УДК 534. 517+517.95

П. Я. Пукач
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра вищої математики

ЯКІСНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНИХ РЕЖИМІВ КОЛИВАНЬ У ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

Розглядаємо важливі класи одновимірних середовищ, згинальною жорсткістю яких можна знехтувати. Застосувати наближені аналітичні методи побудови розв’язків у математичних моделях динамічних процесів у них не вдається. Тому тут обґрунтовано існування та єдиність розв’язків; виконано якісну їх оцінку; на базі чисельного аналізу підтверджено наведене вище та проаналізовано особливості динамічних процесів деяких із розглядуваних класів систем.

Ключові слова: нелінійні коливальні системи, якісні оцінки, чисельний аналіз.

In this paper we consider important classes of one dimensional environments, bending stiffness of which can be neglected. Apply approximate analytical method of solution of mathematical models of dynamic processes t cannot be applied. So justification of existence and uniqueness of solutions; carried out a qualitative their evaluation; based on numerical analysis are considering in this paper. Also the features of dynamic processes of some of examined class of systems are analyzed.

Key words: nonlinear oscillation systems, qualitative method.

Актуальність проблеми. Огляд літератури. Адекватне математичне моделювання є важливим сучасним інструментом для вирішення більшості наукових та інженерно-технічних проблем. Математичне та чисельне моделювання мають важливе значення у розумінні суті явищ і процесів, що досліджуються в сучасній динаміці та міцності машин, сприяючи інтерпретації існуючих та передбаченню і відкриттю нових явищ. Вивчення та оптимізація параметрів динамічних процесів, які відбуваються в технічних системах при великих швидкостях, високих тисках і енергіях, вимагають аналізу та дослідження достатньо складних з погляду сучасного стану розвитку нелінійної теорії коливань моделей процесів.

Сили зовнішнього та внутрішнього тертя, що мають складну природу (залежать від відносної швидкості тіл, внутрішньої структури матеріалу [1, 2] та інших чинників), приводить до нелінійних зв’язків між основними величинами, які описують динаміку коливального процесу та швидкістю його перебігу. Тому механічні коливання здебільшого описуються нелінійними диференціальними рівняннями (звичайними чи із частинними похідними). Для них залежності між відновлюючою силою і переміщенням виражаються співвідношеннями, які відрізняються від лінійного закону [3]. Коливання у нелінійних системах мають цілу низку особливостей, які не є характерними для лінійних коливальних систем.

Розвиток нової техніки та перехід до швидкісного машинобудування вимагає постановки і розв’язання нових задач, математичні моделі яких не можна дослідити асимптотичними методами нелінійної механіки: задачі про коливання гнучких елементів пасових або ланцюгових передач, стрічкових систем для записування та відтворення інформації, конвеєрних ліній, різного роду канатних витягів, устаткування для рулонування паперу, металевої стрічки, дроту, нитки, устаткування для буріння нафтових і газових свердловин, трубопроводів тощо. У разі нелінійного закону пружності матеріалу, суттєво нелінійної залежності амплітуди коливань від сил опору тощо задача пов’язана з принциповими математичними труднощами (навіть у разі дослідження моделі коливань в обмеженій області), оскільки відсутні загальні аналітичні методи розв’язування такого класу задач. Ця проблема в загальному випадку вирішена лише для дуже вузького класу задач. Тому не існує загальних методик визначення амплітудно-частотних характеристик коливального процесу. Особливості коливальних процесів у нелінійних системах та відсутність точних чи наближених аналітичних методів інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, які описують динамічні процеси у вказаних коливальних системах, вимагають розроблення таких якісних методів дослідження нелінійних систем, які давали б можливість адекватно описувати коливальний процес та з успіхом застосовувати порівняно нескладні та зручні для інженерних розрахунків чисельні методи. Актуальними для динаміки та міцності є проблеми вивчення динамічних процесів у нелінійних коливальних системах, що описують поперечні (поздовжні) коливання при переміщеннях вантажів за допомогою конвеєрів стрічкового (канатного) типу [4, 5] тощо. Такі та подібні задачі мають прикладне застосування в різних технічних системах – коливаннях трубопроводів, залізничних колій, довгих мостів, електричних ліній, оптичних волокон [6–15] та ін. У роботі викладено якісні методи дослідження розв’язків задач, які виникають у математичному моделюванні нелінійних коливань обмежених та необмежених тіл під дією нелінійних пружних сил та нелінійних сил опору. Якісні методи загальної теорії нелінійних задач дають змогу для широкого класу згаданих вище коливальних систем отримати результати коректності розв’язку задачі (йдеться про існування, єдиність та неперервну залежність від початкових даних). Вказана методика дозволяє обгрунтувати коректність розв’язку певної задачі в моделі та дає змогу при подальшому дослідженні розв’язку застосовувати різноманітні наближені (чисельні) методи. Отже, проблеми якісних методів дослідження нелінійних коливальних систем є актуальними.

Формулювання задачі аналізу динамічного процесу одновимірного середовища змінної структури у вигляді математичної моделі. Опишемо методику дослідження математичної моделі нелінійних коливань напівбезмежного неоднорідного середовища за умови та нелінійної вінклерівської сили з використанням методів загальної теорії нелінійних крайових задач. У найпростішій постановці математична модель описується змішаною задачею для рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + g\left(x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) = f(x,t) \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \tag{3}$$

та крайовою умовою

$$u(0,t) = 0\,. \tag{4}$$

У співвідношеннях (1)–(4):

– $u(x,t)$ – поздовжнє (поперечне) переміщення середовища з координатою x в довільний момент часу t;

– $a(x)$ – відома неперервна функція, яка характеризує змінну вздовж довжини середовища площу поперечного перерізу, погонну масу, пружні властивості середовища тощо;

– $g\left(x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)$ – функція, яка враховує наведені змінні характеристики та описує силу опору;

– $f(x,t)$ – функція, яка описує розподіл вздовж середовища сил;

– $u_0(x)$ та $u_1(x)$ описують початковий стан середовища (початкове відхилення – форму та початкову швидкість).

Середовище напівбезмежне, тому $x \in (0,+\infty)$, а динамічний процес розглядається на як завгодно великому часовому інтервалі, тому $0 \le t < +\infty$. Всюди надалі в цьому розділі роботи вживаємо такі позначення для довільних $R > 0$, $\tau \in (0,T]$: $Q_{R,\tau} = (0,R)\times(0,\tau)$ – прямокутник з основою $(0,R)$ на осі Ox та висотою τ; $Q_\tau = (0,+\infty)\times(0,\tau)$ – півсмуга з основою $(0,+\infty)$ на осі Ox та висотою τ.

Для описування якісних властивостей вихідних даних та розв'язку використовуватимемо деякі простори узагальнених функцій. $H_0^1(0,R)$ – простір функцій, квадрати яких разом з їхніми похідними інтегровні за Лебегом на інтервалі $(0,R)$, причому на кінцях інтервала виконуються однорідні крайові умови $u\big|_{x=0}=u\big|_{x=R}=0$. Норму в цьому просторі визначаємо так: $\|u\|^2_{H_0^1(0,R)}=\int_0^R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx$. $H^1_{0,loc}(0,+\infty)$ – простір функцій, які належать до $H_0^1(0,R)$ для довільного $R>0$, причому $u(0,t)=0$; $L^r_{loc}(\overline{Q})$ – простір функцій, інтегровних зі степенем p за Лебегом на інтервалі $(0,R)$ для довільного $R>0$, причому $r\in(1,+\infty)$.

Основний результат. Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) називаємо функцію u, що задовольняє умову (2) та інтегральну тотожність

$$\int_{Q_\tau}\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+g\left(x,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)v-fv\right]dxdt+\int_0^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)v(x,\tau)dx-\int_0^{+\infty}u_1(x)v(x,0)dx=0 \quad (5)$$

для довільного $\tau\in(0,T]$ та для довільної функції v з обмеженим носієм такої, що тотожність (5) має сенс. Стосовно коефіцієнтів правої частини рівняння (1) та початкових даних припускатимемо виконання таких умов.

1. Функція $g(x,\xi)$ – неперервна за обидвома аргументами, причому для довільних значень аргументів задовольняє умови $|g(x,\xi)|\le g_1|\xi|^{p-1}$, $p>2$, $g_1=const>0$, $(g(x,\xi)-g(x,s))(\xi-s)\ge g_0|\xi-s|^p$, $g_0=const>0$.

2. Щодо функції $a(x)$, то вважається, що вона задовольняє умову $|a(x)|\le M(1+x^\alpha)$ при $x\to+\infty$, де $M>0$, $0\le\alpha<1-\frac{p-2}{2p}$.

Зауваження. У наведеному вище співвідношенні враховано факт, що функція $a(x)$ може зростати при достатньо великих x доволі повільно (повільніше від лінійного закону) або залишається сталою.

3. Функція $f\in L^{p'}_{loc}(\overline{Q})$, причому число p' - спряжене до p, тобто $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

4. Початкове відхилення $u_0(x)$ – функція, яка належить до $H_0^1(0,R)$ для довільного $R>0$, причому $u_0(0)=0$; початкова швидкість $u_1(x)$ – функція, яка належить до $L^2(0;R)$ для довільного $R>0$.

Метою дослідження є аналіз розв'язку задачі (1)–(4) для нелінійного хвильового рівняння другого порядку в математичній моделі динамічного процесу, а саме отримання достатніх умов існування та єдиності розв'язку в класі локально інтегрованих функцій. Вказане рівняння, зокрема, описує вимушені коливання стрижня чи канату в середовищі з опором [16, с. 234].

Основний якісний результат: якщо математична модель коливального процесу описується задачею (2)–(4) для рівняння (1), то при виконанні умов 1–4 існує єдиний узагальнений розв'язок $u(x,t)$ задачі (1)–(4), причому: функція u – неперервна за змінною t на відрізку $[0,T]$, а за змінною x належить до простору $H^1_{0,loc}(0,+\infty)$; похідна $\frac{\partial u}{\partial t}$ – неперервна та локально інтегровна зі степенем p за змінною t на відрізку $[0,T]$, а за змінною x – локально інтегровна зі степенем p.

Дослідження математичної моделі нелінійних коливань. Застосування методу Гальоркіна та методів загальної теорії нелінійних крайових задач для доведення існування та

єдиності розв'язку. Нехай u^1, u^2 – узагальнені розв'язки задачі (1)–(4) та задачі, що відрізняється від (1)–(4) лише тим, що у правій частині (1) вимушуюча сила f замінена на $\overline{f}$ відповідно. Тоді для довільних τ, R, R_0 таких, що $0 < R_0 < R$, $\tau \in (0,T]$, можна отримати оцінку

$$\int_0^{R_0} \left(\frac{\partial u^1(x,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial u^2(x,\tau)}{\partial t} \right)^2 dx + C_1 \int_0^{R_0} \left(\frac{\partial u^1(x,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial u^2(x,\tau)}{\partial x} \right)^2 dx + C_2 \int_{Q_{R_0,\tau}} \left| \frac{\partial u^1}{\partial t} - \frac{\partial u^2}{\partial t} \right|^p dxdt \le$$

$$\le \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^\beta \left(C_3 R^{1+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}} + C_4 \int_{Q_{R,\tau}} \left| f - \overline{f} \right|^{p'} dxdt \right), \qquad (6)$$

де $\beta > \dfrac{2p}{p-2}$ – довільне число; $C_1 - C_4$ – додатні сталі, що залежать лише від p, β.

Обгрунтування нерівності (6) проводимо методами загальної теорії нелінійних крайових задач за допомогою методу монотонності [16].

Розглянемо послідовність областей $Q^k = (0,k) \times (0,T)$, $k = 1, 2, ...$ та в кожній області Q^k відповідно задачу

$$\frac{\partial^2 u^k(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x) \frac{u^k(x,t)}{\partial x} \right) + g\left(x, \frac{\partial u^k(x,t)}{\partial t} \right) = f^k(x,t), \ (7)$$

$$u^k(x,0) = u_0^k(x), \ (8)$$

$$\frac{\partial u^k(x,0)}{\partial t} = u_1^k(x), \ (9)$$

$$u^k(0,t) = u^k(k,t) = 0. \ (10)$$

Зауважимо, що за зазначених вище умов існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (7)–(10) в Q^k [16]. Розглянемо тепер послідовність задач вигляду (7)–(10) для $k = 1, k = 2, ...$, довизначивши u^k нулем на $Q \setminus Q^k$. Отримаємо послідовність розв'язків задачі (1)–(4) в Q, яку для зручності знову позначимо $\{u^k\}$. Показуємо, що послідовності $\{u^k\}$ та $\left\{ \dfrac{\partial u^k}{\partial t} \right\}$ є фундаментальними у відповідних функціональних просторах подібно до того, як це зроблено у [17]. Зі вказаних фактів отримуємо збіжність наближених "гальоркінських" розв'язків до функції $u(x,t)$, яка є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) в сенсі інтегральної тотожності (5).

Єдиність отриманого розв'язку випливає з нерівності (6) при $R \to +\infty$, якщо розглянути два довільних розв'язки u^1 та u^2 задачі (1)–(4) і врахувати, що $u^1(x,0) = u^2(x,0)$, $\dfrac{\partial u^1(x,0)}{\partial t} = \dfrac{\partial u^2(x,0)}{\partial t}$.

Зауважимо, що для задачі (1)–(4) легко отримати достатні умови існування та єдиності періодичного за лінійною змінною узагальненого розв'язку. Такі результати важливі з огляду на аналіз динаміки коливального процесу. Нехай виконуються умови (1)–(4), $\alpha = 0$ та існує таке число $\zeta > 0$, що:

а) $a(x+\zeta) = a(x)$ для всіх $x \in (0,\infty)$, тобто функція $a(x)$ є періодичною за лінійною змінною;

б) $f(x+\zeta,t) = f(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, тобто функція $f(x,t)$ є періодичною за змінною x;

в) $u_0(x+\zeta) = u_0(x)$, $u_1(x+\zeta) = u_1(x)$ для майже всіх $x \in (0,+\infty)$, тобто початкове відхилення та початкова швидкість є періодичними за лінійною змінною функціями.

Тоді задача (1)–(4) має єдиний узагальнений розв'язок u, що є періодичною за змінною x з періодом ζ функцією. Насправді, оскільки існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1)–(4) і функція $u(x+\zeta,t)$, $(x,t)\in Q$ також є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) (цей факт легко перевіряється безпосередньо), то з єдиності узагальненого розв'язку одразу випливає, що $u(x+\zeta,t)=u(x,t)$ для майже всіх $(x,t)\in Q$.

На основі якісних методів досліджень подібно до проведених вище здійснюється аналіз коливань середовища, математичною моделлю руху якого є диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)+g_1|u(x,t)|^{q-2}u(x,t)=f(x,t),\quad q>2,\quad g_1>0. \tag{11}$$

У цьому рівнянні g_1 – безрозмірний коефіцієнт, який визначає характер та величину нелінійної складової пружних сил, які діють на середовище. У випадку $g_1<0$ диференціальне рівняння (11) описує коливання середовища, яке обертається навколо нерухомої осі.

Результати чисельного інтегрування у модельному випадку. Розглянемо окремий випадок рівняння (1), а саме випадок власних коливань суцільного середовища за умови незмінних вздовж його довжини фізико-механічних характеристик, тобто

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+g_1|u(x,t)|^{q-2}u(x,t)+g_1|u(x,t)|^{q-2}u(x,t)=f(x,t),\quad q>2,\quad g_0>0,\quad g_1>0.$$

У останньому співвідношенні a та g_0 – сталі, а крайові умови набувають вигляду $u(0,t)=u(l,t)=0$. Модельне рівняння розглядаємо, як і вище, за початкових умов (2), (3) та крайових умов (4). Що стосується початкової форми, то вона описується так: $u_0(x)=\begin{cases}\dfrac{2hx}{l}, & 0\le x\le\dfrac{l}{2}\\ 2h-\dfrac{2hx}{l}, & \dfrac{l}{2}<x\le l\end{cases}$.

Початкова швидкість середовища вважається нульовою. Розглянуте рівняння зведемо до системи двох рівнянь вигляду $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)=v(x,t),\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)=a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-g_0|v(x,t)|^{p-2}v(x,t)-g_1|u(x,t)|^{q-2}u(x,t)+f(x,t).\end{cases}$

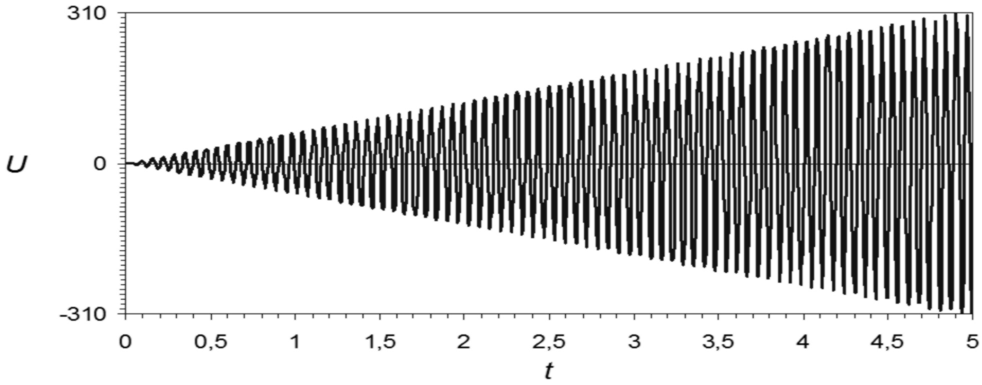
Чисельне розв’язування системи звичайних диференціальних рівнянь $\begin{cases}u'(t)=v(t),\\ v'(t)=L_1(t,u,v)\end{cases}$, де $L\ (t,u,v)=a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-g_0|v(x,t)|^{p-2}v(x,t)-g_1|u(x,t)|^{p-2}u(x,t)$, здійснено методом Рунге–Кутта четвертого порядку.

Метою чисельних симуляцій було встановлення умов динамічного явища – резонансу та впливу параметрів нелінійної системи на амплітуду в динамічних режимах коливань, близьких до резонансних. Нижче на рис. 1 *а–в*) наведено графічні зміни в часі відхилення серединної точки середовища за умов початкового відхилення від положення рівноваги $h=1$ із урахуванням різних лінійних моделей сил опору та за різних значень частоти вимушуючої сили та інших значень параметрів системи. Вивчаються коливання середовища, математичною моделлю руху якого є диференціальне рівняння

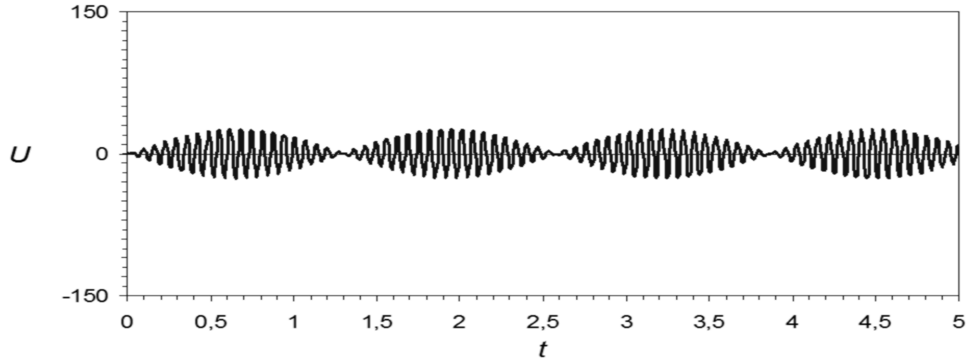
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-g_0\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+k\sin\omega t-b,\quad p=2.$$

На рис. 2 *а–в* наведено графічні зміни в часі відхилення серединної точки середовища за умов початкового відхилення $h=1$ із урахуванням різних нелінійних моделей сил опору. Вивчаються коливання середовища за умов $l=1$, $a=1000$, $g_0=0{,}1$, $k=10000$, $\omega=\sqrt{a}\,\pi$, $b=0$.

а) $l = 1$, $a = 1000$, $g_0 = 0$, $k = 10000$, $\omega = \sqrt{a}\,\pi$, $b = 0$ (лінійний резонанс);



б) $l = 1$, $a = 1000$, $g_0 = 0$, $k = 10000$, $\omega = \sqrt{a}\,\pi$, $b = -5$.



в) $l = 1$, $a = 1000$, $g_0 = 0$, $k = 10000$, $\omega = \sqrt{a}\,\pi$, $b = 1$.

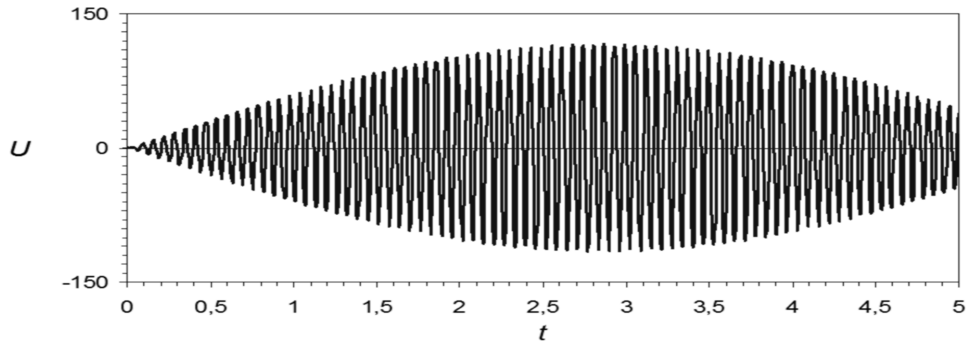
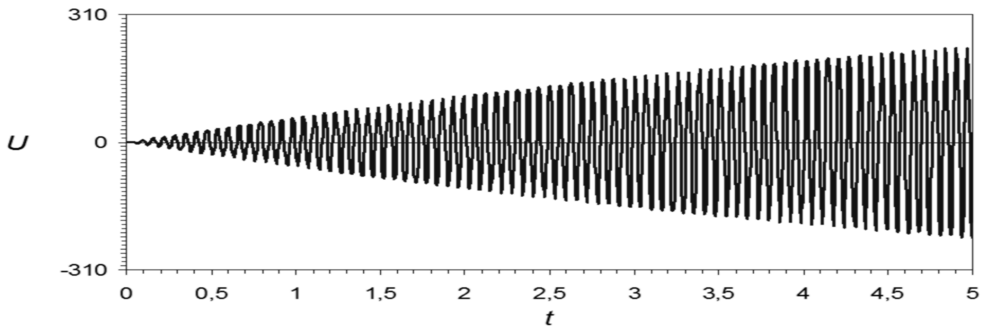


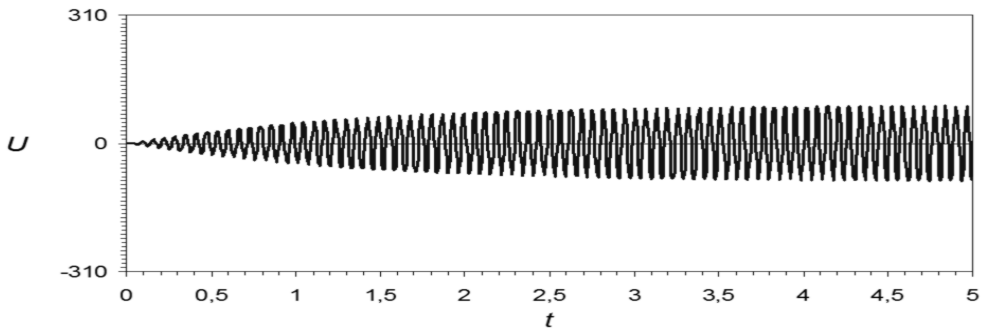
Рис. 1. Закони зміни відхилення серединної точки середовища за різних значень параметрів у динамічних режимах лінійних коливань резонансних та близьких до резонансних

Висновки. У роботі описано застосування нового міждисциплінарного методу якісного дослідження розв’язків задач для рівнянь математичної фізики з розподіленими параметрами у математичних моделях коливань об’єктів у нелінійному середовищі. За допомогою згаданого методу розроблено загальну методику дослідження коректності (існування, єдиності) розв’язків у низці задач, які моделюють коливальні процеси в нелінійних динамічних системах. Отримано класи коректності розв'язків згаданих вище задач, досліджено властивості розв'язків крайових задач для певних класів нелінійних рівнянь другого порядку, які моделюють коливання обмежених та необмежених середовищ. Досліджено випадок періодичного розв'язку. Показано принципову можливість застосування чисельних методів для адекватного дослідження нелінійних коливальних систем та динамічних явищ у них. Отримані у роботі якісні результати та наведені графічні залежності показують, що: 1) наявність сили опору призводить до загасання коливань середовища; 2) швидкість загасання залежить більшою мірою від степеня нелінійності сили опору; 3) за значної нелінійності сили опору ($p = 3$) динамічний процес аперіодичний; 4) вплив сили опору на період коливань за малих значень параметрів g, p та h незначний. Останнє також підтверджується асимптотичним інтегруванням вказаних диференціальних рівнянь. Крім того, встановлено, що що за відсутності сили опору залежно від співвідношення між частотами власних та вимушених коливань у системі буде мати місце: а) зростання у часі амплітуди коливань (резонанс); б) явище “биття”; в) усталений динамічний процес за умови, що сила опору характеризується коефіцієнтом, не близьким до 0.

а) $p = 2{,}1$;



б) $p = 2{,}3$;



в) $p = 2{,}5$.

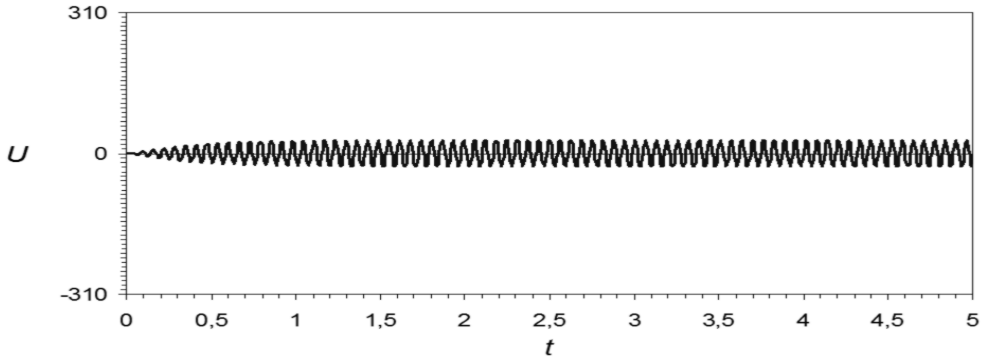


Рис. 2. Закони зміни відхилення серединної точки середовища за різних значень параметрів у резонансних динамічних режимах нелінійних коливань

1. Писаренко Г. С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния енергии в материале / Г. С. Писаренко. – К.: Изд-во АН УССР, 1970. – 379 с. 2. Хейл Дж. Колебания в нелинейных *системах: [пер. с англ. Р. С. Гусаров. Под ред. В. М. Волосова] / Джек Хейл. – М.: Мир, 1966. – 229 с. 3. Каудерер Г. Нелинейная механика/ Г. Каудерер: [пер. с нем. Я. Г. Пановко]. – М.: ИЛ, 1961. – 777 с. 4. Pukach P. Ya. Qualitative research methods of mathematical model of nonlinear vibrations of conveyor belt / P. Pukach // Journal of Mathematical Sciences.– 2014.– 198, Issue 1.– P. 31–38. 5. Пукач П. Я. Нелінійні поперечні коливання напівнеобмеженого каната з урахуванням опору / П. Я. Пукач, І. В. Кузьо // Науковий вісник Національного гірничого університету. – 2013. – № 3. – С. 82–86. 6. Ahmadian H. Nonlinear model identification of a frictional contact support / H. Ahmadian, H. Jalali, F. Pourahmadian // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2010. – Vol. 24, issue 8. – P. 2844–2854. 7. Demeio L. Forced nonlinear oscillations of semi-infinite cables and beams resting on a unilateral elastic substrate / L. Demeio, S. Lenci // Nonlinear Dynamics. – 2007. – 49. – P. 203–215.8. Demeio L. Second–order solutions for the dynamics of a semi–infinite cable on a unilateral substrate/ L. Demeio, S. Lenci // Journ. Sound Vibr.–2008.–315.–P. 414–432. 9. Ghayesh M. H. Parametric vibrations and stability of an axially accelerating string guided by a non-linear elastic foundation / M. H. Ghayesh // Int. Journ. Non – Lin. Mech.–2010.– 45.– P. 382–394. 10. Metrikine A. V. Stationary waves in a nonlinear elastic system interacting with a moving load / A. V. Metrikine // Acoustical Physics.– 1994.– 40.– P. 573–576.11. Metrikine A. V. Steady state response of an infinite string on a non-linear visco-elastic foundation to moving point loads / A. V. Metrikine // Journ. Sound Vibr. – 2004. – 272. – P. 1033–1046. 12. Pukach P. Qualitative methods for research of transversal vibrations of semi-infinite cable under the action of nonlinear resistance forces / P. Pukach, I. Kuzio, M. Sokil // ECONTECHMOD. An international quarterly journal. Poland, Lublin– Rzeszow. – 2013. – Vol. 2, No. 1. – P. 43–48. 13. Pukach P. Ya. On the unboundedness of a solution of the mixed problem for a nonlinear evolution equation at a finite time / P. Ya. Pukach // Nonlinear Oscillations. – Volume 14, Is. 3.– P. 369–378. 14. Salenger G. Discreteness effects in the forced dynamics of a string on a periodic array of non-linear supports / G. Salenger, A. F. Vakakis // Int. Journ. Non–Lin. Mech.– 1998.– 33.– P. 659–673. 15. Santee D. M. Oscillations of a beam on a non-linear elastic foundation under periodic loads / D. M. Santee, P. B. Goncalves // Shock and Vibrations.– 2006.– 13.– P. 273–284. 16. Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.–Л. Лионс: [перев. с англ. под ред. О. А. Олейник]. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 587 с. 17. Пукач П. Я. Методи аналізу динамічних процесів у нелінійних неавтономних механічних системах різної структури / Дис. … д-ра техн. наук за спец. 05.02.09 "Динаміка та міцність машин". – Львів, 2014. – 334 с.*