,5 | 1202,9 |
| 2 | -1492 | 1496 | 4 | 16 | 2,8 | 7,84 | -1494,0 | -1494,6 |
| 3 | 1275 | -1272 | 3 | 9 | 1,8 | 3,24 | 1273,5 | 1272,9 |
| 4 | 1512 | -1515 | -3 | 9 | -4,2 | 17,64 | 1513,5 | 1512,9 |
| 5 | -1490 | 1487 | -3 | 9 | -4,2 | 17,64 | -1488,5 | -1489,1 |
| 6 | 1717 | -1713 | 4 | 16 | 2,8 | 7,84 | 1715,0 | 1714,4 |
| 7 | -1853 | 1855 | 2 | 4 | 0,8 | 0,64 | -1854,0 | -1854,6 |
| 8 | 1311 | -1308 | 3 | 9 | 1,8 | 3,24 | 1309,5 | 1308,9 |
| 9 | -1072 | 1068 | -4 | 16 | -5,2 | 27,04 | -1070,0 | -1070,6 |
| 10 | -1100 | 1103 | 3 | 9 | 1,8 | 3,24 | -1101,5 | -1102,1 |
| ∑ | +13 | -1 | +12 | +106 | 0,0 | +91,60 | +7,0 | +1,0 |

За формулою (1) систематична похибка дорівнює $\sigma = +1{,}2$ мм.

Проконтролювати суму квадратів різниць і суму середніх при рівноточних подвійних вимірах, з яких виключена систематична похибка, можна за наведеними нижче формулами:

$$\Sigma d'^2 = \Sigma d^2 - n\sigma^2, \qquad (6)$$

$$\Sigma \overline{x}_{випр} = \Sigma \overline{x} - \frac{n\sigma}{2}. \qquad (7)$$

Наведемо застосування критеріїв (3) і (4) для даних табл. 1, звідки:

$$12 > 0{,}25 \cdot 32 \text{ або } 12 > 8;$$

$$12 < 1{,}25 \cdot 1{,}8 \cdot 32 / \sqrt{10} \text{ або } 12 < 22{,}8$$

(при $\beta = 0{,}9$).

Застосування цих двох критеріїв знов дають протилежні висновки щодо виключення систематичної похибки, тобто за критерієм значимості систематичної похибки при рівноточних подвійних вимірах (3) систематичною похибкою нехтувати не можна, а за критерієм (4) – можна.

Враховуючи, що перший критерій більш "жорсткий" [Большаков В. Д., Маркузе Ю. И., Голубев В. В., 1989], то застосуємо його і виключимо значення систематичної похибки з різниць подвійних рівноточних вимірів (2) та її половину з середніх значень у парах за такою формулою:

$$\overline{x}_{i_{випр}} = \overline{x}_i - \frac{\sigma}{2}. \qquad (8)$$

Тепер виправлені середні значення будуть відповідати оцінці точності.

Виконані численні експериментальні розрахунки показали, що після виключення систематичної похибки з середніх значень подвійних рівноточних вимірів кутів і перевищень значення нев'язки зменшується на таку величину:

$$\Delta W_{\beta,h} = \frac{n\sigma}{2}. \qquad (9)$$

Запропоновано обчислювати середню квадратичну похибку різниці, одного виміру та середніх значень за такими формулами:

$$m_{d'} = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{n}}, \qquad (10)$$

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{2n}}, \qquad (11)$$

$$m_{\overline{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{n}}. \qquad (12)$$

І хоч $d'$ – це відхилення від простої арифметичної середини, все одно необхідно брати кількість вимірів $n$, а не $(n-1)$. Оскільки $d'$ – це поліпшені різниці, тобто різниці (випадкові похибки) з яких виключена систематична похибка. А як це виконано, це не повинно грати жодної ролі.

Такий підхід підтверджує формула:

$$m_{d'} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \sigma^2}. \qquad (13)$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

За результатами наведеного прикладу значення $m_d$', що обчислені за формулами (10) і (13), збігаються та дорівнюють $m_d$' = 3,03 мм.

У формулі (4) на визначення коефіцієнту Стьюдента $t_\beta$ впливає кількість надлишкових вимірів і значення довірчої ймовірності. За рівноточних подвійних вимірів кожна однорідна величина має один надлишковий вимір, тобто кількість пар і визначає кількість ступенів вільності. Питання встановлення значення довірчої ймовірності до сих пір залишається відкритим, оскільки ніякого обґрунтування в літературі не наведено.

