УДК 539. 3

Б.С. Воробець, М.І. Войтович
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра опору матеріалів

ДО КВАЗІСТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ЛІНІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Операторним методом квазістатична задача термопружності для тіл зі стрижневими включеннями зведена до відповідної крайової задачі для області, зайнятої основним матеріалом. При цьому вплив включення на термопружний стан основного матеріалу відображається ускладненими граничними умовами на внутрішніх поверхнях. Розглянуто випадки ідеального та нормального механічних контактів на поверхні розмежування матеріалів, для яких записані формули для визначення граничних значень напружень.

We use symbolic method to reduce quasistatic thermoelasticity problem for bodies with elastic core to a boundary problem for the region occupied by basic material. The impact of core on thermoelastic state of basic material is reflected in complicated boundary conditions imposed on inner surfaces. We then consider cases of ideal and normal mechanical contact on the boundary surface and establish formulas for computing boundary stress values.

Розглянемо тіло, що містить лінійне пружне включення у вигляді стрижня круглого попереччя радіуса R_1. Нехай термопружний стан включення зумовлений зміною його температури та зусиллями, які передаються зі сторони основного матеріалу. На поверхні Γ_1 (поверхня поділу основного матеріалу та включення) виконується умова ідеального термомеханічного контакту.

Будемо вважати, що напружено-деформований стан включення є осесиметричним. В цьому випадку напруження і переміщення, викликані зміною температури t_1 включення, знаходимо за допомогою термопружного потенціалу переміщень Φ_1 та функції Лява L_1; тоді формули для їх визначення мають вигляд [1]:

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr}^{(1)} = 2G_1\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - \Delta\Phi_1\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_1 \Delta L_1 - \frac{\partial^2 L_1}{\partial r^2}\right),\\
\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = 2G_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \Delta\Phi_1\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_1 \Delta L_1 - \frac{1}{r}\frac{\partial L_1}{\partial r}\right),\\
\sigma_{zz}^{(1)} = 2G_1\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \Delta\Phi_1\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu_1)\Delta L_1 - \frac{\partial^2 L_1}{\partial z^2}\right),\\
\sigma_{rz}^{(1)} = 2G_1\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu_1)\Delta L_1 - \frac{\partial^2 L_1}{\partial z^2}\right),\ \sigma_{r\varphi}^{(1)} = \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0;
\end{gathered} \tag{1}$$

$$u_r^{(1)} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{1}{2G_1}\frac{\partial^2 L_1}{\partial r \partial z},$$
$$u_z^{(1)} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{1}{2G_1}\left[2(1-\nu_1)\Delta L_1 - \frac{\partial^2 L_1}{\partial z^2}\right], \tag{2}$$

де $\sigma_{ij}^{(1)}$ $(i, j = r, \varphi, z)$ – компоненти напружень; $u_r^{(1)}, u_z^{(1)}$ – компоненти переміщень; r, φ, z – радіальна, кутова та осьова координати, відповідно; G_1, ν_1 – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу включення; Δ – оператор Лапласа.

Функції Φ_1 і L_1, які входять у співвідношення (1), (2), повинні задовольняти рівнянням [1]:

$$\Delta \Phi_1 = \frac{1-\nu_1}{1+\nu_1}\alpha_t^{(1)} t_1, \tag{3}$$

$$\Delta\Delta L_1 = 0,\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + p^2,\ \ p^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{4}$$

де $\alpha_t^{(1)}$ – температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу включення, а температура t_1 є розв’язком такого нестаціонарного рівняння теплопровідності [1]

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_1}{\partial r} + p_1^2 t_1 = -\frac{q_1(z,\tau)}{\lambda_1},\ p_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{5}$$

Тут λ_1 і a_1 – коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності матеріалу включення, відповідно; q_1 – потужність джерел тепла у включенні, які вважаємо лише функціями осьової координати z та часу τ .

Стосовно розглядуваної задачі частковий розв’язок рівняння (3) і загальний розв’язок рівняння (4), одержані за допомогою операторного методу [2], запишемо у вигляді:

$$\Phi_1 = \alpha_t^{(1)}\frac{1-\nu_1}{1+\nu_1}\frac{1}{p^2 - p_1^2}\left(t_1 + \frac{q_1}{p^2 \lambda_1}\right), \tag{6}$$

$$L_1 = J_0(pr)\cdot A + prJ_1(pr)\cdot B\ , \tag{7}$$

де A і B величини, які визначаються з граничних умов, $J_n(x)$ – циліндрична функція Бесселя близько $n = 0{,}1$ першого роду.

