

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ В ЕЛЕКТРОПРИВОДАХ З ОБЕРТОВО-ПОСТУПАЛЬНИМ РУХОМ НА ПРИКЛАДІ КРАНОВОГО МЕХАНІЗМУ

© Чабан А.В., Молнар М.М., Бойчук Б.Г., 2006

**Запропоновано методикку математичного моделювання електромеханічних коливань в електроприводі з обертово-поступальним рухом. Асинхронний мотор та привідний механізм розглядаються як система із зосередженими параметрами з нелінійними коефіцієнтами. Рівняння стану електромеханічної системи зображені в нормальній формі Коші.**

**In the paper is proposed the method of mathematical modeling of electromechanical oscillations in electric drive with rotationally forward movement. Induction motor and drive follower are considered as system with lumped parameters with nonlinear coefficients.**

**Постановка проблеми.** Математичне моделювання електромеханічних коливань займає чільне місце на етапі проектування та експлуатації електроприводів. Особливо завдання ускладнюється коли розглядається система з великою кількістю ступенів свободи. У таких системах подекуди розглядаються як обертові рухи, так і поступальні. І, очевидно, присутній значний вплив цих рухів на роботу як електричного мотора, так і механічної частини приводного механізму. Прикладом такої системи може бути крановий електропривід, в якому здійснюються крутильні коливання в пружних муфтових з'єднаннях валопроводу електропривода та поступальні коливання вантажу на пружному канаті. У загальному випадку електромеханічну систему треба розглядати як поєднання електричної підсистеми, яка складається з пристроїв із рухомими електричними та магнітними контурами (для нашого прикладу асинхронний мотор) та механічної підсистеми (для нашого прикладу обертово-поступальний механізм). Математична модель мотора побудована на підставі теорії нелінійних електромагнітних кіл, а механічна – на підставі теорії нелінійних рівнянь аналітичної механіки, а саме: рівнянь Лагранжа другого роду. Зрозуміло, що досліджуваний об'єкт розглядається як єдина електромеханічна систем. Розв'язання задачі ускладнюється тим фактом, що довжина каната постійно змінюється, а це змушує коефіцієнти жорсткості та дисипації розглядати як функціональні залежності від лінійної координати (довжини каната), що зумовлює нелінійність диференціальних рівнянь механічної підсистеми. Очевидно, що інтегрування рівняння стану електромеханічного об'єкта здійснюється чисельними методами, про що буде наведено нижче.

**Аналіз результатів останніх досліджень.** Сучасні наукові дослідження здійснюються за умови подання електричної підсистеми асинхронними моторами, математичні моделі яких записані в перетвореній системі координат (косокутна або прямокутна), що не дає змоги повноцінного використання таких моделей у електромеханічних системах, адже для приводів подібного типу застосовуються досить часто асинхронні мотори з фазовим ротором, а для таких моторів перетворена система координат щодо моделі моторів позбавляє врахування всіх видів несиметрії як з боку статора, так і з боку ротора. [2]. Також досить часто поступальні коливні рухи еквівалентують обертовими, що не завжди доцільно [3], особливо для нелінійних механічних систем.

У сучасних задачах електропривода розглядаються системи, як правило, із прямими та зворотними зв'язками, що зумовлює швидкоплинність перехідних процесів в електромеханічному пристрої. За таких умов не доцільно розглядати коефіцієнти жорсткості та дисипації каната як функції його довжини. А це дає змогу зображення механічної підсистеми лінійними диференціальними рівняннями стану. Натомість для систем без керування такі допущення неприйнятні, адже в цих системах час загасання перехідних процесів є порівняно великим, а за цей час істотно зміниться довжина каната і, як наслідок, зміняться коефіцієнти жорсткості та дисипації каната.

Потрібно зазначити, що заходи щодо демпфування електромеханічних коливань у системах із зосередженими параметрами (скінченна кількість ступенів свободи), детально розроблені вченими НТУ "ХП" та Національного університету "Львівська політехніка". Зокрема це розглянуто в працях [6–8].

**Задачі досліджень.** Метою цієї роботи є методика математичного моделювання електромеханічних коливань електропривода з обертово-поступальним рухом на прикладі кранового механізму. Для аналізу математичної моделі використовувався прототип кранового електропривода. Аналіз електромеханічних коливань здійснювали на прикладі кінематичної схеми, зображеної на рис. 1. Очевидно, що прототип дещо відрізняється від реальної моделі, але характер протікання як крутильних, так і поступальних коливань буде аналогічний реальним приводам (зрозуміло для параметрів реальних електроприводів). Зауважимо, що матеріали наших досліджень можна застосовувати і в шахтних приводах, де теж доцільно розглядати привід з обертово-поступальним рухом, але в таких випадках необхідно розглядати ще одну пружну ланку – противагу кліті.

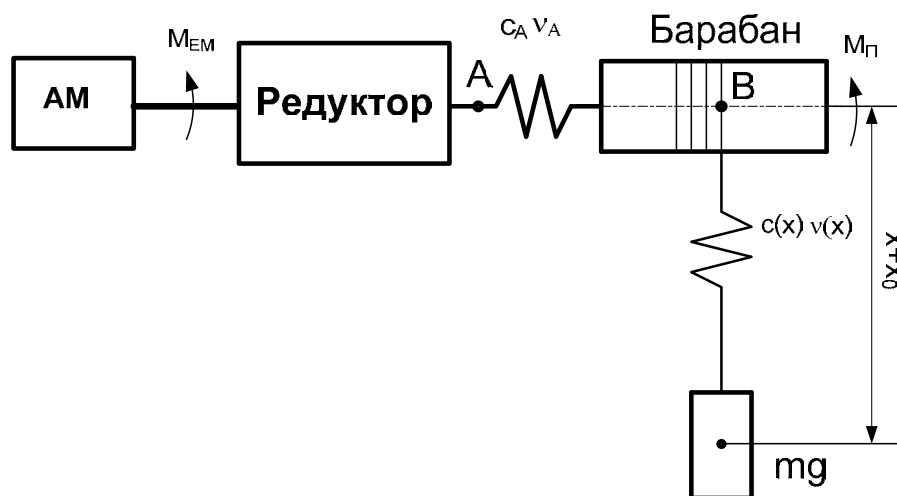


Рис. 1. Кінематична схема електропривода

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо кінематичну схему електропривода.

Запишемо рівняння Лагранжа другого роду для голономної системи з урахуванням дисипації [4, 5] стосовно схеми, зображеної на рис. 1.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad \text{де } i = 1, 2, 3, \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} \equiv 0; \quad (1)$$

$$q_1 = \varphi_1, \dot{q}_1 = \omega_1, \quad q_2 = \varphi_2, \dot{q}_2 = \omega_2, \quad q_3 = x + x_0, \dot{q}_3 = v, \quad (2)$$

де  $\varphi_1$  – кут повороту абсолютно жорсткої системи асинхронний мотор – редуктор, приведений до точки А;  $\omega_1$  – кутова швидкість абсолютно жорсткої системи асинхронний мотор – редуктор, приведена до точки А;  $\varphi_2$  – кут повороту барабана;  $\omega_2$  – кутова швидкість барабана;  $x_0$  – початкова

координата центра маси вантажу відносно точки  $B$ ;  $x$  – поточна лінійна координата;  $v$  – швидкість руху вантажу;  $T$  – кінетична енергія системи;  $\Pi$  – потенціальна енергія системи;  $\Phi$  – дисипативна функція Релея системи;  $Q_i$  – узагальнені сили, які діють у системі.

Розпишемо послідовно величини в (1)

$$T = \frac{J_{\Sigma}\omega_1^2}{2} + \frac{J_B\omega_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2}; \quad \Pi = \frac{c_A(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \frac{c(x)(x - x_2)^2}{2}; \quad \Phi = \frac{v_A(\omega_2 - \omega_1)^2}{2} + \frac{v(x)(v - v_2)^2}{2}; \quad (3)$$

$$J_{\Sigma} = u^2 J_{AM} + J_P^{(2)}; \quad u = \frac{z_2}{z_1}; \quad c(x) = \frac{c_0}{-x - x_0}; \quad v(x) = \frac{v_0}{-x - x_0}; \quad (4)$$

$$Q_1 = M_{EM}; \quad Q_2 = 0; \quad Q_3 = -mg, \quad (5)$$

де  $z_1, z_2$  – кількість зубів шестерень первинного та вторинного валів редуктора, відповідно;  $J_{AM}$  – момент інерції асинхронного мотора;  $J_P^{(2)}$  – момент інерції редуктора, приведений до вторинного вала;  $J_B$  – момент інерції барабана (зауважимо, що для спрощення задачі масою каната нехтуємо);  $c_A$  – жорсткість пружної муфти;  $v_A$  – коефіцієнт дисипації пружної муфти;  $c_0$  – погонний коефіцієнт жорсткості каната;  $v_0$  – погонний коефіцієнт дисипації каната;  $m$  – маса вантажу;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $M_{EM}$  – приведений електромагнітний момент привідного мотора до т.  $A$ , див. (22).

Запишемо рівняння голономного зв'язку

$$x_2 = R\varphi_2 \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = R\omega_2, \quad \text{а також умову: } \partial(x + x_0) \equiv \partial x. \quad (6)$$

Розв'яжемо сумісно (1)–(5), за умови (6) стосовно кожної узагальненої швидкості, та подамо систему диференціальних рівнянь в нормальній формі Коші:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_{\Sigma}} (M_{EM} - c_A(\varphi_1 - \varphi_2) - v_A(\omega_1 - \omega_2)); \quad (7)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{J_B} \left( c_A(\varphi_1 - \varphi_2) + v_A(\omega_1 - \omega_2) + \frac{c_0}{x + x_0} R(R\varphi_2 - x) + \frac{v_0}{x + x_0} R(R\omega_2 - v) \right); \quad (8)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-1}{m} \left( \frac{c_0}{2(x + x_0)^2} (R\varphi_2 - x)^2 + \frac{c_0}{x + x_0} (R\varphi_2 - x) + \frac{v_0}{x + x_0} (R\omega_2 - v) + mg \right). \quad (9)$$

Запишемо диференціальні рівняння стосовно кожної узагальненої координати

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2; \quad \frac{dv}{dt} = x. \quad (10)$$

Доповнимо систему (7)–(10) рівняннями асинхронного мотора у фазних координатах струмів, приведених до точки  $A$  [1].

$$u_S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2u_{SA} - u_{SB} - u_{SC} \\ 2u_{SB} - u_{SA} - u_{SC} \end{bmatrix}; \quad R_i = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2R_{iA} + R_{iC} & R_{iC} - R_{iB} \\ R_{iC} - R_{iA} & 2R_{iB} + R_{iC} \end{bmatrix} \quad i = S, R; \quad (11)$$

$$\frac{di_S}{dt} = A_S(u_S - R_S i_S) + A_{SR} \Pi(-\Omega \Psi_R - R_R i_R); \quad (12)$$

$$\frac{di_R}{dt} = \Pi^{-1} A_{RS}(u_S - R_S i_S) + \Pi^{-1} A_R \Pi(-\Omega \Psi_R - R_R i_R) + \Omega i_R; \quad (13)$$

$$A_S = \alpha_S(1 - \alpha_S G); \quad A_{SR} = A_{RS} = \alpha_S \alpha_R G; \quad A_R = \alpha_R(1 - \alpha_R G); \quad (14)$$

$$\Psi_S = \Psi = \Pi \Psi_R, \quad \Psi_R = \Pi^{-1} \Psi_S, \quad \Psi = \tau(i_S + \Pi i_R); \quad (15)$$

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(p_0 u \gamma + 2\pi/3) & -\sin(p_0 u \gamma) \\ \sin(p_0 u \gamma) & -\sin(p_0 u \gamma - 2\pi/3) \end{bmatrix}; \quad (16)$$

$$\Pi^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sin(p_0 u \gamma - 2\pi/3) & \sin(p_0 u \gamma) \\ -\sin(p_0 u \gamma) & \sin(p_0 u \gamma + 2\pi/3) \end{bmatrix}; \quad (17)$$

$$\Omega = \Pi \frac{d\Pi^{-1}}{dt} \equiv -\Pi^{-1} \frac{d\Pi}{dt} = \frac{p_0 u \omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}; \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} i_A & i_B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} i_{SA} & i_{SB} \end{bmatrix}^T + \Pi \begin{bmatrix} i_{RA} & i_{RB} \end{bmatrix}^T; \quad R = 1/(\alpha_S + \alpha_R + \tau); \quad G = \begin{bmatrix} T + b_A i_A & b_B i_A \\ b_A i_B & T + b_B i_B \end{bmatrix}; \quad (19)$$

$$T = 1/(\alpha_S + \alpha_R + \rho), \quad b = \frac{2}{3} \frac{R - T}{i_m^2}, \quad b_A = b(2i_A + i_B), \quad b_B = b(2i_B + i_A); \quad (20)$$

$$\tau = \left( \frac{\Psi_m}{i_m} \right)^{-1}; \quad \rho = \left( \frac{\partial \Psi_m}{\partial i_m} \right)^{-1}; \quad i_m = 2\sqrt{(i_A^2 + i_A i_B + i_B^2)/3}, \quad (21)$$

де  $u_s$  – фазна напруга живлення мотора;  $R_S, R_R$  – діагональні матриці опорів обмотки фази статора і ротора, відповідно;  $i_s, i_r$  – струм фази статора і ротора, відповідно;  $\Psi_R$  – повне потокозчеплення фази ротора;  $\alpha_S, \alpha_R$  – обернені індуктивності статора і ротора, відповідно;  $\Psi$  – основне потокозчеплення мотора;  $p_0$  – кількість пар магнітних полюсів статора,  $\gamma$  – електричний кут повороту ротора,  $\Psi_m(i_m)$  – крива намагнічення привідного асинхронного мотора.

Подамо вираз електромагнітного моменту [1]

$$M_E = \sqrt{3} p_0 u (i_{RA}^{\Pi} i_{SB} - i_{RB}^{\Pi} i_{SA}) / \tau, \quad \text{де} \quad \begin{bmatrix} i_{RA}^{\Pi} & i_{RB}^{\Pi} \end{bmatrix}^T = \Pi \begin{bmatrix} i_{RA} & i_{RB} \end{bmatrix}^T. \quad (22)$$

**Результати комп'ютерної симуляції.** Сумісному інтегруванню підлягає система диференціальних рівнянь (7)–(10), (12), (13) за умови (11), (14)–(22). Інтегрування рівнянь стану здійснювались явними методами, а саме: методом Рунге–Кутта четвертого порядку алгоритмічною мовою Visual FORTRAN.

Для аналізу електромеханічної системи використовували такі елементи: асинхронний мотор типу АО–31–4 з паспортними даними:  $U_H = 380$  В,  $I_H = 1,6$  А,  $P_H = 0,6$  кВт,  $p_0 = 2$ ; редуктор з прямозубою передачею  $u = 100$ , втратами в редукторі нехтуємо; барабан з моментом інерції  $J_B = 1$  кгм; жорсткість каната визначаємо з [2];  $x_0 = -12$ ;  $m = 200$  кг;  $R = 0,3$  м.

Комп'ютерну симуляцію здійснювали у два етапи, залежно від погонної жорсткості та погонної дисипації каната. На першому етапі симуляції застосовували канат меншої жорсткості, що, очевидно, збільшить амплітуду коливань як вантажу, так і валів, з'єднаних через пружну муфту, а на другому – застосовувався канат більшої жорсткості. Зауважимо, що жорсткість муфти та погонна жорсткість каната суттєво впливає на власну частоту коливань системи. Методика вибору реальних коефіцієнтів жорсткості детально обґрунтована в [2]. Розглянемо графічні залежності досліджуваних функцій.

На рис. 2 показано перехідний процес руху координати центра мас вантажу на першому етапі симуляції. Варто зазначити цікавий момент, який впливає, аналізуючи цей рисунок. Під час пуску електропривода вантаж опускається вниз. Це пояснюється простим фактом: електромагнітний момент (як інтегральна характеристика) поступово збільшується, а вага вантажу незмінна. Отже, в момент комутації обертовий момент, що діє на барабан поверне електропривід у зворотному напрямку, цей процес продовжуватиметься до тих пір, поки електромагнітний момент не перевищить обертовий

момент. Цей короткочасний імпульс, а також дія пружних сил в канаті, і вимушують вантаж опуститись на деяку величину вниз. Висота опускання вантажу залежить від жорсткості каната.

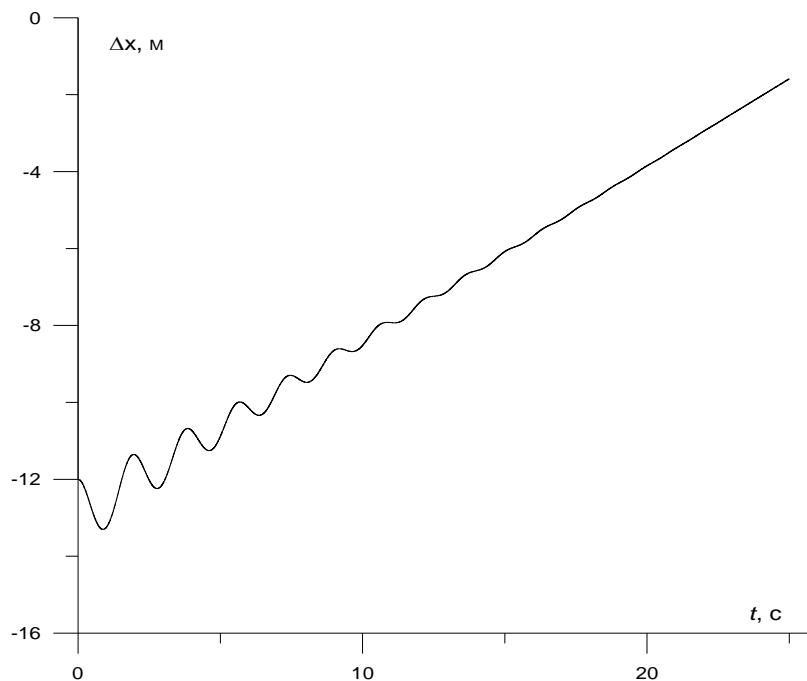


Рис. 2. Координата центра мас вантажу на першому етапі симуляції

На рис. 3 показано пружний момент у муфтовому з'єднанні валопроводу електропривода. Під час пуску електропривода пружний момент зазнає різких змін, що пов'язано з величиною пускового моменту. Майже через одну секунду коливні процеси в пружній муфті, пов'язані з пуском електропривода практично затухають, і характер пружного моменту повністю залежить від жорсткості каната. Аналізуючи цей рисунок, приходимо до висновку, що коливні процеси як в електричній, так і в механічній підсистемі переважно залежать від поступальних коливань вантажу.

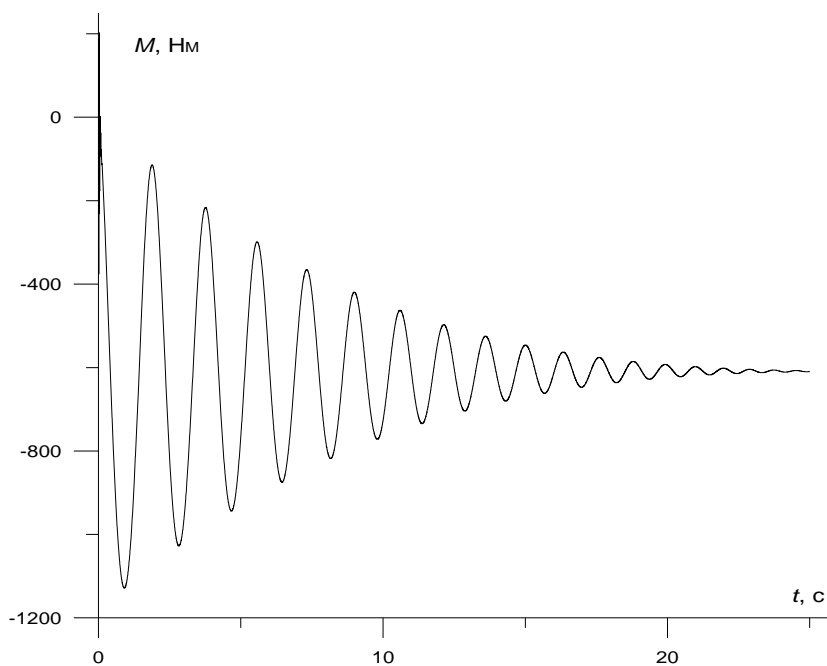


Рис. 3. Пружний момент у муфтовому з'єднанні валопроводу на першому етапі симуляції

На рис. 4 та 5 зображено перехідний процес швидкості поступального руху центра маси вантажу та розподіл сили пружності в канаті. Як бачимо з рисунків, коливний процес вантажу істотно впливає на ці функціональні залежності. Урахування дисипації в рівняннях Лагранжа другого роду (дисипативна функція Релея) дає змогу реально відтворити картину коливних процесів на математичній моделі. Залежно від погонних коефіцієнтів жорсткості та дисипації частота та час затухання коливань змінюватимуться, що показано на рис. 7 та 8.

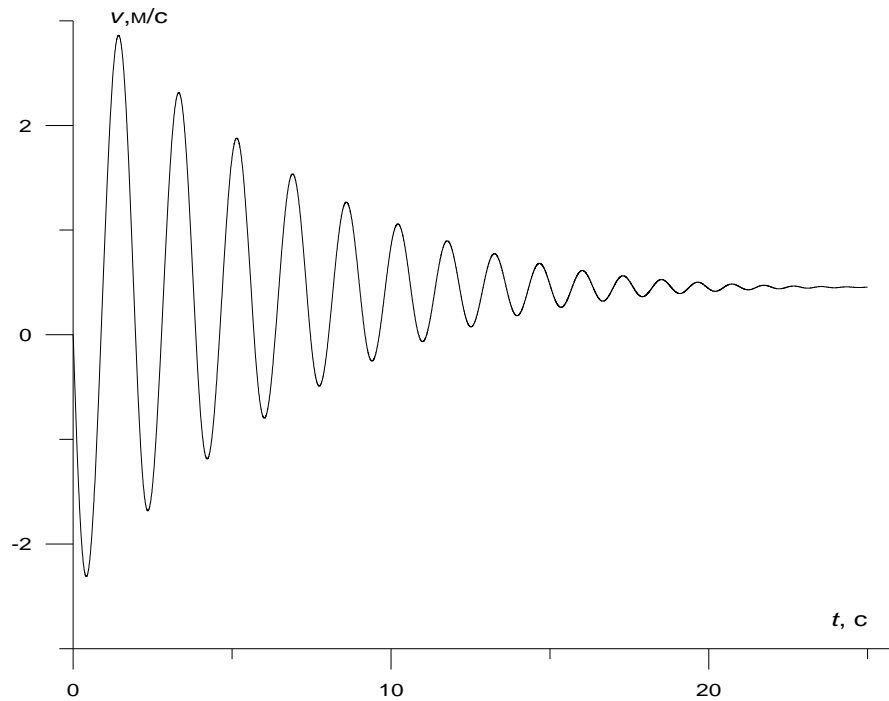


Рис. 4. Швидкість руху вантажу на першому етапі симуляції

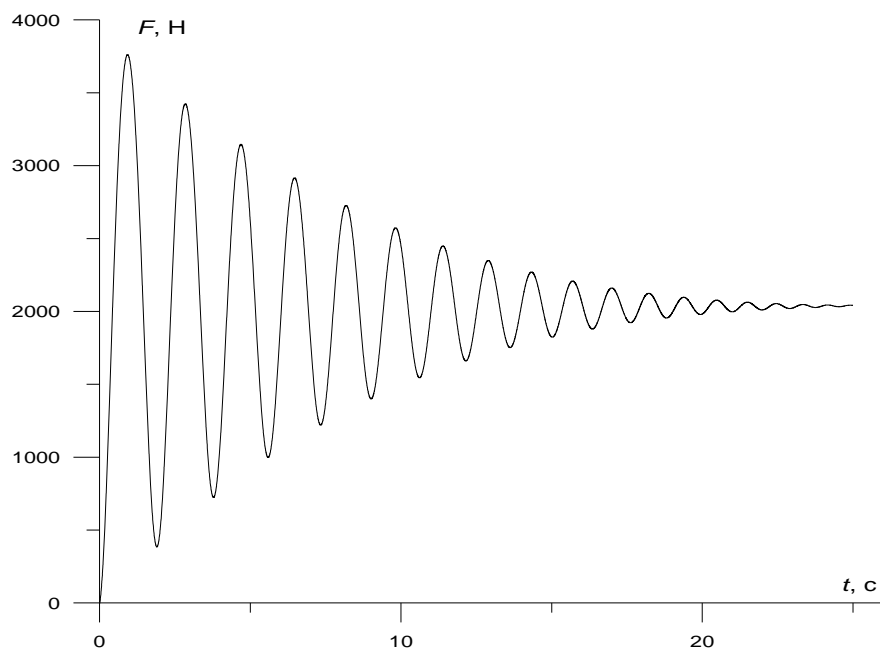


Рис. 5. Сила пружності в канаті на першому етапі симуляції

На рис. 6 відтворено характер струму фази статора як функції часу. Знову ж таки наочно видно вплив механічних коливних процесів на електромагнітні в асинхронному моторі. Коливні

процеси вантажу породжують крутильні коливання валопроводу електропривода, який, своєю чергою, призводить до флуктацій струму фази статора. Очевидно, що із затуханням коливного процесу, усі досліджувані функціональні процеси виходять на усталений процес.

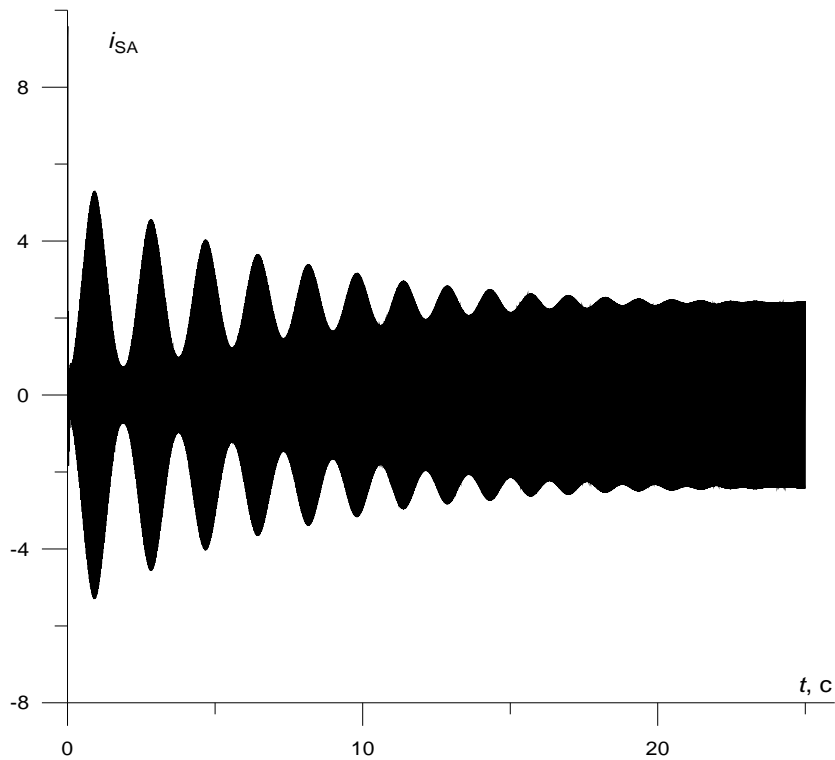


Рис. 6. Струм статора на першому етапі симуляції

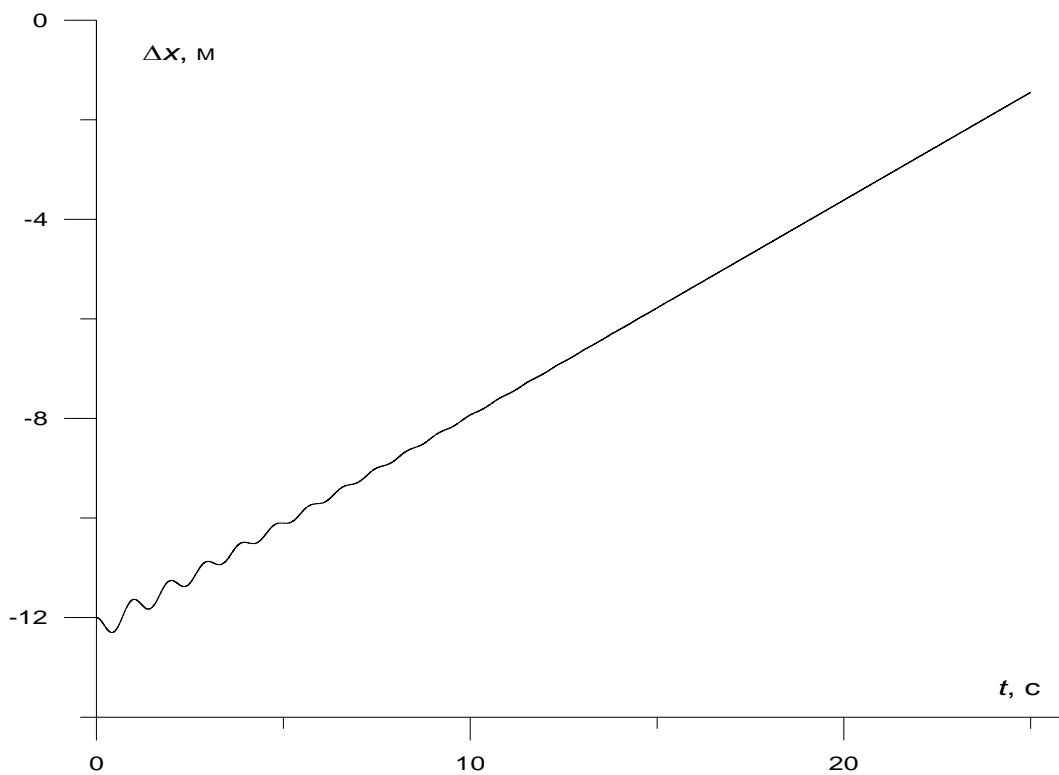


Рис. 7. Координата центра мас вантажу на другому етапі симуляції

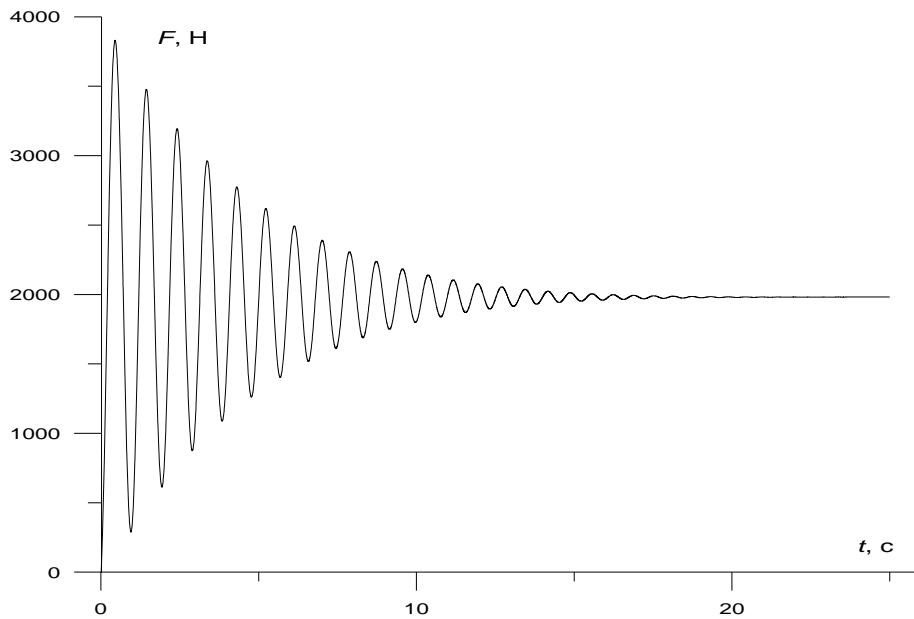


Рис. 8. Сила пружності в канаті на другому етапі симуляції

**Висновки.** Аналізуючи викладені вище теоретичні та графічні матеріали, доходимо висновку, що особливість крутильно-поперечних коливних процесів має досить складний характер, що пояснюється нелінійністю диференціальних рівнянь стану електричної та механічної підсистеми електромеханічного пристрою. Особливо істотно впливає на характер коливань зміна параметрів механічної підсистеми за нелінійними законами, що дає змогу дослідження її винятково методами математичного моделювання, які базуються на теоретичних засадах електротехніки та аналітичної механіки, і, як наслідок, комп'ютерній симуляції математичної моделі.

1. Чабан А. Особливості  $\Psi$ - та  $A$ -моделей асинхронного мотора у фазних координатах // Електротехніка і електромеханіка. – 2005'4. – С. 37–39. 2. Харченко Є., Собоєвські С. Перехідні процеси у привідних системах будівельних підіймальних пристроїв // Технічні вісті. – 2005/1(20). – 2(21). – С. 79–85. 3. Ключев В.И. Теория электропривода – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 560 с. 4. Петкевич В.В. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1981. – 496 с. 5. Башарин А.В., Постников Ю.В. Примеры расчета автоматизированного электропривода на ЭВМ. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 512 с. 6. Лозинський О.Ю., Марущак Я.Ю., Кушнір А.П. Особливості синтезу електромеханічних систем з пружними елементами і урахуванням дії дисипативних сил // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2002. – № 449. – С. 116–120. 7. Марущак Я.Ю. Дослідження САР двомасової системи, синтезованої методом узагальненого характеристичного полінома // Технічна електродинаміка. – 2000. – № 4. – С. 45–48.