Також може бути ще така ситуація. Більшість різниць або майже всі мають один знак, що явно свідчить про наявність систематичної похибки, а за критерієм значимості (4) виходить, що систематичною похибкою можна нехтувати. Для дослідження цього детальніше проаналізуємо праві частини критеріїв (3) і (4) та з'ясуємо, за якої кількості вимірів ці критерії збігаються. У результаті одержана формула, за якою можна обчислювати кількість вимірів, при якій висновки за критеріями (3) і (4) збігатимуться, тобто

$$n = 25t_\beta^2 . \qquad (14)$$

Результати обчислень наведені у табл. 2.

*Таблиця 2*

**Кількість вимірів залежно від довірчої ймовірності, при якій висновки за критеріями (3) і (4) збігаються**

*Table 2*

**Number of measurements depending on the confidence level at which criteria (3) and (4) match**

| Довірча ймовірність $\beta$ | Коефіцієнт Стьюдента $t_\beta$ | Розрахункова кількість вимірів $n$ |
|---|---|---|
| 0,7 | 1,1 | 30 |
| 0,8 | 1,3 | 42 |
| 0,9 | 1,7 | 72 |
| 0,95 | 2,0 | 100 |
| 0,98 | 2,3 | 132 |
| 0,99 | 2,6 | 169 |
| 0,999 | 3,3 | 272 |

За результатами таких розрахунків, що наведені у табл. 2, можна визначити кількість вимірів або довірчу ймовірність, при яких висновки за критеріями (3) і (4) будуть збігатись.

Спираючись на наведене вище, знов таки можна дійти висновку, якщо фактична кількість вимірів буде менше розрахункової (теоретичної), то необхідно користуватись тільки критерієм значимості систематичної похибки (3), а якщо навпаки, то – двома критеріями (3) і (4).

Але це не означає, що критеріями (4) і (5) можна повністю нехтувати. Залежно від кількості різниць ці критерії можна використовувати для порівнянь, досліджень та аналізу подвійних рівноточних вимірів.

Використовуючи послідовність дій при доведенні критерію (4), можна одержати дві формули побудови теоретичних інтервалів різниць для дослідження спільного впливу випадкових і систематичної похибок, які можна порівнювати між собою та максимальним і мінімальним значеннями різниць:

$$\sigma - \frac{t_\beta m_d}{\sqrt{n}} \le \overline{\sigma} \le \sigma + \frac{t_\beta m_d}{\sqrt{n}} ; \qquad (15)$$

$$\sigma - \frac{1{,}25 t_\beta \Sigma|d|}{n\sqrt{n}} \le \overline{\sigma} \le \sigma + \frac{1{,}25 t_\beta \Sigma|d|}{n\sqrt{n}} . \qquad (16)$$

Але виникає питання: "Які різниці необхідно брати?". Звісно, що на побудову довірчого інтервалу впливають систематичні похибки. Тому у побудові довірчого інтервалу використовувати різниці з виключеними систематичними похибками не коректно. Оскільки систематична похибка обчислюється за фактичними значеннями різниць, з яких вона не виключена, то і обчислювати $m_d$ і $\Sigma|d|$ у формулах (15) і (16) необхідно з використанням фактичних значень різниць. Коефіцієнт Стьюдента необхідно визначати за значенням розрахованої ймовірності. Отже, застосовуючи формули (15) і (16), одержимо:

$$1{,}2 - \frac{1{,}3 \cdot 3{,}26}{\sqrt{10}} \le \overline{\sigma} \le 1{,}2 + \frac{1{,}3 \cdot 3{,}26}{\sqrt{10}}$$

$$\text{або } -0{,}14 \le \overline{\sigma} \le 2{,}54 ;$$

$$1{,}2 - \frac{1{,}25 \cdot 1{,}3 \cdot 32}{10\sqrt{10}} \le \overline{\sigma} \le 1{,}2 + \frac{1{,}25 \cdot 1{,}3 \cdot 32}{10\sqrt{10}}$$

$$\text{або } -0{,}44 \le \overline{\sigma} \le 2{,}84 .$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

За результатами побудованих довірчих інтервалів за формулами (15) і (16) можна відзначити таке. Якщо різниці подвійних рівноточних вимірів (істинні похибки) підкоряються нормальному закону розподілу, то результати повинні збігатись або бути близькими між собою. Значне розходження говорить, що ці різниці не підкорюються нормальному закону розподілу.

Це підтверджує теорема Еддінгтона: "об'єднання декількох груп вимірювань, похибки яких мають нормальний розподіл, в одну групу призводить до нормального розподілу похибок такої групи лише у випадку рівності стандартів усіх окремих груп" [Видуев Н. Г., Кондра Г. С., 1969]. Це слушно, але щодо подвійних вимірів цього недостатньо. Хоча середні квадратичні похибки можуть дорівнювати одна одній, усе ж може бути не однакова відповідність властивостям випадкових похибок тощо.

Крім цього, на підставі аналізу результатів подвійних рівноточних вимірів можна зробити такі припущення. Оскільки обидва ряди подвійних вимірів рівноточні (стандарти кожного ряду однакові), то повинна діяти теорема Еддінгтона. Але з практики вимірів доволі часто буває, що сума усіх різниць зовсім не дорівнює нулю, навіть більше чверті суми їх абсолютних значень, хоча виміри виконані доброякісно. У таких випадках вважають, що присутня систематична похибка. Але можна зробити і таке припущення. Оскільки кількість вимірів незначна, то у кожному ряду подвійних рівноточних вимірів сума їх випадкових похибок може і не дорівнювати нулю. Якщо випадкові похибки у двох рядах різні за знаком, то загальна сума їх різниць буде збільшуватись.

З наведеного вище можна зробити таке припущення. Якщо абсолютна сума різниць знаходиться в межах від нуля до половини суми абсолютних значень різниць, то це може бути не прояв дії систематичної похибки, а результат взаємодії випадкових похибок у своїй сукупності.

### Коефіцієнт кореляції

У підручнику [Большаков В. Д., 1983] наведено, що у випадку, якщо різниці подвійних вимірів є функціями залежних (корельованих) вимірів, то формула обчислення середньої квадратичної похибки різниці $m_d$ буде така:

$$m_d^2 = m_l^2 + m_{l'}^2 - 2m_l m_{l'} r_{l,l'}, \qquad (17)$$

де $m_l$ і $m_{l'}$ – середні квадратичні похибки вимірів; $r_{l,l'}$ – коефіцієнт кореляції.

За умови $m_l = m_{l'} = m$ і позначивши $r_{l,l'} = r$, наведена така формула обчислення середньої квадратичної похибки виміру:

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2n(1-r)}}. \qquad (18)$$

Проаналізуємо ці дві формули. Коефіцієнт кореляції може дорівнювати +1 і –1, тоді середня квадратична похибка різниці $m_d$ може дорівнювати нулю або подвоювати своє значення.

Теоретично можна припустити, що значення середньої квадратичної похибки може подвоїтись, а ось дорівнювати нулю – мало ймовірно, оскільки це суперечить формулі Гаусса:

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}. \qquad (19)$$

Якщо середня квадратична похибка різниці дорівнює нулю, то виходить, що і середня квадратична похибка виміру теж дорівнює нулю, але це також протирічить формулі:

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2n}}. \qquad (20)$$

Виходячи з цього, пропонується не застосовувати коефіцієнт кореляції при оцінці точності подвійних рівноточних вимірів.

### Наукова новизна і практична значущість

Удосконалено обґрунтування вибору критерію значимості систематичної похибки при подвійних рівноточних вимірах. Розроблено методику виключення систематичної похибки з середніх значень подвійних рівноточних вимірів та обчислення значення ймовірності, яку враховують у побудові довірчого інтервалу. Практична значущість роботи полягає в одержанні більш точних результатів під час математичного опрацювання подвійних рівноточних вимірів, їх оцінки точності та детальнішому дослідження таких вимірів завдяки удосконаленню методики та формул, наведених у літературі. Запропоновано вибір критерію зна-

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

чимості систематичної похибки при подвійних рівноточних вимірах залежно від кількості вимірів і розрахованої довірчої ймовірності. Крім цього, наведена методика виключення систематичної похибки з середніх значень подвійних рівноточних вимірів зменшує нев'язку в тих функціональних умовах, які є між відповідними середніми значеннями цих вимірів.

**Висновки та пропозиції**

1. Встановлено, що наведені у літературі критерії значимості систематичної похибки при подвійних рівноточних вимірах (3–5) дають можливість зробити протилежні висновки. Для встановлення значимості систематичної похибки запропоновано використовувати тільки критерій (3). Інші критерії можна використовувати лише для аналізу результатів подвійних рівноточних вимірів та їх дослідження або при кількості вимірів більше за розрахункову (табл. 2).

2. При обчисленні середньої квадратичної похибки різниць, одного виміру і середніх значень (після виключення з них систематичної похибки) суму квадратів виправлених різниць під коренем квадратним необхідно поділити на кількість подвійних рівноточних вимірів, тобто застосовувати формули (10)–(13).

3. Половину значення систематичної похибки подвійних рівноточних вимірів, обчисленого за формулою (1), необхідно виключати з середніх значень кожної пари вимірів (8). У результаті цього оцінка точності відповідатиме обчисленому ряду середніх значень подвійних рівноточних вимірів. Після виключення половини значення систематичної похибки з середніх значень кожної пари подвійних рівноточних вимірів значення нев'язки зменшується.

4. Для дослідження різниць подвійних рівноточних вимірів у побудові довірчого інтервалу для істинного значення (математичного очікування) систематичної похибки доцільно застосовувати формули (15) і (16). При цьому, довірчу ймовірність необхідно обчислювати, але у деяких випадках можна приймати з якихось міркувань.

5. Зроблено гіпотетичне припущення. Якщо сума різниць подвійних рівноточних вимірів знаходиться в межах від нуля до половини суми абсолютних значень різниць, то це може бути не тільки дія систематичної похибки, а і прояв сукупності взаємодії випадкових похибок.

6. При оцінці точності подвійних рівноточних вимірів застосовувати коефіцієнт кореляції недоцільно і некоректно.

Перспектива подальших досліджень полягає у дослідженні математичної обробки результатів подвійних нерівноточних вимірів та їх оцінки точності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Большаков В. Д. Теория ошибок наблюдений: учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / В. Д. Большаков. – М.: Недра, 1983. – 223 с.

Большаков В. Д. Уравнивание геодезических построений: справочное пособие / В. Д. Большаков, Ю. И. Маркузе, В. В. Голубев. – М.: Недра, 1989. – 413 с.

Видуев Н. Г. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений / Н. Г. Видуев, Г. С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.

Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навч. посіб. / С. П. Войтенко. – К.: – КНУБА, 2003. – 216 с.

Гайдаев П. А. Теория математической обработки геодезических измерений / П. А. Гайдаев, В. Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.

Зазуляк П. М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навчальний посібник / П. М. Зазуляк, В. І. Гавриш, Е. М. Євсєєва, М. Д. Йосипчук. – Л.: Вид-во "Растр-7", 2007. – 408 с.

Івіна Д. С. Порівняння критеріїв значимості систематичної похибки при оцінці точності за різницями подвійних рівноточних вимірів [текст] / Д. С. Івіна, В. В. Рябчій // Тези доповідей XIII Міжнародної науково-практичної конференції молодих учених і студентів "Політ. Сучасні проблеми науки", Київ, 3-4 квітня 2013 р. – С. 319.

Мазмишвили А. И. Теория ошибок и метод наименьших квадратов / А. И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1978. – 311 с.

Папазов М. Г. Теория ошибок и способ наименьших квадратов / М. Г. Папазов, С. Г. Могильный. – М.: Недра, 1968. – 302 с.

Рябчий В. А. Сравнение критериев значимости систематической ошибки при оценке точности по разностям двойных равноточных измерений [текст] / В. А. Рябчий, Д. С. Ивина // Збірник праць IV Всеукраїнської науково-технічної конференції студентів, аспірантів і молодих вчених "Наукова весна 2013", Дніпропетровськ, 28–29 березня 2013 р. – С. 176–177.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Рябчій В. А. Ймовірно-математичний аналіз обмеженої кількості результатів нерівноточних вимірів однієї величини [текст] / В. А. Рябчій, В. В. Рябчій // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: зб. наук. пр. зах. геодез. т-ва УТГК. – Л.: Вид-во Львівської політехніки, 2013. – Вип. II. – С. 25–30.

Рябчій В. А. Теорія похибок вимірювань: навчальний посібник / В. А. Рябчій, В. В. Рябчій. – Дніпропетровськ: Нац. гірн. ун-т, 2006. – 166 с.

Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии / Н. В. Смирнов, Д. А. Белугин. – М.: Недра, 1969. – 379 с.

В. А. РЯБЧИЙ[1], В. В. РЯБЧИЙ[2*]

[1] Кафедра геодезии, Государственное высшее учебное заведение “Национальный горный университет”, пр. К. Маркса, 19, Днепропетровск, Украина, 49005

[2] Кафедра геодезии, Национальный университет “Львовская политехника”, ул. С. Бандеры, 12, Львов, Украина, 79013, тел.: +38(056)3730720, +38(0562)472411; эл. почта: RyabchyV@nmu.org.ua

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ДВОЙНЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

**Цель**. Выполнить исследования применения критериев значимости систематических погрешностей при математической обработке результатов двойных равноточных измерений и установить наиболее рациональный из них. При этом определить как вычислять доверительную вероятность и разработать методику исключения систематической погрешности из средних значений двойных равноточных измерений. **Методика** решения затронутых вопросов базируется на сравнительном анализе формул, результатов экспериментальных вычислений, разработке предложений и выводов. Установлено, что приведенные в литературе критерии значимости систематической погрешности не совпадают. **Результаты**. Установлено теоретическое значение количества измерений в зависимости от принятой доверительной вероятности, когда критерии значимости систематической погрешности при двойных равноточных измерениях совпадают. Выполненные исследования дают возможность качественно и более точно обработать результаты двойных равноточных измерений. **Научная новизна**. Усовершенствовано обоснование выбора критерия значимости систематической погрешности при двойных равноточных измерениях. Разработана методика исключения систематической погрешности из средних значений двойных равноточных измерений и вычисления значения доверительной вероятности. **Практическая значимость** работы заключается в получении более точных результатов при математическом обработке двойных равноточных измерений, их оценки точности и более детальном исследовании таких измерений благодаря усовершенствованию методики и формул, приведенных в литературе. Предложен выбор критерия значимости систематической погрешности при двойных равноточных измерениях в зависимости от количества измерений и рассчитанной доверительной вероятности. Кроме этого, приведенная методика исключения систематической погрешности из средних значений двойных равноточных измерений уменьшает невязку в тех функциональных условиях, которые есть между соответствующими средними значениями этих измерений.

Ключевые слова: двойные равноточные измерения; систематическая погрешность; критерии значимости систематической погрешности; доверительная вероятность; коэффициент корреляции.

V. A. RIABCHII[1], V. V. RIABCHII[2*]

[1]Department of Geodesy, State Higher Educational Institution “National Mining University”, av. K. Marksa, 19, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49005

[2]Department of Geodesy, National University “Lviv polytechnic”, S. Bandery Str., 12, Lviv, Ukraine, 79013, tel.: +38(056)3730720, +38(0562)472411; e-mail: RyabchyV@nmu.org.ua

## MATHEMATICAL PROCESSING OF RESULTS OF DOUBLE EQUALLY ACCURATE MEASUREMENTS

**Purpose**. Run trial of criteria importance of systematic errors in the mathematical processing of results of measurements of double equally accurate and install the most efficient one. Thus, to determine how to calculate the probability of trust and develop a method of exclusion bias of the mean values of double equally accurate measurements. **Methods** of resolving the issues raised based on the comparative analysis formulas, experimental results of calculations, developing proposals and reports. Established that the literature significance tests are not the same bias. **Results**. Established theoretical value measurements based on the number of accepted of confidence as

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

significance tests bias in double equally accurate dimensions match. The research quality and enable more accurate process results double equally accurate measurements. **Scientific novelty**. Improved selection criteria justify the importance of systematic error in the double equally accurate dimensions. The method of exclusion bias of the mean values of double equally accurate measurements and calculate the value of confidence. **The practical significance** of the work is to obtain more accurate results in mathematical processing of double equally accurate measurements, their evaluation of accuracy and more detailed investigation of these measurements through improved methods and formulas described in the literature. A selection criterion of significance bias in double equally accurate dimensions depending on the number of measurements and calculated confidence probability. In addition, the method is shown exclude systematic error of the mean values of double equally accurate measurements reduces the residual functional in those terms that are between the respective average values of these measurements.

Keywords: double equally accurate measurements; systematic error; significance tests bias; confidence probability; correlation coefficient.