Використаємо умови ідеального механічного контакту на поверхні Γ_1, що формулюються так:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)},\ \sigma_{rz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(2)};\ u_r^{(1)} = u_r^{(2)},\ u_z^{(1)} = u_z^{(2)}, \tag{8}$$

де індекси “1”, “2” тут і надалі відносять розглядувані величини до включення та основного матеріалу відповідно.

Підставимо у співвідношення (2) замість Φ_1 та L_1 їх вирази (6), (7), і далі використаємо останні дві граничні умови (8). В результаті для визначення величин A і B одержимо таку систему рівнянь:

$$J_1(pR_1)\cdot A - pR_1 J_0(pR_1)\cdot B = \frac{2G_1}{p^2}\left[u_r^* - \alpha_t^{(1)}\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{1}{p^2-p_1^2}\frac{\partial t_1}{\partial r}\bigg|_{\Gamma_1}\right];$$

$$J_0(pR_1)\cdot A - \left[4(1-\nu_1)J_0(pR_1) - pR_1 J_1(pR_1)\right]\cdot B = \tag{9}$$

$$= \frac{2G_1}{p^2}\left[-u_z^* - \alpha_t^{(1)}\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{1}{p^2-p_1^2}\left(t_1\big|_{\Gamma_1} + \frac{q}{p^2\lambda_1}\right)\right];\ u_r^* = u_r^{(2)}\Big|_{\Gamma_1};\ u_z^* = u_z^{(2)}\Big|_{\Gamma_1};$$

де контактні значення температур і теплових потоків, згідно з [3], дорівнюють:

$$\frac{\partial t_1}{\partial r}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{\partial t_2}{\partial r}\bigg|_{\Gamma_1} = -R_1^{-1}D(p_1)\left(t_* + \frac{q_1}{p_1^2\lambda_1}\right),$$

$$t_1\big|_{\Gamma_1} = t_2\big|_{\Gamma_1} = t_*,\quad D(p_1) = p_1 R_1 J_1(p_1 R_1) J_0^{-1}(p_1 R_1). \tag{10}$$

Підставимо у перші дві з умов (8) значення напружень, що визначаються формулами (1); тоді з використанням співвідношень (6), (7) і (10), попередньо визначивши величини A і B із системи рівнянь (9), одержимо:

$$\sigma_{rr}^* = 2G_1\left\{2\alpha_t^{(1)}(1+\nu_1)\left[\Delta(p)\left(p^2-p_1^2\right)R_1^2\right]^{-1}\left[D(p)\left(t_* + \frac{q_1}{p^2\lambda_1}\right) - D(p_1)\left(t_* + \frac{q_1}{p^2\lambda_1}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - R_1^{-1}\left(u_r^* + pR_1 u_z^*\right) - 2(1-\nu_1)R_1^{-1}\Delta^{-1}(p)\left[u_r^* + (pR_1)^{-1}D(p)u_z^*\right]\right\},$$

$$\sigma_{rz}^* = 2G_1\left\{2\alpha_t^{(1)}(1+\nu_1)\frac{(pR_1)^{-1}D(p)}{\Delta(p)\left(p^2-p_1^2\right)R_1^2}\left[D(p)\left(t_* + \frac{q_1}{p^2\lambda_1}\right) - D(p_1)\left(t_* + \frac{q_1}{p^2\lambda_1}\right)\right] - \right. \tag{11}$$

$$\left. - pu_r^* - 2(1-\nu_1)R_1^{-1}\Delta^{-1}(p)(pR_1)^{-1}D(p)\left[u_r^* + (pR_1)^{-1}D(p)u_z^*\right]\right\},$$

$$\Delta(p) = 1 - 4(1-\nu_1)(pR_1)^{-2}D(p) + (pR_1)^{-2}D^2(p),$$

$$\sigma_{rr}^* = \sigma_{rr}^{(2)}\Big|_{\Gamma_1};\ \sigma_{rz}^* = \sigma_{rz}^{(2)}\Big|_{\Gamma_1},$$

де через $D(p)$ позначений оператор, що визначається формулою (10) для оператора $D(p_1)$, в якій слід p_1 замінити на p.

Співвідношення (11) є граничними умовами на поверхні контакту Γ_1 і відображають вплив включення на термопружний стан основного матеріалу. Праві частини цих умов містять величини, які є диференціальними операторами безмежного порядку. Вважаючи стрижень тонким та довгим, розкладемо ці величини в ряди за степенями R_1, а потім в цих рядах відкинемо малі члени близько R_1^3 і вище. В результаті одержимо найпростіший варіант граничних умов:

$$\sigma_{rr}^* = \frac{2G_1}{1-2\nu_1}\left\{\left(1 + \frac{\nu_1(1-\nu_1)}{2(1-2\nu_1)}p^2R_1^2\right)\frac{u_r^*}{R_1} + \nu_1\left(1 + \frac{1-\nu_1}{8\nu_1(1-2\nu_1)}p^2R_1^2\right)u_z^* - \right.$$

$$\left. - (1+\nu_1)\alpha_t^{(1)}\left[\left(1 + \frac{1}{8}R_1^2\left(p_1^2 + \frac{1}{1-2\nu_1}p^2\right)\right)t_* + \frac{q_1 R_1^2}{8\lambda_1}\right]\right\},$$

$$\sigma_{rz}^{*}=-\frac{G_1 pR_1}{1-2\nu_1}\left\{2\nu_1\left(1+\frac{1-\nu_1}{8\nu_1(1-2\nu_1)}p^2R_1^2\right)\frac{u_r^*}{R_1}+(1-\nu_1)\left(1+\frac{\nu_1(1-\nu_1)}{4(1-2\nu_1)}p^2R_1^2\right)pu_z^*-\right.$$
$$\left.-(1+\nu_1)\alpha_t^{(1)}\left[\left(1+\frac{1}{8}R_1^2\left(p_1^2+\frac{2(1-\nu_1)}{1-2\nu_1}p^2\right)\right)t_*+\frac{q_1R_1^2}{8\lambda_1}\right]\right\}. \qquad (12)$$

Отже, квазістатична задача термопружності для тіл з лінійними включеннями зведена до відповідної крайової задачі для області, зайнятої основним матеріалом, а вплив включення на напружено-деформований стан основного матеріалу враховується граничними умовами (11) або (12) на поверхні контакту Γ_1.

Розглянемо випадок, коли контакт між включенням і основним матеріалом відбувається по нормалі до поверхні дотику (аналог основи Вінклера). Для цього покладемо в другому співвідношенні (11) $\sigma_{rz}^{*}=0$ і визначимо з цього рівняння контактне значення переміщення u_z^*. Далі підставимо це значення u_z^* в перше співвідношення (11), в результаті одержимо:

$$\sigma_{rr}^{*}=-2G_1\left\{\left[1-2p^2R_1^2D^{-1}(p)-\frac{1}{2(1-\nu_1)}\Delta(p)p^4R_1^4D^{-2}(p)\right]\frac{u_r^*}{R_1}+\right.$$
$$\left.+\alpha_t^{(1)}\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\frac{p^2R_1^2D^{-1}(p)}{(p^2-p_1^2)R_1^2}\left[D(p)\left(t_*+\frac{q_1}{p^2\lambda_1}\right)-D(p_1)\left(t_*+\frac{q_1}{p^2\lambda_1}\right)\right]\right\}. \qquad (13)$$

Запишемо найпростіший варіант граничної умови (13). Для цього розкладемо в ряди за степенями R_1 величини, що входять у співвідношення (13), і відкинемо в цих розкладах члени близько R_1^3 і вище. Тоді будемо мати:

$$\sigma_{rr}^{*}=2G_1\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\left\{\frac{u_r^*}{R_1}-\alpha_t^{(1)}\left[\left(1+\frac{1}{8}p_1^2R_1^2\right)t_*+\frac{q_1R_1^2}{8\lambda_1}\right]\right\}. \qquad (14)$$

Гранична умова (14) нагадує гіпотезу Вінклера, поширену на випадок дії температури і джерел тепла у включенні.

Зауважимо, що граничні умови (12) одержані в припущенні осьової симетрії напружено-деформованого стану включення. Однак ними можна користуватися і при розв’язуванні неосесиметричних задач термопружності для тіл з включенням, матеріал яких не сприймає дотичного напруження $\sigma_{r\varphi}^{(1)}$.

1. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963. – 252 с. 2. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с. 3. Подстригач Я.С., Воробец Б.С., Чернуха Ю.Л. Температурные поля оболочек с покрытиями и заполнителем // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. Вып. 19. – С. 49 – 54 .