

Є. В. Харченко, В. І. Корсак
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра опору матеріалів

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЗГИНУ ПРУЖНОГО СТРИЖНЯ

© Харченко Є. В., Корсак В. І., 2015

Досліджено геометрично нелінійний згин тонкого стрижня навантаженого зосередженою силою. Наведені аналітичні розв'язки задачі нелінійного згину тонкого стрижня під дією зосередженого навантаження. Досліджена задача при довільному куті між силою та дотичною до лінії стрижня. Рішення записані в єдиному параметричному вигляді та виражені через еліптичні функції Якобі.

Ключові слова: нелінійний згин тонкого стрижня, аналітичні розв'язки.

Investigated geometrically nonlinear bending thin rod with a load concentrated force. Presented exact analytical solution of the problem of nonlinear thin rod bending under concentrated load. The problem with an arbitrary angle between the force and the tangent line to the rod. Decisions are recorded in a single parametric form and expressed in terms of Jacobi elliptic functions.

Key words: nonlinear bending thin rod, analytical solution.

Вступ. У наш час актуальними є дослідження пов'язані з вивченням складних динамічних процесів та структур з нелінійними властивостями. Такі задачі є важливими як у теоретичному, так і практичному відношенні, однак точні їхні розв'язки одержати досить складно. Подібні задачі дуже часто вирішуються наближеними або чисельними методами, і тільки деякі з них вдалося розв'язати аналітично.

Розрахунковою схемою багатьох елементів будівельних споруд та машинобудівних конструкцій (листових ресор, пружних муфт, пружних елементів приладів мікромеханіки та т.п.) є пружний стрижень (консольна балка), що працює на згин і при великих прогинах має прогресивну пружну характеристику, за рахунок власної природної геометричної не лінійності, з параметрами, що підходять для використання його як елемента змінної жорсткості.

В цьому контексті не аби яке значення становить аналітичний метод визначення точних та наближених залежностей для форм згину, максимального згинального моменту та потенційної енергії деформації стрижня в залежності від значення та способу (умов) прикладання навантаження.

Задача про згин стрижня являється однією з актуальних задач розрахунку конструкцій. Як правило, такі задачі розв'язуються на базі наближених лінеаризованих рівнянь рівноваги для зігнутих стержнів, що приводять до розв'язків у вигляді поліномів. Найчастіше всього використовуються саме такі розв'язки. Однак в деяких випадках вдалося отримати точні розв'язки нелінійних рівнянь, виражені у квадратурах [10–13], або в еліптичних інтегралах [1–2]. В останньому випадку рішення визначалися трьома параметрами, які неявним способом пов'язані з граничними умовами, значенням діючої сили та довжиною стрижня за допомогою допоміжних таблиць і номограм. Усі ці розв'язки мають громіздкий вигляд і важкодоступні для інженерів - практиків, і тому до останнього часу вирішувалися задач отримання наближених розв'язків навіть для таких стандартних характеристик, як максимальний прогин стрижня [16].

Подальший розвиток геометрично нелінійна теорія згину тонких стержнів отримала в роботах [5, 6, 7, 8, 9]. Застосовуючи статичний критерій стійкості стержнів, оснований на рівнянні рівноваги типу нелінійного маятника, у цих роботах були отримані точні аналітичні розв'язки форми згину стрижня під дією постійної та слідкуючої сили, через еліптичні інтеграли та функції Якобі, що залежать від трьох параметрів:

- модуля еліптичних функцій, що визначається кутом слідкування зовнішньої сили;
- амплітуди еліптичних функцій, що визначається кутом навантаження зовнішньої сили, що своєю чергою непрямым способом визначають величину навантаження, ейлеровою критичною силою та модою рішення;
- приведеною до довжини стрижня координатою точки стрижня.

Сьогодні відомі досить ефективні, швидкі алгоритми для обчислення еліптичних функцій та інтегралів, що дозволяє створити ефективний пакет прикладних програм візуалізації точних розв'язків для згину тонких стержнів. В наш час, коли перед конструкторами стоять завдання оптимізувати будівельні споруди та машинобудівні конструкції, завдання точного аналітичного розв'язку рівняння нелінійного згину стержнів має явно виражене прикладне інженерне значення, оскільки точні розв'язки в ряді випадків значно відрізняються від наближених. Тому порівняння точних розв'язків з наближеними може дозволити оцінити достовірність наближених рішень та знайти критерії та ті області параметрів де необхідно використовувати точні рішення чи можливе використання певного наближеного розв'язку, що дозволить уникнути помилок та підібрати оптимальні характеристики об'єктів що проектуються.

Робота присвячена:

- точному аналітичному розв'язку задачі нелінійного згину тонкого пружного стрижня під дією довільної сили;
- дослідження впливу орієнтації навантаження та способу її прикладання на геометрію зігнутої лінії стрижня – пружної кривої;
- дослідження властивостей пружної лінії з лінійною залежністю кривизни від ординати лінії;
- наближеному розв'язку задачі нелінійно згину тонкого пружного стрижня під дією довільної сили, при його “малих” викривленнях.