REFERENCES

Bol'shakov V. D. Teorija oshibok nabljudenij: ucheb. dlja vuzov. 2-e izd., pererab. i dop. [Theory of errors of observation Proc. for high schools. 2nd ed., Rev. and add]. Moscow: Nedra, 1983, 223 p.

Bol'shakov V. D., Ju. I. Markuze, V. V. Golubev. Uravnivanie geodezicheskih postroenij: spravochnoe posobie [Adjustment of geodetic constructions: handbook]. Moscow: Nedra, 1989, 413 p.

Viduev N. G. Verojatnostno-statisticheskij analiz pogreshnostej izmerenij [Probabilistic and statistical analysis of measurement errors]. NG Mind GS Kondra. Moscow: Nedra, 1969, 320 p.

Voitenko S. P. Matematychna obrobka heodezychnykh vymiriv. Teoriia pokhybok vymiriv: navchalnyi posibnyk [Mathematical processing of geodetic measurements. Theory of measurement errors: a tutorial]. Kyiv: KNUBA, 2003, 216 p.

Gajdaev P. A., Bol'shakov V. D. Teorija matematicheskoj obrabotki geodezicheskih izmerenij [The theory of mathematical processing of geodetic measurements ]. Moscow: Nedra, 1969, 400 p.

Zazuliak P. M., Havrysh V. I., Yevsieieva E. M., Yosypchuk M. D. Osnovy matematychnoho opratsiuvannia heodezychnykh vymiriuvan: navchalnyi posibnyk [Fundamentals of mathematical processing of geodetic measurements: a tutorial]. Lviv: Vyd-vo "Rastr-7", 2007. – 408 s.

Ivina D. S., Riabchii V. V. Porivniannia kryteriiv znachymosti systematychnoi pokhybky pry otsintsi tochnosti za riznytsiamy podviinykh rivnotochnykh vymiriv [Comparison of criteria importance of systematic error in assessing the accuracy of measuring differences double rivnotochnyh [text]. Tezy dopovidei XIII Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii molodykh uchenykh i studentiv "Polit. Suchasni problemy nauky" [Proceedings of XIII International scientific conference of young scientists and students "Flight. Challenges of Science"], Kyiv, 3–4 April 2013, P. 319.

Mazmishvili A. I. Teorija oshibok i metod naimen'shih kvadratov [The theory of errors and least squares method]. Moscow: Nedra, 1978, 311 p.

Papazov M. G., Mogil'nyj S. G., Teorija oshibok i sposob naimen'shih kvadratov [The theory of errors and the method of least squares]. Moscow: Nedra, 1968, 302 p.

Rjabchij V. A., Ivina D. S. Sravnenie kriteriev znachimosti sistematicheskoj oshibki pri ocenke tochnosti po raznostjam dvojnyh ravnotochnyh izmerenij [tekst] [Probability theory and mathematical statistics in the annex to geodesy]. Zbirnyk prats IV Vseukrainskoi naukovo-tekhnichnoi konferentsii studentiv, aspirantiv i molodykh vchenykh "Naukova vesna 2013" [Proceedings of the IV All-Ukrainian scientific-technical conference of students, graduate students and young scientists "Science Spring 2013"], Dnipropetrovsk, 28-29 March 2013, pp. 176–177

Riabchii V. A., Riabchii V. V. Ymovirno-matematychnyi analiz obmezhenoi kilkosti rezultativ nerivnotochnykh vymiriv odniiei velychyny [tekst] [Probably, a limited number of mathematical analysis results nerivnotochnyh a value measurements [text] ]. Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva: zb. nauk. pr. Zakh. heodez. t-va UTHK. – L.: Vyd-vo Lvivskoi politekhniky [Modern achievements of geodetic science and industry: Coll. Science. pr. Zech. heodez. UTHK of the Society. – L .: Izd Lviv Polytechnic National University], 2013, Vol. II, pp. 25–30.

Riabchii V. A., Riabchii V. V. Teoriia pokhybok vymiriuvan: navchalnyi posibnyk [Theory of measurement errors: a tutorial ]. Dn-sk: Nats. hirn. un-t, 2006, 166 p.

Smirnov N. V., Belugin D. A. Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika v prilozhenii k geodezii [Probability theory and mathematical statistics in the annex to geodesy ]. Moscow: Nedra, 1969, 379 p.

Надійшла 03.12.2014 р.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua