УДК 621.313.33

С.Й. Рендзіняк
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ТЗЕ

РЕДУКЦІЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПІДСХЕМИ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ В ДІАКОПТИЧНИХ МЕТОДАХ

© Рендзіняк С.Й., 2006

Запропоновано удосконалений метод узгодження нелінійних підсхем з врахуванням їхніх динамічних властивостей під час моделювання перехідних процесів методом роздільного інтегрування підсхем. Розглянуто особливості формування заступної моделі підсхем у вигляді багатополюсника. Розроблено математичний апарат і алгоритм заміни підсхеми багатополюсником через редукцію його системи алгебро-диференціальних рівнянь.

An improved simulation method of nonlinear subcircuits when their dynamic characteristics are taken into consideration using multirate integration method for subcircuits is proposed. Main features of equivalent model creation of subcircuit as multiport are considered. Mathematical method and the algorithm to substitute subcircuit with multiport using the algebraic and differential equations reduction are developed.

Постановка проблеми. Відчутне зменшення класу досліджуваних схем, в яких можливе моделювання динамічних режимів за релаксаційною схемою з необхідною точністю, стимулювало розроблення нових підходів щодо врахування зв’язків підсхем [4]. Один з них полягає в урахуванні під час розрахунку певної окремої підсхеми найменш можливої інформації про динамічні властивості сусідніх підсхем, чого немає в існуючих ітераційних схемах, де по суті інші підсхеми статично впливають на стан поточної підсхеми через вхідні змінні. Для цього пропонується замінити сусідні підсхеми згорнутими через редукцію їхніх систем рівнянь багатополюсниками, описаних алгебро-диференціальними рівняннями, параметри яких динамічно коректуються після розв’язання рівнянь зв’язку підсхем.

Аналіз останніх досліджень. Існує велика кількість методів, в основі яких покладено діакоптичний підхід [1, 2]. Відрізняються вони способами утворення і опису підсистем, формуванням зв’язків між ними, організацією процедури розв’язання тощо. Метод роздільного інтегрування підсхем, як будь–який метод з явними складовими в різницевій схемі, має певні обмеження кроку інтегрування. Ці складові за умови застосування неявних методів розв’язання підсхем повністю визначаються типом зв’язків між ними. Найпростіше встановлюють зв’язки між зовнішніми напругами і струмами підсхем за допомогою додаткових ідеальних джерел енергії, але тоді не враховують інерційні особливості сусідніх підсхем, що відразу призводить до обмеження кроку інтегрування підсхем. Дещо пом’якшує цю умову врахування внутрішніх опорів сусідніх підсхем за допомогою реальних джерел енергії [3]. Принципово вирішує проблему врахування динамічних властивостей сусідніх підсхем введення в реальне джерело реактивного елемента [4, 5], параметри якого визначають в момент узгодження підсхем.

Задачі дослідження. Метою статті є розроблення методу узгодження розв’язків окремих підсхем під час розрахунку динамічних режимів складних електричних кіл із застосуванням діакоптичного підходу, в якому враховуються інерційні і нелінійні властивості підсхем, що покращує стійкість різницевих чисельних схем і суттєво збільшує клас досліджуваних схем.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Виклад основного матеріалу. Нехай деяка складна схема розділена на дві частини – підсхеми N_1 і N_2 (рис. 1).

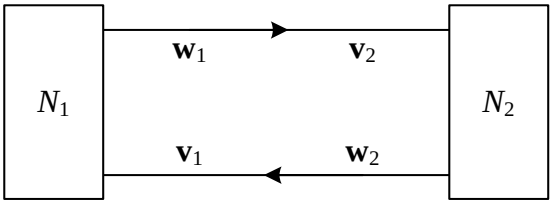

Рис. 1. Встановлення зв'язку між підсхемами за допомогою додаткових зовнішніх змінних

Виділимо в такій парі два інформаційні канали: $w_1 \to v_2$ від першої підсхеми до другої та $w_2 \to v_1$ від другої підсхеми до першої, де w_1 і w_2 – вектори вихідних параметрів підсхем, v_1 і v_2 – вектори вхідних параметрів підсхем. Очевидно, що між ними встановлюються співвідношення, які регулюються рівняннями зв'язку

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де щодо матриці перестановлень F, як матриці з тільки однією одиницею в кожному рядку і в кожному стовпці, завжди чинне співвідношення [6]

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{1}. \tag{2}$$

Якщо вхідні та вихідні параметри упорядковані, то ця матриця буде одиничною.

Системи алгебро-диференціальних рівнянь підсхем, наприклад, системи нелінійних диференціальних рівнянь у формі Коші та вихідні рівняння набувають вигляду

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1(\mathbf{x}_1)\dfrac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{P}_1\mathbf{x}_1 + f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) + \mathbf{B}_1\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_1 = \mathbf{D}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{H}_1\mathbf{v}_1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_2(\mathbf{x}_2)\dfrac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \mathbf{P}_2\mathbf{x}_2 + f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2) + \mathbf{B}_2\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 = \mathbf{D}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{H}_2\mathbf{v}_2, \end{cases} \tag{4}$$

де x_1, x_2 – змінні стану підсхем.

Вихідні рівняння і рівняння зв'язку (1) розв'яжемо щодо вхідних величин

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix},$$

звідки

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{H}_1 & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для розв'язання цієї системи використаємо метод Гаусса до матричних блоків. По-перше, помножимо перший рядок зліва на матричний добуток $\mathbf{H}_2\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{H}_2\mathbf{F}^T$ і додамо його до другого рядка. Отримуємо тоді вираз $\left(\mathbf{F}^T - \mathbf{H}_2\mathbf{F}^T\mathbf{H}_1\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_2\mathbf{F}^T\mathbf{D}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{x}_2$, який множимо ще на матрицю F, враховуючи властивість (2). Аналогічні матричні операції здійснюємо з другим рядком, помножуючи його зліва на матричний добуток $\mathbf{H}_1\mathbf{F} = \mathbf{H}_1\left(\mathbf{F}^T\right)^{-1}$ і додаючи його до першого, після

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

чого отримуємо $\left(\mathbf{F}-\mathbf{H}_1\mathbf{F}\mathbf{H}_2\right)\mathbf{v}_2=\mathbf{D}_1\mathbf{x}_1+\mathbf{H}_1\mathbf{F}\mathbf{D}_2\mathbf{x}_2$, який своєю чергою множимо зліва на F^T. Здійснивши всі необхідні математичні перетворення, отримуємо остаточний вираз рівнянь зв'язку

$$\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{D}}_{11} & \tilde{\mathbf{D}}_{12}\\ \tilde{\mathbf{D}}_{21} & \tilde{\mathbf{D}}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix}, \tag{6}$$

де нові підматриці дорівнюють відповідно з урахуванням властивості (2)

$$\tilde{\mathbf{D}}_{11}=\left(\mathbf{1}-\mathbf{F}\mathbf{H}_2\mathbf{F}^T\mathbf{H}_1\right)^{-1}\mathbf{F}\mathbf{H}_2\mathbf{F}^T\mathbf{D}_1,\qquad \tilde{\mathbf{D}}_{12}=\left(\mathbf{1}-\mathbf{F}\mathbf{H}_2\mathbf{F}^T\mathbf{H}_1\right)^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_2,$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{21}=\left(\mathbf{1}-\mathbf{F}^T\mathbf{H}_1\mathbf{F}\mathbf{H}_2\right)^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_1,\qquad \tilde{\mathbf{D}}_{22}=\left(\mathbf{1}-\mathbf{F}^T\mathbf{H}_1\mathbf{F}\mathbf{H}_2\right)^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{H}_1\mathbf{F}\mathbf{D}_2.$$

Остаточно систему рівнянь цілої нелінійної схеми визначимо з перших рівнянь систем (3) і (4) так:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{M}_1\left(\mathbf{x}_1\right)\dfrac{d\mathbf{x}_1}{dt}\\ \mathbf{M}_2\left(\mathbf{x}_2\right)\dfrac{d\mathbf{x}_2}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{v}_1\right)\\ f_2\left(\mathbf{x}_2,\mathbf{v}_2\right)\end{pmatrix}, \tag{7}$$

де $\mathbf{A}_{11}=\mathbf{P}_1+\mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{D}}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}=\mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{D}}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}=\mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{D}}_{21}$, $\mathbf{A}_{22}=\mathbf{P}_2+\mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{D}}_{22}$.

Ця система є основою для порівняння різних методів узгодження підсхем, з нею буде зручно зіставляти надалі нові вирази.

Застосуємо тепер для розв'язання систем рівнянь (3), (4) та рівняння зв'язку (6) ітераційну схему, яка відповідає блоковому методу Гаусса-Зайделя [6],

$$\begin{pmatrix}\mathbf{M}_1\left(\mathbf{x}_1^{J+1}\right)\dfrac{d\mathbf{x}_1^{J+1}}{dt}\\ \mathbf{M}_2\left(\mathbf{x}_2^{J+1}\right)\dfrac{d\mathbf{x}_2^{J+1}}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1^{J+1}\\ \mathbf{x}_2^{J+1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1\left(\mathbf{x}_1^{J+1},\mathbf{v}_1^{J}\right)\\ f_2\left(\mathbf{x}_2^{J+1},\mathbf{v}_2^{J}\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1^{J}\\ \mathbf{v}_2^{J}\end{pmatrix}; \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1^{J+1}\\ \mathbf{v}_2^{J+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{D}}_{11} & \tilde{\mathbf{D}}_{12}\\ \tilde{\mathbf{D}}_{21} & \tilde{\mathbf{D}}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1^{J+1}\\ \mathbf{x}_2^{J+1}\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Основна матриця $\begin{pmatrix}\mathbf{P}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2\end{pmatrix}$ системи рівнянь стану (8) істотно відрізняється від аналогічної матриці системи цілої схеми (7), що безперечно змінює динамічні властивості нової системи (8) і, відповідно, розподіл власних значень перехідної матриці різницевої схеми певного числового методу, а отже, й умови стійкості цієї числової схеми. З цим пов'язані недоліки методу роздільного інтегрування підсхем, але враховуючи базову ідею методу, яка полягає в фіксації на певних інтервалах часу значень вхідних змінних і незалежному інтегруванні підсхем, підкреслимо очевидні переваги такого підходу, передусім можливість паралелізації розрахунку динамічних режимів складних схем, поділених на частини.

Враховуючи те, що подальші співвідношення стосуються блокової ітераційної схеми Гаусса-Зайделя, з метою спрощення цих виразів не будемо вказувати індекс J цих ітерацій.

Виділяючи певну r-ту підсхему N_r, замінимо інші підсхеми (розглядаємо тут їх як одну підсхему) деяким нескладним багатополюсником N'_{r*} (рис. 2).

Якщо r-ту підсхему описати системою рівнянь

$$\begin{cases}\mathbf{M}_r\left(\mathbf{x}_r\right)\dfrac{d\mathbf{x}_r}{dt}=\mathbf{P}_r\mathbf{x}_r+f_r\left(\mathbf{x}_r,\mathbf{v}_r\right)+\mathbf{B}_r\mathbf{v}_r\\ \mathbf{w}_r=\mathbf{D}_r\mathbf{x}_r+\mathbf{H}_r\mathbf{v}_r\end{cases} \tag{10}$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

то решта підсхем відповідно

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\dfrac{d\mathbf{x}_{r*}}{dt} = \mathbf{P}_{r*}\mathbf{x}_{r*} + f_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*}, \mathbf{v}_{r*}\right) + \mathbf{B}_{r*}\mathbf{v}_{r*} \\ \mathbf{w}_{r*} = \mathbf{D}_{r*}\mathbf{x}_{r*} + \mathbf{H}_{r*}\mathbf{v}_{r*}, \end{cases} \tag{11}$$

де $r \in R$, $r* = R \setminus r$, R – простір підсхем.

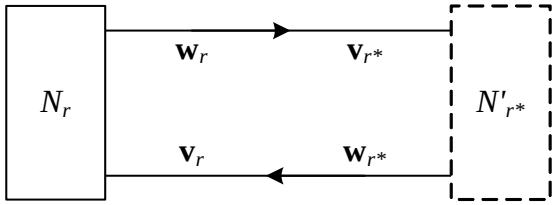

Рис. 2. Заміна нелінійної підсхеми спрощеним багатополюсником

Зв'язок між підсхемами встановлюється рівнянням

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_{r*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_r \\ \mathbf{v}_{r*} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Нехай після редукції решта підсхем число змінних стану зменшиться до необхідної величини, а саме до числа змінних зв'язку, тоді

$$\begin{cases} \mathbf{M}'_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)\dfrac{d\mathbf{x}'_{r*}}{dt} = \mathbf{P}'_{r*}\mathbf{x}'_{r*} + f'_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}, \mathbf{v}_{r*}\right) + \mathbf{B}'_{r*}\mathbf{v}_{r*} \\ \mathbf{w}_{r*} = \mathbf{D}'_{r*}\mathbf{x}'_{r*} + \mathbf{H}_{r*}\mathbf{v}_{r*}, \end{cases} \tag{13}$$

де матриці B'_{r*} і D'_{r*} квадратні і не вироджені, матриця H_{r*} залишається без змін.

Повна схема тоді описується системою рівнянь

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_r\left(\mathbf{x}_r\right)\dfrac{d\mathbf{x}_r}{dt} \\ \mathbf{M}'_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)\dfrac{d\mathbf{x}'_{r*}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{rr} & \mathbf{A}'_{rr*} \\ \mathbf{A}'_{r*r} & \mathbf{A}'_{r*r*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}'_{r*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_r\left(\mathbf{x}_r, \mathbf{v}_r\right) \\ f'_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}, \mathbf{v}_{r*}\right) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де

$$\mathbf{A}'_{rr*} = \mathbf{P}_r + \mathbf{B}_r\left(\mathbf{1} - \mathbf{F}\mathbf{H}_{r*}\mathbf{F}^T\mathbf{H}_r\right)^{-1}\mathbf{F}\mathbf{H}_{r*}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_r,\ \mathbf{A}'_{rr*} = \mathbf{B}_r\left(\mathbf{1} - \mathbf{F}\mathbf{H}_{r*}\mathbf{F}^T\mathbf{H}_r\right)^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}'_{r*},$$

$$\mathbf{A}'_{r*r} = \mathbf{B}'_{r*}\left(\mathbf{1} - \mathbf{F}^T\mathbf{H}_r\mathbf{F}\mathbf{H}_{r*}\right)^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_r,\ \mathbf{A}'_{r*r*} = \mathbf{P}'_{r*} + \mathbf{B}'_{r*}\left(\mathbf{1} - \mathbf{F}^T\mathbf{H}_r\mathbf{F}\mathbf{H}_{r*}\right)^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{H}_r\mathbf{F}\mathbf{D}'_{r*}.$$

Розглянемо умови тотожності систем (7) і (14). По-перше, побачимо рівність матриць $\mathbf{A}_{rr} = \mathbf{A}'_{rr}$. Окрім цього $\mathbf{A}_{rr*}\mathbf{x}_{r*} = \mathbf{A}'_{rr*}\mathbf{x}'_{r*}$, якщо

$$\mathbf{D}_{r*}\mathbf{x}_{r*} = \mathbf{D}'_{r*}\mathbf{x}'_{r*} = \mathbf{z}_{r*}. \tag{15}$$

Розмірність вектора z_{r*} також збігається з розмірністю векторів змінних зв'язку.

Продовжуючи порівняння систем (7) і (14), зведемо ліву частину другого рядка кожної з них до похідної від z_{r*}, помноживши кожне рівняння зліва відповідно на матриці $\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)$ і $\mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)$. Тоді отримуємо два рівняння

$$\frac{d\mathbf{z}_{r*}}{dt} = \mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{A}_{r*r}\mathbf{x}_r + \mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{A}_{r*r*}\mathbf{x}_{r*} + \mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)f_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*}, \mathbf{v}_{r*}\right);$$

$$\frac{d\mathbf{z}_{r*}}{dt} = \mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)\mathbf{A}'_{r*r}\mathbf{x}_r + \mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)\mathbf{A}'_{r*r*}\mathbf{x}'_{r*} + \mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)f'_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*}, \mathbf{v}_{r*}\right).$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Перші складові цих рівнянь, а саме: $\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{A}_{r*r}\mathbf{x}_r$ та $\mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)\mathbf{A}'_{r*r}\mathbf{x}_r$, будуть однакові за умови

$$\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{B}_{r*}=\mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)\mathbf{B}'_{r*}. \tag{16}$$

Аналогічний вираз можна визначити й для других складових $\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{A}_{r*r*}\mathbf{x}_{r*}$ і $\mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)\mathbf{A}'_{r*r*}\mathbf{x}'_{r*}$, замінивши вектор $\mathbf{x}'_{r*}$ на $\mathbf{D}'^{-1}_{r*}\mathbf{D}_{r*}\mathbf{x}_{r*}$ з рівності (15):

$$\begin{cases}\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{P}_{r*}=\mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)\mathbf{P}'_{r*}\mathbf{D}'^{-1}_{r*}\mathbf{D}_{r*}\\ \mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{B}_{r*}=\mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)\mathbf{B}'_{r*}\end{cases}$$

Друга рівність збігається з умовою (16). А перша – чинна після заміни $\mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)$ на $\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{B}_{r*}\mathbf{B}'^{-1}_{r*}$ за умови $\mathbf{P}_{r*}=\mathbf{B}_{r*}\mathbf{B}'^{-1}_{r*}\mathbf{P}'_{r*}\mathbf{D}'^{-1}_{r*}\mathbf{D}_{r*}$. Вона своєю чергою виконується після помноження зліва на матрицю $\mathbf{D}_{r*}\mathbf{P}_{r*}^{-1}$, якщо дотримується рівність $\mathbf{1}=\mathbf{D}_{r*}\mathbf{P}_{r*}^{-1}\mathbf{B}_{r*}\mathbf{B}'^{-1}_{r*}\mathbf{P}'_{r*}\mathbf{D}'^{-1}_{r*}$. Звідки

$$\mathbf{D}_{r*}\mathbf{P}_{r*}^{-1}\mathbf{B}_{r*}=\mathbf{D}'_{r*}\mathbf{P}'^{-1}_{r*}\mathbf{B}'_{r*}. \tag{17}$$

І, нарешті, третя рівність дає умову

$$\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)f_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*},\mathbf{v}_{r*}\right)=\mathbf{D}'_{r*}\mathbf{M}'^{-1}_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)f'_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*},\mathbf{v}_{r*}\right). \tag{18}$$

Отже, з рівнянь (16), (17) і (18) визначимо матриці і вектори параметрів модифікованої внаслідок редукції частини схеми, яка розміщена за межами *r*-ї підсхеми,

$$\begin{cases}\mathbf{M}'_{r*}\left(\mathbf{x}'_{r*}\right)=\mathbf{B}'_{r*}\left(\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{B}_{r*}\right)^{-1}\mathbf{D}'_{r*}\\ \mathbf{P}'_{r*}=\mathbf{B}'_{r*}\left(\mathbf{D}_{r*}\mathbf{P}_{r*}^{-1}\mathbf{B}_{r*}\right)^{-1}\mathbf{D}'_{r*}\\ f'_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*},\mathbf{v}_{r*}\right)=\mathbf{B}'_{r*}\left(\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{B}_{r*}\right)^{-1}\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)f_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*},\mathbf{v}_{r*}\right)\end{cases}$$

Зрозуміло, що наведені перетворення й умови достатні й можливо не єдині, але важливо те, що вони не накладають додаткових вимог, крім невиродженості квадратних матриць D'$_{r*}$ і B'$_{r*}$. Але яке вони повинні приймати значення? Матриця B'$_{r*}$ є множником у всіх складових першого рівняння системи (13) і по суті визначає його масштаб, тому цілком припустимо прийняти її одиничною. А матриця D'$_{r*}$ присутня у всіх складових цієї системи рівнянь як множник вектора $\mathbf{x}'_{r*}$, тому їх добуток також доцільно замінити вектором z$_{r*}$ згідно з рівнянням (15).

Отже, остаточно модифікована система рівнянь (13) набуває вигляду

$$\begin{cases}\mathbf{M}''_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\dfrac{d\mathbf{z}_{r*}}{dt}=\mathbf{P}''_{r*}\mathbf{z}_{r*}+f''_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*},\mathbf{v}_{r*}\right)+\mathbf{v}_{r*}\\ \mathbf{w}_{r*}=\mathbf{z}_{r*}+\mathbf{H}_{r*}\mathbf{v}_{r*},\end{cases} \tag{19}$$

де

$$\begin{cases}\mathbf{M}''_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)=\left(\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{B}_{r*}\right)^{-1}\\ \mathbf{P}''_{r*}=\left(\mathbf{D}_{r*}\mathbf{P}_{r*}^{-1}\mathbf{B}_{r*}\right)^{-1}\\ f''_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*},\mathbf{v}_{r*}\right)=\left(\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)\mathbf{B}_{r*}\right)^{-1}\mathbf{D}_{r*}\mathbf{M}_{r*}^{-1}\left(\mathbf{x}_{r*}\right)f_{r*}\left(\mathbf{x}_{r*},\mathbf{v}_{r*}\right)\end{cases} \tag{20}$$

Опис цього багатополюсника вводять в програмний комплекс разом з описом *r*-ї підсхеми, динамічно змінюючи його параметри під час розрахунку. Необхідно зазначити, що згідно з алгоритмом методу роздільного інтегрування підсхем параметри коректуються тільки в момент

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

узгодження підсхем, таким чином вектор x_{r*} розглядається тут не як вектор стану, а як вектор параметрів з певними значеннями на J-й ітерації, власне як і вектор змінних зв'язку v_{r*}. Лінійні складові, наприклад, матриця $\mathbf{P}''_{r*}$, обчислюються тільки один раз. Отже, сам багатополюсник сприймається лінійним.

Математична модель багатополюсника подається безпосередньо в вигляді системи рівнянь (19) або в вигляді заступної електричної схеми з керованими джерелами. Тип заступної схеми залежить від характеру певної пари полюсів багатополюсника.

А) Якщо k-та компонента вектора вхідних величин v_{r*} – струм, то відповідна компонента вектора вихідних величин w_{r*} і вектора змінних стану z_{r*} – напруга. Тоді заступною схемою такого інформаційного каналу буде послідовно-паралельна схема з взаємними ємностями (рис. 3). Відповідно для підсхеми N_r керуючим сигналом буде напруга.

Ошибка! Раздел не указан.

Рис. 3. Заступна модель лінійного багатополюсника щодо однієї пари зовнішніх полюсів (для відповідної пари полюсів підсхеми N_r вхідна величина – напруга, вихідна величина – струм)

Б) Якщо k-та компонента вектора вхідних величин v_{r*} – напруга, то відповідна компонента вектора вихідних величин w_{r*} і вектора змінних стану z_{r*} – струм. Тоді заступною схемою такого інформаційного каналу буде паралельно-послідовна схема з взаємними індуктивностями (рис. 4). Відповідно для підсхеми N_r керуючим сигналом буде струм.

Ошибка! Раздел не указан.

Рис. 4. Заступна модель лінійного багатополюсника щодо однієї пари зовнішніх полюсів (для відповідної пари полюсів підсхеми N_r вхідна величина – струм, вихідна величина – напруга)

На рис. 3 і 4 показані також додаткові джерела постійної напруги і постійного струму, які моделюють відповідні значення нелінійних функцій і джерел живлення підсхем.

Залишилося дати відповідь на запитання: які початкові значення на (J+1)-й ітерації приймають компоненти вектора z_{r*}? На завершенні J-ї ітерації після корекції змінних зв'язку v_r і v_{r*} стають відомі їх значення. Але ті самі значення приймають згідно з рівнянням (12) й відповідні компоненти вектора w_{r*}. Отже, з другого рівняння системи (19), яка описує згорнений багатополюсник, знаходимо початкові значення вектора змінних стану z_{r*} для продовження на (J+1)-й ітерації моделювання підсхеми N_r, навантаженої цим багатополюсником,

$$\mathbf{z}_{r*} = \mathbf{w}_{r*} - \mathbf{H}_{r*}\mathbf{v}_{r*}. \qquad (21)$$

Розглянемо випадки нехтування тими чи іншими особливостями отриманої заступної схеми і зв'язок їх з відомими методами узгодження підсхем.