Загальний рішення нелінійної задачі згину стрижня. Розглянемо тонкий прямий нерозтяжний стержень довжиною L та постійною згинальною жорсткістю $H = EJ$, що визначається добутком модуля пружності першого роду E та моменту інерції поперечного перерізу J відносно головної центральної осі перпендикулярної до площини дії згинального моменту (рис. 1, а).

Стержень жорстко закріплений на лівому кінці, а на правому кінці вільний та навантажений зосередженою силою P , що утворює кут φ_0 з віссю недеформованого стрижня та кут α_0 з дотичною до пружної лінії стрижня, яка у свою чергу утворює кут θ_0 з віссю недеформованого стрижня (кут повороту вільного кінця).

Параметрами навантаження стрижня будуть: сила P , довжина L та кути α_0 або φ_0 , а параметром стану - кут θ_0 , причому з означень кути α_0 , θ_0 та φ_0 пов'язані співвідношенням:

$$\alpha_0 = \theta_0 + \varphi_0 \quad (1)$$

Єдиним незалежним параметром будемо вважати зосереджену силу P , а параметри L і α_0 або φ_0 можуть бути як незалежними так і перебувати в залежності як один від одного, так і від параметрів P і θ_0 .

У загальному випадку прикладення зосередженої сили слід розрізняти три види навантаження:

- 1) згин постійною за напрямком силою, коли вектор сили переміщається в процесі згину паралельно до самого себе – $\varphi_0 = \text{const}$, зокрема до цього випадку належить поздовжній стиск ($\varphi_0 = 0$) та поперечний згин ($\varphi_0 = \pi/2$);

2) згин слідкуючою силою, коли вектор сили зберігає в процесі згину постійний кут з напрямком пружної лінії в точці її прикладання сили, тобто слідкує за поворотом відповідного січення стрижня – $\alpha_0 = const$, зокрема до цього ж випадку відноситься поздовжній стиск слідкуючою силою, що стежить ($\alpha_0 = 0$) та поперечний згин слідкуючою силою ($\alpha_0 = \pi/2$);

3) загальний випадок згину, коли вектор сили не залишається паралельним до самого себе $\varphi_0 \neq const$ і не стежить за поворотом пружної лінії $\alpha_0 \neq const$.

В кожному з цих видів навантаження можуть мати місце наступні випадки:

а) точка прикладання сили увесь час пов'язана з певною точкою пружної лінії $L = const$;

б) точка прикладання сили переміщується уздовж пружної лінії $L \neq const$.

Значення кута φ_0 для всіх можливих видів навантаження знаходиться в діапазоні:

$$\pi \geq \alpha_0 \geq -\pi, \tag{2}$$

а кут φ_0 може змінюватися в діапазоні:

$$\pi \geq \varphi_0 \geq -\pi. \tag{3}$$

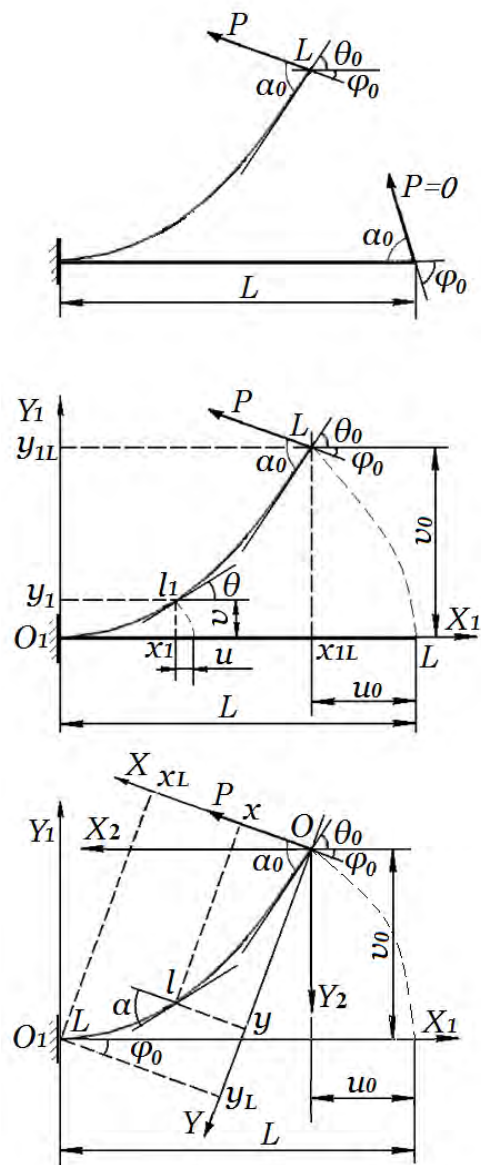


Рис. 1. Схема навантаження стрижня

Найбільш важливо для практичного застосування є визначення статичних характеристик при згині, тобто залежності поздовжнього u_0 , поперечного v_0 та кутового θ_0 переміщень вільного кінця стрижня, максимального згинального моменту M_{\max} , а також потенційної енергії деформації U від величини сили та способу її прикладення $-u_0 = u_0(P), v_0 = v_0(P), M_{\max} = M_{\max}(P), \theta_0 = \theta_0(P)$ та $U = U(P)$ (рис. 1, б).

При розрахунках на міцність та жорсткість як при статичному, так і динамічному навантаженні стрижня зазначені характеристики будуть служити вхідними розрахунковими характеристиками.

При плоскому згині прямого стрижня умова рівноваги задається рівнянням Я. Бернуллі [15]:

$$\chi = K^* = \frac{M}{H}, \quad (4)$$

де χ – кривизна в даній точці пружно зігнутого стрижня, M – згинальний момент у даному перерізі.

Кривизна характеризує швидкість зміни кута нахилу дотичної ζ по довжині l пружної лінії $x(y)$:

$$\chi = \frac{d\zeta}{dl} = \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (5)$$

В системі координатних осей пов'язаних з віссю стрижня в недеформованому стані (рис 1, б) функція зміни кривизни K^* визначається виразом [2]:

$$K^* = p[(y_{1L} - y_1) \cos \varphi_0 + (x_{1L} - x_1) \sin \varphi_0] \quad (6)$$

а рівняння рівноваги початково прямого стрижня має вигляд [15]:

$$\frac{d^2\theta(l_1)}{dl_1^2} = -\omega_0^2 \sin(\theta + \varphi_0) \quad (7)$$

при граничних умовах на початку координат $l_1 = 0$ та кінці стрижня $l_1 = L$:

$$\theta(0) = 0, \quad \frac{d\theta}{dl_1} = 0 \quad (7.1)$$

де x_1, y_2 – координати точки пружної лінії, x_{1L}, y_{1L} – координати точки прикладання сили (кінця стрижня), θ – кут між дотичною в поточній точці до лінії стрижня та віссю $0_1, X_1, \varphi_0$ – кут між напрямком дії сили P та віссю $0_1, X_1, l_1$ – довжина вздовж лінії стрижня, відрахована від точки $0_1, \omega_0 = \sqrt{P/H}$.

Параметри ω_0 і φ_0 , що входять в праву частину рівняння рівноваги (7), а також параметри L та θ_0 , що входять у граничні умови (7.1), (7.2) та (7.3) у кожному розглядуваному рівноважному стані слід вважати постійними величинами. Функція $\theta = \theta(l_1)$, що є рівняння (7) при граничних умовах (7.1) і (7.2) визначає рівняння пружної лінії $y_1 = y_1(x_2)$ в залежності від трьох параметрів: ω_0, L та φ_0 .

Оскільки права частина рівняння (7) містить параметр φ_0 , а у граничні умови (7.1) входить параметр L , які в загальному випадку навантаження можуть бути взаємозалежними параметрами тобто визначаються довільними залежностями $\varphi_0 = \varphi_0(\omega_0, L)$, або $L = L(\omega_0, \varphi_0)$, то задача

визначення геометрії осі деформованого стрижня (задача еластики - відновлення лінії за заданою функцією зміни її кривизни) у системі координатних осей пов'язаних з віссю стрижня в недеформованому стані не надає розв'язок у загальному випадку навантаження.

У системі координатних осей зв'язаних напрямком навантаження (рис. 1, в) функція зміни кривизни K^* визначається простим виразом:

$$K^* = \omega_0^2 y \quad (8)$$

де y – ордината точки пружної лінії.

Використовуючи математичний вираз визначення кривизни χ (5) та функції зміни кривизни K^* (8), рівняння рівноваги (4) у системі координатних осей, пов'язаних з напрямком навантаження, приведемо до вигляду:

$$\chi = \frac{d\alpha}{dl} = \omega_0^2 y, \quad (9)$$

де α – кут між дотичною в поточній точці до лінії стрижня та віссю OX , l – довжина уздовж лінії стрижня відрахована від точки.

Після диференціювання (9) по l та використовуючи очевидне співвідношення $dy/dl = \sin \alpha$ отримуємо рівняння нелінійного математичного маятника:

$$\frac{d^2\alpha}{dl^2} = -\omega_0^2 \sin \alpha \quad (10)$$

з початковими умовами у початку координат зв'язаних з напрямком навантаження:

$$l = 0, \alpha(0) = \alpha_0, d\alpha/dl = 0 \quad (11)$$

У розглядуваній задачі рівняння (10) описує не коливальний процес кутового відхилення маятника α від положення рівноваги $\alpha = 0$, а просторову залежність – залежність кута нахилу пружної лінії стрижня від координати l відрахованої вздовж його осі.

Ще одна особливість рівняння рівноваги в системі координатних осей пов'язаних з напрямком навантаження (10) на відміну від рівняння рівноваги в системі координатних осей пов'язаних з віссю недеформованого стрижня (7), полягає у тому, що доводиться мати справу з не крайовою задачею, коли задані граничні умови на двох кінцях стрижня, тобто при $l = 0$ та $l = L$ – умови (7.1), а з задачею Коші, коли задані початкові умови в одній точці – початку координат – умови (11), що дозволяє виключити з рівняння пружної лінії балки параметр.

Рівняння (10) при граничних умовах (11) має розв'язок [17]:

$$a(l) = 2 \arcsin(k \times \operatorname{sn}[K(k) - \omega_0 l; k]) \quad (12)$$

де $\operatorname{sn}(F, k) = \sin[\operatorname{am}(F, k)]$ – еліптичний синус Якобі; $F = F(y, k)$ та $K(k)$ - неповний та повний еліптичний інтеграл першого роду з модулем $k = k(\alpha_0 = \sin(\alpha_0 / 2))$ та амплітудою $\operatorname{am}(F, k) = y$ та $\operatorname{am}(K(k), k) = \frac{\pi}{2}$ відповідно:

$$F(y, k) = \int_0^y \frac{d\psi}{1 - k^2 \sin^2 \psi}; \quad K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad (13)$$

Оскільки еліптичний синус Якобі $\operatorname{sn}(F, k)$ являє собою періодичну функцію з одиничною амплітудою та періодом $4K(k)$ то вираз (12) визначає періодичну неізохорну функцію з амплітудою α_0 та періодом $T = T(\alpha_0)$ (частотою $\omega = \omega(\alpha_0)$):

$$T = T(\alpha_0, \omega_0) = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{\omega} T_0 K(k) = 4 \frac{K(k)}{\omega_0}; T_0 = T_0(\omega_0) = 2\pi / \omega_0; \quad (14)$$

$$\omega = \omega(\alpha_0) = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{K(k)}$$

Залежності $T/T_0 = f_1(\alpha_0)$ та $\omega/\omega_0 = f_2(\alpha_0)$, показані на рис. 2, з якого випливає що період $T = T(\alpha_0)$ зростає з ростом амплітуди α_0 і при межі $\alpha_0 \rightarrow \pi$ прямує до нескінченності, а частота ω відповідно зменшується і при зазначеній межі прямує до нуля.

Оскільки еліптичний синус Якобі $sn(F, k)$, при $k < 0.92 (\alpha_0 < \frac{3}{4}\pi)$, практично не відрізняється від тригонометричної функції $\sin(f)$, а період T , при $k < 0.38 (\alpha_0 < \frac{1}{4}\pi)$ незначно змінюється за рахунок не лінійності (відносна зміна періоду T становить менше 0.038), то залежність $\alpha = \alpha(l)$ при $\alpha_0 < \frac{1}{4}\pi$ буде з високою точністю збігатися з рівнянням коливаний простого гармонійного осцилятора:

$$\bar{\alpha}(l) = \alpha \cos(\omega_0 l), \quad \alpha_0 < \frac{1}{4}\pi \quad (15)$$

При $k < 0.92 (\alpha_0 < \frac{3}{4}\pi)$ залежність $\alpha = \alpha(l)$ описуватиме нелінійні коливання, за формою близькі до гармонійних, і з високою точністю збігається з виразом коливаний нелінійного гармонійного осцилятора з кутовою частотою ω (періодом T), що буде визначатись згідно залежності (14):

$$\bar{\alpha}(l) = \alpha_0 \cos(\omega l) = \alpha_0 \cos(2\pi \frac{l}{T}), \quad \alpha_0 < \frac{1}{4}\pi \quad (16)$$

При $k < 0.92 (\alpha_0 < \frac{3}{4}\pi)$ еліптичний синус Якобі $sn(F, k)$ стає більш “прямокутним” у порівнянні з функцією $\sin(F)$, і залежність буде описувати суттєво нелінійні коливання з властивою їм неізохорністю та ангармонічністю.

Залежність $\alpha / \alpha_0 = \alpha(l/T)$ для різних α_0 наведена на Рис. 3.

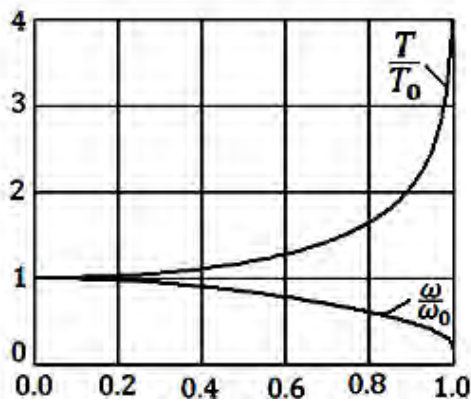


Рис. 2. Залежність $\frac{T}{T_0} = f_1(\alpha_0)$

$$\text{та } \frac{\omega}{\omega_0} = f_2(\alpha_0)$$

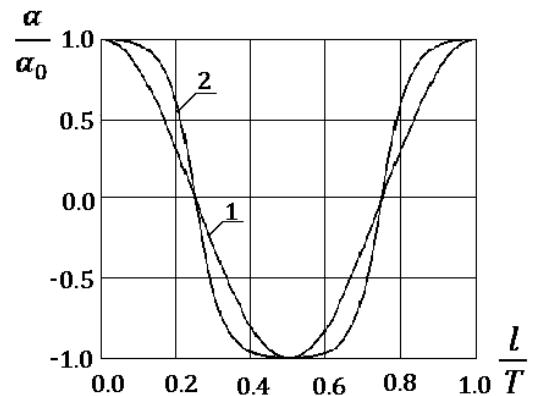


Рис. 3. Залежність $\frac{\alpha}{\alpha_0} = f(\frac{l}{T})$ при:

$$1 - \alpha_0 < 0.75\pi; \quad 2 - \alpha_0 = 0.95\pi.$$

Підставляючи (12) в очевидне співвідношення $dx/dl = \sin \alpha$, після інтегрування, визначимо ординати x точок пружної лінії:

$$x = \frac{1}{\omega_0} \{E(k) - E[am(K(k) - \omega_0 l, k), k]\} \quad (16)$$

де $E(y, k)$, $E(k)$ – неповний і повний еліптичний інтеграли другого роду з модулем $k = k(\alpha_0) = \sin(\alpha_0 / 2)$ та амплітудою $am(E, k) = y$ та $am(E(k), k) = \frac{\pi}{2}$ відповідно:

$$E(y, k) = \int_0^y \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} ; E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right). \quad (17)$$

Диференціюючи вираз (12) з урахуванням рівності (9), визначимо абсцису точок пружної лінії:

$$y = \left(\frac{2k}{\omega_0}\right) cn[K(k) - \omega_0 l, k] \quad (18)$$

де $cn(F, k) = \cos[am(F, k)]$ -еліптичний косинус Якобі.

Пружна лінія стрижня $y = y(x)$ являє собою періодичну функцію, що складається з окремих відрізків хвилеподібних кривих, так званих еластиків Ейлера [17], причому форма цих кривих визначається кутом α_0 , а розміри – періодом T . Еластики Ейлера для першого періоду пружної лінії у відносних координатах при різних значеннях кута α_0 представлені на рис. 4.

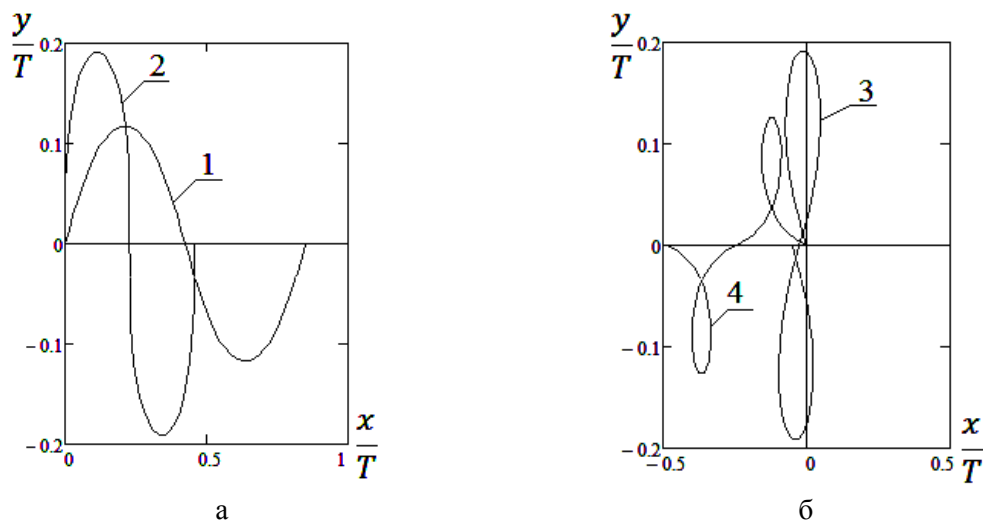


Рис. 4. Залежність $\frac{y}{T} = y\left(\frac{x}{T}\right)$ при:

$$1 - \alpha_0 = 0.25\alpha \quad 2 - \alpha_0 = 0.5\alpha \quad 3 - \alpha_0 = 0.75\alpha \quad 4 - \alpha_0 = 0.95\alpha$$

Різні види згину матеріального стрижня визначаються положенням його кінцевого січення $l = L$. Інтервал координат крапок пружної лінії матеріального стрижня лежить у діапазоні $0 \leq l \leq L$. Координати кінцевого січення стрижня O_1 (рис. 1) згідно з (13) і (14) визначаються виразами:

$$x_L = x(L) = \frac{1}{\omega_0} \{E(k) - E[am(K(k) - \omega_0 L, k), k]\} - L ; y_L = y(L) = \left(\frac{2k}{\omega_0}\right) cn[K(k) - \omega_0 L, k] \quad (17)$$

Кут між силою P та віссю недеформованого стрижня φ_0 (рис. 1) згідно (12) визначиться виразом:

$$\varphi_0 = \alpha(L) = 2 \arcsin\{k \times \operatorname{sn}[K(k) - \omega_0 L, k]\} \quad (18)$$

Кут повороту вільного кінця стрижня (рис. 1) з урахуванням (3) та (18) визначиться виразом:

$$\theta_0 = \alpha_0 - \varphi_0 = \alpha_0 - 2 \arcsin\{k \times \operatorname{sn}[K(k) - \omega_0 L, k]\} \quad (19)$$

Залежність $\frac{\theta_0}{\alpha_0} = f\left(\frac{L}{T}\right)$ при різних α_0 наведена на рис. 5.

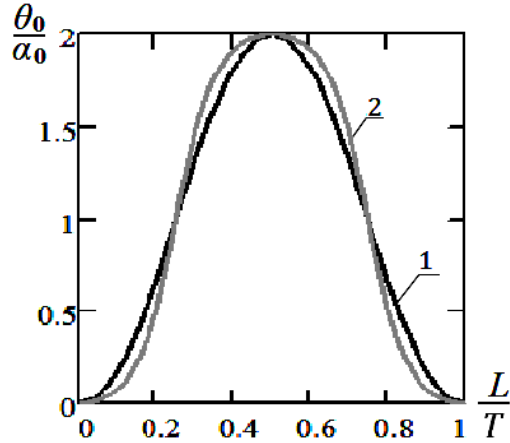


Рис. 5. Залежність $\frac{\theta_0}{\alpha_0}$ при:

$$1 - \alpha_0 \leq 0.75\pi; 2 - \alpha_0 \leq 0.95\pi$$

В системі координатних осей зв'язаних з віссю стрижня в недеформованому стані X_2OY_2 (рис. 1, в) координати точок пружної лінії знаходяться поворотом осей XOY на кут :

$$x_2 = x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0; y_2 = x \sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0 \quad (20)$$

а поздовжнє u_0 та поперечне v_0 переміщення будуть визначатись виразами:

$$u_0 = L - x_{2L}; v_0 = y_{2L} \quad (21)$$

де x_{2L} та y_{2L} – координати кінцевої точки стрижня O_1 в системі координатних осей X_2OY_2 (рис. 1, в):

$$x_{2L} = x_2(L); y_{2L} = y_2(L) \quad (22)$$

З врахуванням (16), (14), (20) та (21) для переміщень u_0 и v_0 отримуємо вирази:

$$u_0 = L(1 - \cos \varphi_0) - \left(\frac{\cos \varphi_0}{\omega_0}\right)\{E(k) - E[\operatorname{am}(K(k) - \omega_0 L, k)]\} - \left(\frac{2k \sin \varphi_0}{\omega_0}\right) \operatorname{cn}[K(k) - \omega_0 L, k]; \quad (23)$$

$$v_0 = \left\{L - \frac{1}{\omega_0}\{E(k) - E[\operatorname{am}(K(k) - \omega_0 L, k)]\}\right\} \sin \varphi_0 + \left(\frac{2k \cos \varphi_0}{\omega_0}\right) \operatorname{cn}[K(k) - \omega_0 L, k]$$

Залежність $\frac{u_0}{T} = f\left(\frac{L}{T}\right)$ та $\frac{v_0}{T} = f\left(\frac{L}{T}\right)$ при різних α_0 наведена на рис. 6 та рис. 7.

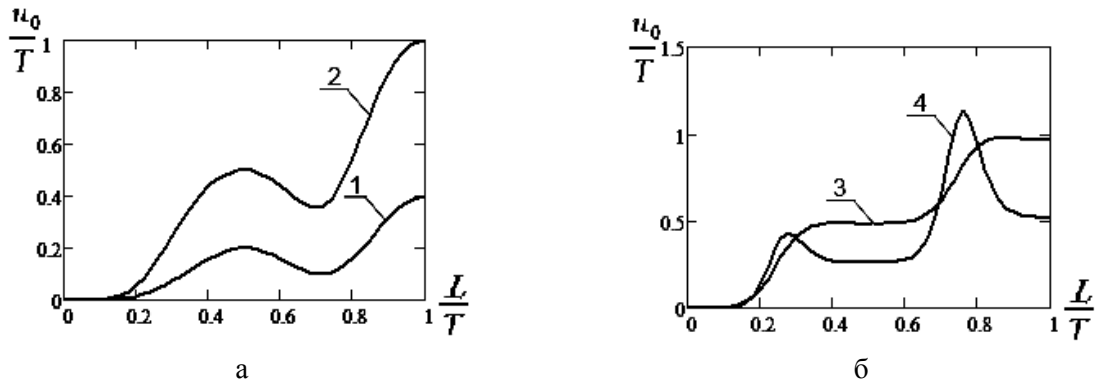


Рис. 6. Залежність $\frac{u_0}{T} = f\left(\frac{L}{T}\right)$ при:

$$1 - \alpha_0 = 0.25\pi; 2 - \alpha_0 = 0.5\pi; 3 - \alpha_0 = 0.75\pi; 4 - \alpha_0 = 0.95\pi$$

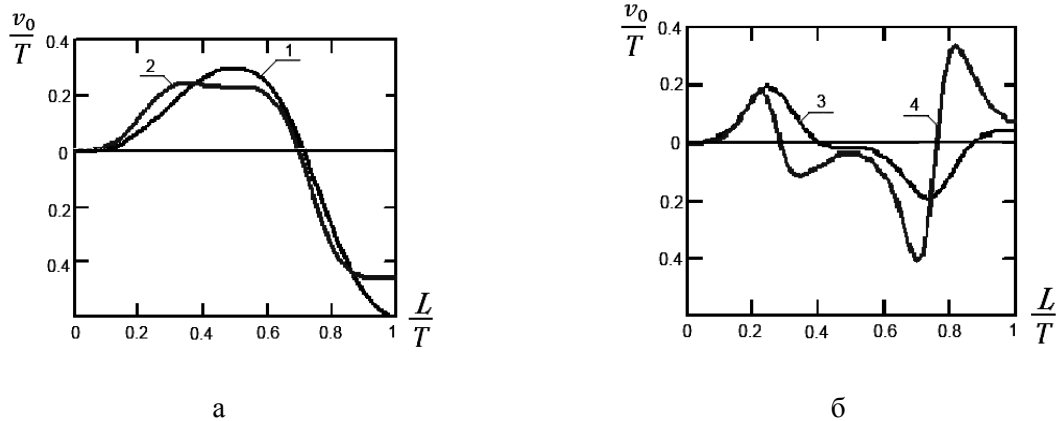


Рис. 7. Залежність $\frac{u_0}{T} = f\left(\frac{L}{T}\right)$ при:

$$1 - \alpha_0 = 0.25\pi; 2 - \alpha_0 = 0.5\pi; 3 - \alpha_0 = 0.75\pi; 4 - \alpha_0 = 0.95\pi$$

Значення максимального згинального моменту в загальному випадку визначаються залежністю:

$$M_{\max} = (Py)_{\max} \quad (24)$$

Розглядаючи силу P та кут її прикладення α_0 як постійні величини для кожного врівноваженого стану, отримаємо:

$$M_{\max} = Py_{\max} \quad (25)$$

Залежність $\frac{y}{T} = f\left(\frac{l}{T}\right)$ відповідно до виразу (10) представлена на рис. 8.

З аналізу рис. 7 та виразу (10) слідує:

$$M_{\max} = Py(L) = \left(\frac{2k}{\omega_0}\right)cn[K(k) - \omega_0 L, k], \text{ при } L < 0.25T \quad (26)$$

$$M_{\max} = Py_{\max} = Py(0.25T) = M_0 \frac{0.5k}{K(k)}, \text{ при } L \geq 0.25T$$

де $M_0 = PT$.

Залежність $M_{\max} / M_0 = f(\alpha_0)$, при $L \geq 0.25T$ показана на рис. 9.

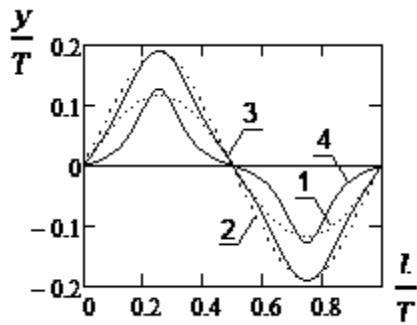


Рис. 8. Залежність $\frac{y}{T} = f\left(\frac{l}{T}\right)$ при:

$$1 - \alpha_0 = 0.25\pi; 2 - \alpha_0 = 0.5\pi;$$

$$3 - \alpha_0 = 0.75\pi; 4 - \alpha_0 = 0.95\pi$$

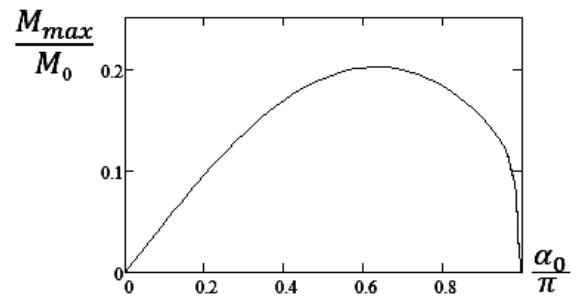


Рис. 9. Залежність $\frac{M_{\max}}{M_0} = \frac{\alpha_0}{\pi}$

Потенційна енергія деформації стрижня для випадку чистого згину:

$$U = \frac{1}{2H_0} \int_0^L M^2 dl = \frac{1}{2} P \omega_0^2 \int_0^L y^2 dl. \quad (27)$$

Підставляючи вираз (14) для y в (27) після інтегрування отримуємо:

$$U = U_0 \left\{ E(k) - E \left[\operatorname{am} \left(K(k) \left(1 + 4 \frac{L}{T} \right), k \right), k \right] - 4(1 - k^2) K(k) \frac{L}{T} \right\}, \quad (28)$$

де $U_0 = \frac{2P}{\omega_0}$.

Залежність $U/U_0 = f(\alpha_0)$ показана на рис. 10.

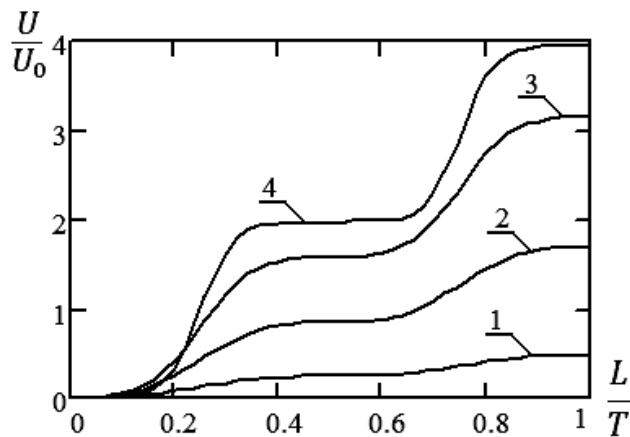


Рис. 10. Залежність $U/U_0 = f(\alpha_0)$ при:

$$1 - \alpha_0 = 0.25\pi; 2 - \alpha_0 = 0.5\pi; 3 - \alpha_0 = 0.75\pi; 4 - \alpha_0 = 0.95\pi$$

Висновки. 1. Отримані вирази для геометричного згину стрижня показують, що:

– переміщення кінця стрижня може відбуватись у напрямку протилежному дії прикладеного навантаження;

– отримані точні аналітичні рішення для форм згину пружного стрижня під дією зосередженої сили, які записані в єдиному параметричному вигляді в залежності від кута між

силою та дотичною до пружної лінії стрижня, в залежності від кута, величини навантаження та жорсткості стрижня.

2. Кутові переміщення являють основним геометричним параметром, що визначає рівняння пружної лінії, поздовжнє, поперечне та кутове переміщення кінця стрижня, максимальний згинальний момент, а також потенційну енергію деформації.

3. Встановлено, що математичне відображення пружної лінії стрижня характеризується геометрично подібним станом.

4. Встановлені зв'язки між параметрами пружної лінії та аргументами емпіричних інтегралів.

5. Встановлено умовність представлення різних видів згину стрижня. Викривлення стрижня є однією і тією ж функцією кривизни при всіх різновидах згину і має єдине математичне та графічне відображення.

6. Встановлені функціональні елементарні зв'язки між лінійними та кутовими переміщеннями вільного кінця стрижня, величиною навантаження та способом його прикладання, довжиною стрижня та його жорсткістю у всьому діапазоні його можливих викривлень.

7. Доказано що згин консольного стрижня являє собою періодичну функцію, що складається з окремих відрізків хвилеподібних кривих та наявністю точок перегину, розтягу та стиску.

8. Вирішена задача визначення максимального згинального моменту та пружної енергії деформації стрижня.

1. Анфилофьев А. В. Разработка общей теории больших и малых упругих перемещений в плоских стержневых системах: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д.т.н. – Томск: 2001. – 38 с.

2. Анфилофьев А. В. Теории “малых” и “больших” искривлений стержней в общем аналитическом представлении // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 310. – № 3 - С.55-59.

3. Анфилофьев А. В. Геометрические свойства эластичности стержня в разновидностях плоского изгиба (сосредоточенная нагрузка) // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313 – № 2 – С. 12–17

4. Астапов Н. С. Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 4. – С. 200-203.

5. Захаров Ю. В., Захаренко А. А. Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 1. С. 48–54.

6. Захаров, Ю. В., К. Г. Охоткин. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // ПМТФ. 2002. Т.43, № 5. – С. 124–131.

7. Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Исакова В. В, Скоробогатов А. Д. Задачи нелинейного изгиба стержневых конструкций // Вестник сибирского государственного аэрокосмического университета. 2005. № 3. – С. 46–51

8. Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Скоробогатов А. Д. Изгиб стержней под действием следящей нагрузки // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 5. С. 167–175.

9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. - 248 с.

10. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.; Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.

11. Охоткин К. Г. Устойчивость, нелинейный изгиб и колебания стержней и пластин: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. к.ф.-м.н. – Новосибирск: 2002. – 19 с.

12. Попов Е. П. Нелинейные задачи тонких стержней. – Л.; М.: Гостехтеоретиздат, 1948.

13. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986.

14. Скоробогатов А. Д. Нелинейный изгиб упругого стержня следящей и распределенной нагрузками. Дис. канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2009. – 102 с.

15. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

16. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойством максимума или минимума. М.: ГТТИ, 1934. – 600 с.

17. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1975. – 704 с.

18. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума. Гостехиздат М.;Л., 1934 г.

19. A. Beléndez, C. Pascual, D. I. Méndez, T. Beléndez and C. Neipp. Exact solution for the nonlinear pendulum // Revista Brasileira de Ensino de Física, vol.29 no.4 São Paulo 2007.