

УДК 518.61

О.М. Нечай

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра “Прикладна математика”

ЧИСЛОВИЙ РОЗРАХУНОК МЕТОДОМ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОБОТИ КВАРЦОВОГО ГЕНЕРАТОРА ГАРМОНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

© Нечай О. М., 2002

Моделюється робота кварцового автогенератора гармонійних коливань на біполярному транзисторі. Запис моделі подано у вигляді диференціальних рівнянь, складених за законами Кірхгофа. Труднощі у розв’язанні таких рівнянь пов’язані з їх великою жорсткістю. Існуючі явні методи не могли розв’язувати таких задач і їх розв’язок розпадався, тому вдавались до припущень, лінійних замінів та неявних перебудов моделі. Запропоновано новий дробово-раціональний метод для розв’язання штибних диференціальних рівнянь, здатний на прикладі цієї моделі кварцового генератора відтворити значення фізичних величин з високою точністю.

The work of the quartz free-running oscillator harmonic hesitations in the electric circuit with bipolar transistor is modeled. The record of the model is represented in the form of differential equations governed by Kirghoff’s law. The complexities in the solution of such equalities are connected with their stiff. The existing methods couldn’t solve such tasks and their solution was destroyed. So it was supposed to use the line substitution and rebuilding of the model. The new fraction-rational method for the solution of the stiff differential equations can reproduce on the example of this model the meaning of the unknown physical values with the high preciseness.

Проблеми розрахунку коливальних генераторних схем пов’язані з великою швидкістю зміни коливань, тобто їх частотою, яка в сучасних електронних пристроях сягає сотні і тисячі кілогерц. Необхідність створення методики побудови і адекватного розв’язання моделі таких генераторів на сучасному етапі розвитку елементної бази вкрай необхідна.

Як відомо, електронні генератори гармонійних коливань служать для перетворення енергії джерела постійного струму в енергію незагасаючих синусоїдальних коливань. Вони містять активний елемент та частотно-вибіркову схему, серед найкращих складових якої визнано кварцові резонатори. Кварцові резонатори в схемах автогенераторів створюють стабільні гармонійні сигнали на значно більшому діапазоні частот, ніж резонансні RC -, LC -ланки.

Моделюючи електронні схеми, як правило, користуються структурними схемами і значна частина розрахунку моделі зводиться до обчислення матриць провідностей контурів з використанням відомих стандартних методів.

Така методика побудови і розрахунку моделі зводиться до обчислення параметрів роботи схеми автогенератора гармонійних коливань на основі законів Кірхгофа, що дає змогу представити рівняння моделі у нормальній формі Коші, розв’язування яких для моделей, що описують такі швидкозмінні процеси, досі було складним або неточним.

Розглянемо роботу схеми RC – автогенератора синусоїдальних гармонійних коливань, яка побудована за допомогою кварцового елемента на біполярному транзисторі (рис. 1).

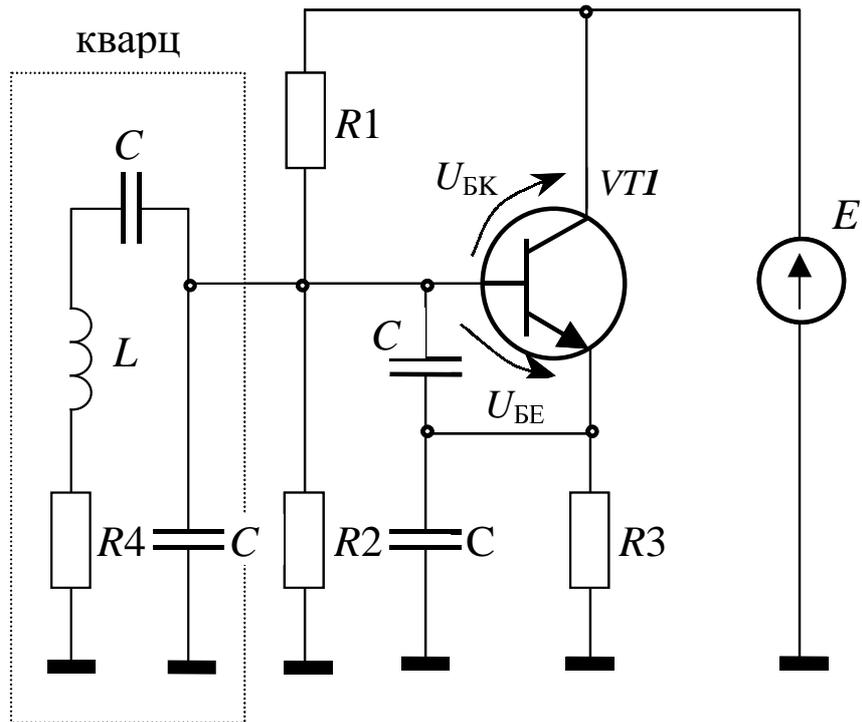


Рис. 1. Електрична схема генератора гармонійних коливань з кварцовою стабілізацією частоти

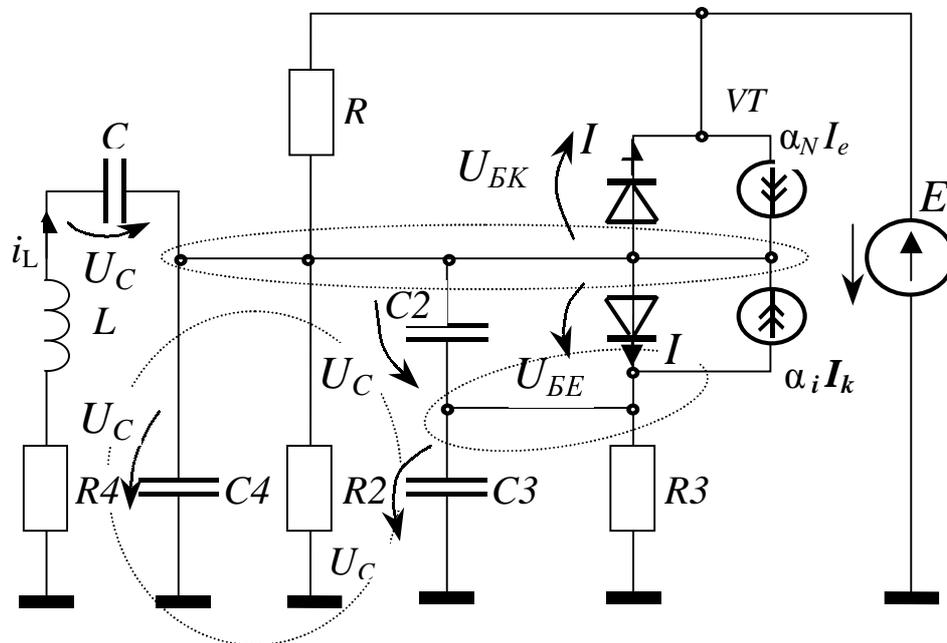


Рис. 2. Еквівалентна схема кварцового генератора

Для зручності представлення моделі кварцового автогенератора побудуємо його еквівалентну схему (рис. 2).

Згідно з рис.2 запишемо рівняння вузлових напруг та контурних струмів за законами Кірхгофа

$$\left\{ \begin{array}{l} i_L R_4 + L \frac{di_L}{dt} + u_{c1} + u_{c2} + u_{c3} = 0 \\ C_2 \frac{du_{c2}}{dt} + I_{0E} \left(e^{au_{c2}} - 1 \right) - \alpha_i I_{0K} \left(e^{a(u_{c3} + u_{c2} - E)} - 1 \right) - C_3 \frac{du_{c3}}{dt} - \frac{u_{c3}}{R_3} = 0 \\ i_L - C_4 \frac{d}{dt} (u_{c2} + u_{c3}) - \frac{u_{c2} + u_{c3}}{R_2} - \frac{u_{c2} + u_{c3} - E}{R_1} - C_2 \frac{du_{c2}}{dt} - I_{0E} \left(e^{au_{c2}} - 1 \right) + \\ + \alpha_i I_{0K} \left(e^{a(u_{c2} + u_{c3} - E)} - 1 \right) - I_{0K} \left(e^{a(u_{c2} + u_{c3} - E)} - 1 \right) + \alpha_N I_{0E} \left(e^{au_{c2}} - 1 \right) \end{array} \right. \quad (1)$$

При цьому
$$i_L = \frac{du_{c1}}{dt}, \quad (2)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -(i_L R_4 + u_{c1} + u_{c2} + u_{c3}). \quad (3)$$

Виконаємо деякі перетворення. Після групування і підстановок отримаємо систему з рівнянь

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{-(i_L R_4 + u_{c1} + u_{c2} + u_{c3})}{L},$$

$$\frac{du_{c1}}{dt} = i_L,$$

$$\begin{aligned} \frac{du_{c2}}{dt} = & \frac{C_3 + C_4}{C_2 C_4 + C_3 (C_2 + C_4)} \left(\alpha_i I_{0K} \left(e^{a(u_{c3} + u_{c2} - E)} - 1 \right) - I_{0E} \left(e^{au_{c2}} - 1 \right) \right) + \\ & + \frac{C_3 + C_4}{C_2 C_4 + C_3 (C_2 + C_4)} \times \left(\frac{u_{c3}}{R_3} - \frac{C_3 (C_2 + C_4)}{C_4} \frac{du_{c2}}{dt} + \frac{C_3}{C_4} \left(i_L - \frac{u_{c2} + u_{c3}}{R_2} - \frac{u_{c2} + u_{c3} - E}{R_1} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{C_3}{C_4} \left(I_{0K} \left(e^{a(u_{c2} + u_{c3} - E)} - 1 \right) - \alpha_N I_{0E} \left(e^{au_{c2}} - 1 \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_{c3}}{dt} = & \frac{1}{C_4} \left(i_L - C_4 \frac{du_{c2}}{dt} - \frac{u_{c2} + u_{c3}}{R_2} - \frac{u_{c2} + u_{c3} - E}{R_1} - C_2 \frac{du_{c2}}{dt} - I_{0E} \left(e^{au_{c2}} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + \alpha_i I_{0K} \left(e^{a(u_{c2} + u_{c3} - E)} - 1 \right) - I_{0K} \left(e^{a(u_{c2} + u_{c3} - E)} - 1 \right) + \alpha_N I_{0E} \left(e^{au_{c2}} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Використаємо дробово-раціональні наближення для розв'язання цієї задачі.

Дробово-раціональні наближення розв'язку задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (4)$$

використовують усереднення послідовності тейлорівських наближень розв'язків з певними ваговими коефіцієнтами ω_j

$$y_{nn}^{[p]} = \sum_{j=0}^p \omega_j \cdot T_{p-j,n} \quad (5)$$

де $T_{p-j,n}$ – тейлорівське наближення $p-j$ -го порядку розв'язку задачі (1) у сітковому вузлі x_n ,

$$\omega_j = \frac{(-1)^j \alpha_j J_n^j h^j}{\sum_{i=0}^p (-1)^i \alpha_i h^i J_n^i}, \quad (6)$$

де J_n – значення матриці Якобі правої частини рівняння (1) у вузлі x_n , α_i – відповідні скалярні параметри наближення обчислювальної стійкості, p – порядок наближення.

Використовуючи формули (2), (3), згідно з методикою визначення параметрів стійкості α_i^* , описаною в [1], побудовано дробово-раціональні наближення 1÷4 порядків точності, які описуються формулами

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{[1]} &= \frac{T_1 - \frac{h}{2} J_n T_0}{E - \frac{h}{2} J_n}; \\ y_{n+1}^{[2]} &= \frac{T_{2,n} - \frac{h}{2} J_n T_{1,n} + \frac{h^2}{12} J_n^2 T_{0,1}}{E - \frac{h}{2} J_n + \frac{h^2}{12} J_n^2}; \\ y_{n+1}^{[3]} &= \frac{T_{3,n} - \frac{h}{2} J_n T_{3,n} + \frac{h^2}{10} J_n^2 T_{1,n} - \frac{h^3}{120} J_n^3 T_{0,n}}{E - \frac{h}{2} J_n + \frac{h^2}{10} J_n^2 - \frac{h^3}{120} J_n^3}; \\ y_{n+1}^{[4]} &= \frac{T_{4,n} - \frac{h}{2} J_n T_{3,n} + \frac{3h^2}{28} J_n^2 T_{2,n} - \frac{h^3}{84} J_n^3 T_{1,n} + \frac{h^4}{1680} J_n^4 T_{0,n}}{E - \frac{h}{2} J_n + \frac{3h^2}{28} J_n^2 - \frac{h^3}{84} J_n^3 + \frac{h^4}{1680} J_n^4}; \end{aligned} \quad (7)$$

де $T_{k,n}$ – часткова сума k -го порядку ряду Тейлора.

Для побудови числових методів дробово-раціонального виду на основі наближень (7) необхідно визначити спосіб апроксимації тейлорівських наближень $T_{1,n}$, $T_{2,n}$, $T_{3,n}$, $T_{4,n}$. Використовуючи відповідні відомі методи Рунге-Кутта [1], одержимо

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, y_n), & k_2 &= h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), & k_3 &= h f(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2), \\ k_4 &= h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), & k_5 &= h f(x_n + h, y_n + k_4). \end{aligned} \quad (8)$$

Тоді

$$T_{1n} = y_n + k_1, \quad T_{2n} = y_n + k_2,$$

* Слоньовський Р.В., Яремко Т.М. Чисельні методи розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь. – Львів, 1990.

$$T_{3n} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3), \quad (9)$$

$$T_{4n} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_4 + k_5).$$

Значення J_n визначаємо безпосереднім диференціюванням правої частини системи по y або числовим диференціюванням. Побудовані числові методи застосуємо для дослідження роботи кварцового автогенератора. Використаємо сталі параметри біполярного транзистора $u_{BE} = 0,2035$, $u_{BK} = -5,3417$, $u_{R3} = 4,6583$.

$$\text{Апроксимуємо } I_{e0} = 10^{-7} \left(e^{40Ue} - 1 \right), \quad I_{k0} = 10^{-7} \left(e^{40Uk} - 1 \right)$$

За вхідні дані прийmemo: $F=10^6$ Гц, $C1=10^{-9}$ Ф, $C2=1,016310114 \cdot 10^{-9}$ Ф, $C3=2 \cdot 10^{-9}$ Ф, $C4=1 \cdot 10^{-12}$ Ф, $a=40$, $R1=5,2 \cdot 10^4$ Ом, $R2=6,2 \cdot 10^4$ Ом, $R3=1,5 \cdot 10^4$ Ом, $R4=7,5$ Ом, $L=2 \cdot 10^{-3}$ Гн, $E=10$ В.

Струм у вхідному резонансному контурі i_L , зображений на рис.3, в момент вмикання електричного кола має наростаючий, проте чітко гармонійний характер.

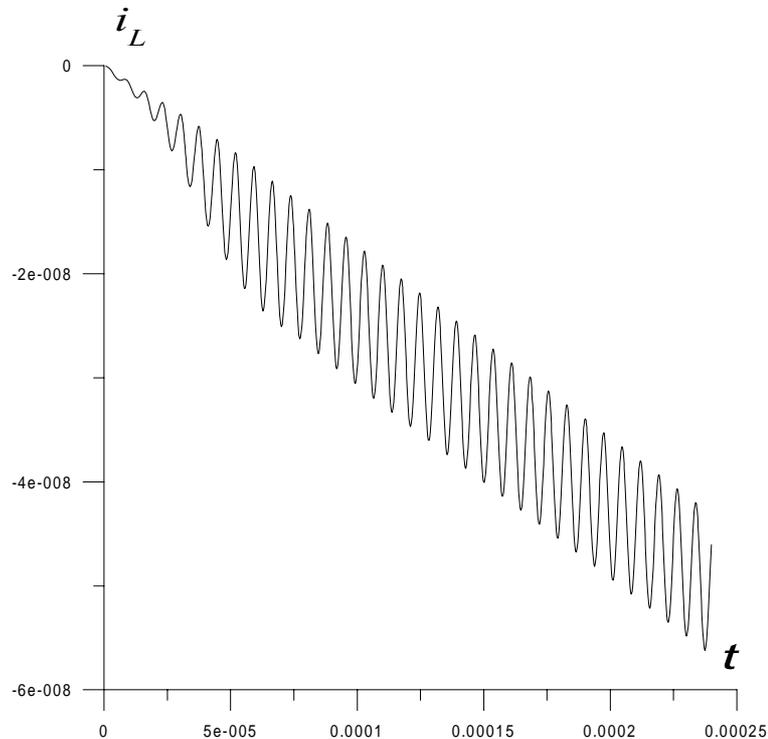


Рис. 3. Струм у вхідному контурі кварцового автогенератора у перехідному процесі

Вхідна напруга U_{C2} (рис. 4) характеризує напругу на базі транзистора, тобто на вході активного елемента підсилення.

Головним результатом дослідження є розрахунок вихідної напруги U_{C3} (рис. 5) кварцового автогенератора, за яким ми можемо судити не тільки про його параметри (амплітуду, частоту, параметричну чутливість тощо), але і про характер перебігу перехідного процесу автогенератора.

При розв'язанні штивних задач запропонований метод дещо поступається методів Рунге-Кутта як за складністю, так і за затратами часу на обчислення. Проте для таких штивних

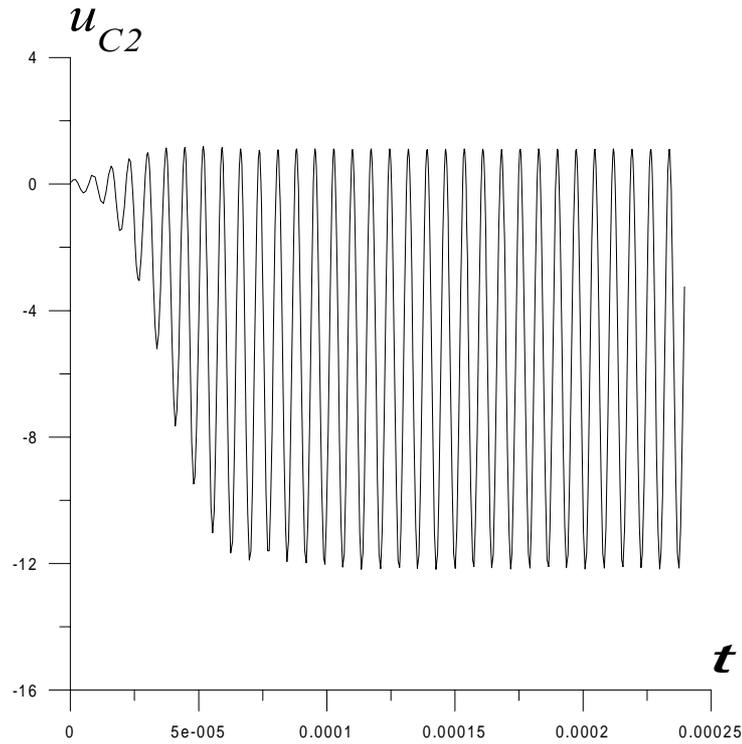


Рис. 4. Напряга на вході кварцового автогенератора у перехідному процесі

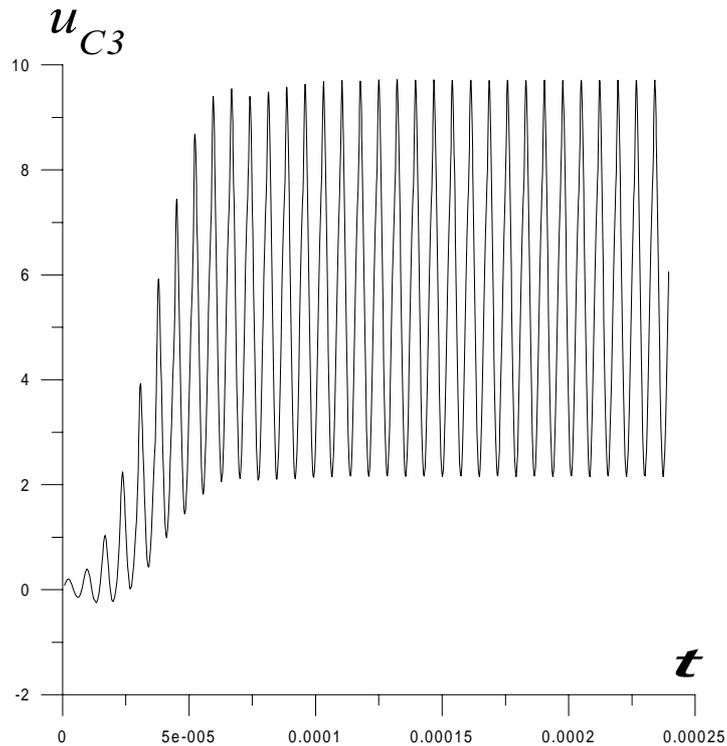


Рис. 5. Вихідна напряга кварцового автогенератора у перехідному процесі

задач, де частота коливань сягає сотень тисяч кілогерц, він має значні переваги за всіма показниками. Але найголовніше, що він дає змогу розв'язувати задачі, які не можна розв'язати методом Рунге-Кутта.