1. Нехай в заступній схемі багатополюсника відсутні реактивні елементи. Тоді згорнута підсхема описується лише системою алгебричних рівнянь

$$\mathbf{w}_{r*} = \mathbf{z}_{r*} + \mathbf{H}_{r*}\mathbf{v}_{r*}$$

у якій вектор z_{r*} стає звичайним сумарним вектором всіх постійних величин. На заступних схемах його компоненти залежно від їх типу відображають відповідно джерелами постійної напруги або постійного струму, які не мають чітко визначеного фізичного змісту і призначені тільки для формального узгодження підсхем. Тому їх переважно називають фіктивними джерелами, а параметри визначають за тим самим виразом (21), що й у випадку з реактивними елементами. Такі заступні схеми згорнутих багатополюсників з фіктивними джерелами показано на рис. 5 і 6.

Ошибка! Раздел не указан.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Рис. 5. Заступна модель лінійного багатополюсника з фіктивним джерелом напруги та активними елементами щодо однієї пари зовнішніх полюсів (для відповідної пари полюсів підсхеми N_r вхідна величина – напруга, вихідна величина – струм)

Ошибка! Раздел не указан.

Рис. 6. Заступна модель лінійного багатополюсника з фіктивним джерелом струму та активними елементами щодо однієї пари зовнішніх полюсів (для відповідної пари полюсів підсхеми N_r вхідна величина – струм, вихідна величина – напруга).

Такий метод узгодження підсхем відповідає запропонованому в роботах [3] методу врахування внутрішніх опорів підсхем.

2. Одночасне нехтування реактивних складових і активних втрат у заступних схемах багатополюсника приводить до рівняння $\mathbf{w}_{r*} = \mathbf{z}_{r*}$, що означає повну заміну багатополюсника певним числом фіктивних джерел (рис. 7). Саме такий метод узгодження підсхем широко вживається із-за простоти його програмної реалізації.

Ошибка! Раздел не указан. **Ошибка! Раздел не указан.**

Рис. 7. Заступні моделі з фіктивними джерелами щодо однієї пари зовнішніх полюсів лінійного багатополюсника

Висновки. Запропонований метод узгодження розв'язків підсхем застосовується й для більшої кількості підсхем. Алгоритмізація методу, який передбачає створення заступних моделей нелінійних підсхем у вигляді лінійних багатополюсників з реактивними елементами, поданих системою алгебро-диференціальниїх рівнянь, і впровадження в діючі програмні комплекси розрахунку складних електричних кіл, істотно розширює сферу застосування діакоптичних методів, зокрема методу роздільного інтегрування підсхем.

1. Хэчтел Г.Д., Санджованни-Винчентелли А. Обзор методов моделирования третьего поколения // ТИИЭР. – 1981. – 69. – № 10. – С. 100–119. 2. Newton A.R., Sangiovanni-Vincentelli A.L. Relaxation-Based Electrical Simulation // IEEE Trans. on Computer-Aided Design. – 1984. – Vol. CAD-3, N. 10. – P. 308–331. 3. Рендзіняк С.Й. Учет внутренних сопротивлений подсхем при анализе динамических режимов сложных нелинейных схем диакоптическими методами // Проблемы нелинейной электротехники: Тез. докл. III Всесоюзн. науч.-техн. конф. – К.: Ин–т проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1988. – Ч. 2. – С. 189–191. 4. Стахів П.Г., Рендзіняк С.Й. Врахування взаємного динамічного впливу підсхем в діакоптичних релаксаційних методах розрахунку багатофункціональних систем // Электроника и связь: Міжнар. наук.-техн. конф. "Проблеми фізичної та біомедичної електроніки". – К., 8–10 червня 1999. – 1999. – № 6, т. 2. – С. 201–205. 5. Рендзіняк С. Визначення взаємних зв'язків підсхем та їхній вплив на стійкість методу роздільного інтегрування // Теоретична електротехніка. – 2004. – Вип. 57. – С. 38–49. 6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

УДК 621.314.222.6

М.С. Сегеда, О.С. Міняйло, В.П. Олійник, К.П. Нітруца
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра ЕС

ОСОБЛИВОСТІ РОБОТИ ПАРАЛЕЛЬНО-ПОСЛІДОВНОГО З'ЄДНАННЯ ТРАНСФОРМАТОРІВ

© Сегеда М.С., Міняйло О.С., Олійник В.П., Нітруца К.П., 2006

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua