

УДК 539.3

О.М. Печеник\*, Я. Пашко, В. Урам, Я. Кочаник

\*Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра архітектурних конструкцій,  
Кошицький технічний університет,  
факультет виробничих технологій

## ВПЛИВ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ НА ВИРІШЕННЯ НЕСУЧИХ КОНСТРУКЦІЙ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

© Печеник О.М., Пашко Я., Урам В., Кочаник Я., 2002

Дослідження впливу базисних-апроксимаційних функцій для вирішення плоскої пластинки-стінки з отворами методом кінцевих елементів у фізично лінійній і фізично нелінійній областях є важливим завданням. У фізично лінійній області стінку з отворами вирішено в двох варіантах і здійснено пошук математичної моделі для вирішення стінки в нелінійній області. Для побудови базисних інтерполяційних функцій прямокутних кінцевих елементів запропоновано різну численність вузлів з відмінними можливими численностями степенів свободи у вузлах відповідного простору кінцевих елементів. Матрицю жорсткості вирішено за допомогою базисних функцій аналітичним інтегруванням і числовим гауссовим інтегруванням.

The aim of the article is to present the investigation of the influence of the basic - approximation functions applied to the solution of the plane wall with holes by the method of the finite elements in physically linear as well as physically non-linear areas. With the creation of the basic - interpolation functions of the rectangular finite elements, various numbers of junctions and various numbers of junctions parameters have been considered. The transition and singular finite elements have been applied to the solution, thus considerably influencing the results of the solution in the physically non-linear area. The rigidity matrix has been solved by means of basic functions through analytical integration as well as the Gauss numerical integration. The results have also been compared and evaluated.

У першому випадку стінку з чотирма отворами (рис. 1) ми вирішуємо у фізично лінійній області. Плоска тонка пластинка-стінка з отворами з ізотронного матеріалу завантажена по одній стороні рівномірно розподіленим одиничним навантаженням  $p(x)=p$ , паралельним її середній площині і рівномірно розподіленим по товщині пластинки. Розташуємо систему координат  $x, y$  в середній площині пластинки. В кожній точці  $M(x,y)$  є компоненти  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ . Стінку з отворами вирішуємо у двох варіантах з чотирма рішеннями. Результати рішень всіх прикладів порівнюємо.

### Перше розв'язання

У першому розв'язанні стінку з отворами ми вирішили обчислювальною програмою „МКР”, до якої було включено спеціальні прямокутні кінцеві елементи з вісьма вузлами з двома степенями свободи і назвали їх:

- звичайні кінцеві елементи;
- перехідні кінцеві елементи;
- сингулярні кінцеві елементи.

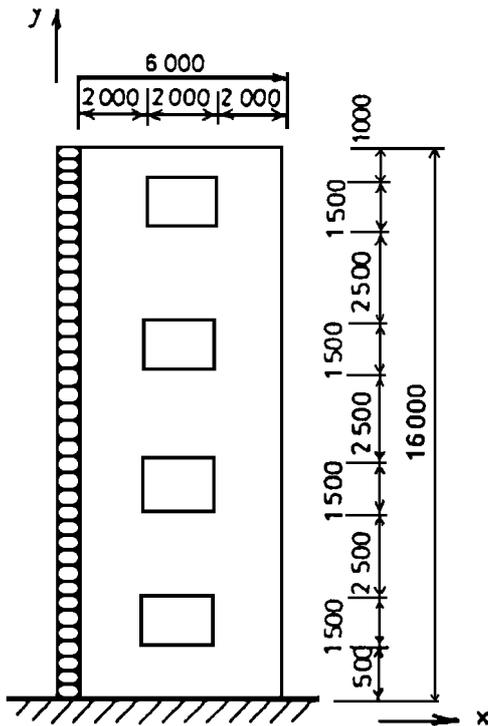


Рис. 1

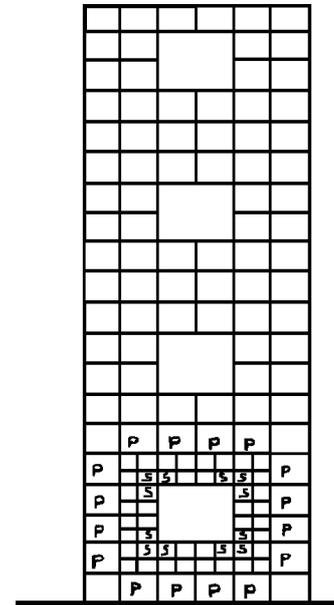


Рис. 2

Зону плоскої стінки з отворами ми розділили на 140 восьмивузлових прямокутних сирендипових кінцевих елементів (рис. 2). Густина поділу зони стінки з отворами на кінцеві елементи залежить від інтенсивності напруження, градієнта, відносної деформації і точності рішення в досліджуваній зоні стінки.

В кутах отвору стінки вкладаємо сингулярні кінцеві елементи "s".

Перехідні кінцеві елементи "p" вкладаємо в місцях, де міняємо розміри кінцевих елементів на половину. В решті частини зони вкладаємо звичайні кінцеві елементи. Така розрахункова модель стінки з отворами складається з 140 прямокутних сирендипових кінцевих елементів і 540 вузлів з двома степенями свободи. Розв'язуванням прикладів ми дійшли висновку, що така розрахункова модель добре відповідає вимогам для вирішення стінки з отворами і у фізично нелінійній області, оскільки сингулярні кінцеві елементи дозволяють набути напруження в сингулярних точках-кутах отворів і перехідні кінцеві елементи дозволяють наполовину зменшити розміри кінцевого елемента в зонах вищої інтенсивності напруження.

Базисні функції (рис. 3) для звичайних восьмивузлових прямокутних кінцевих елементів мають вигляд (3), які ми побудували за допомогою координатної функції (2)

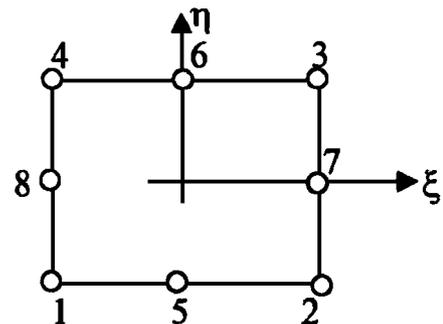


Рис. 3

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i \sum_j f(\xi, \eta) w_i w_j \quad (1)$$

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2 \quad (2)$$

$$f_{i(\xi,\eta)} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \quad (i=1,2,3,4)$$

$$f_{i(\xi,\eta)} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad (i=5,6)$$

$$f_{i(\xi,\eta)} = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2), \quad (i=7,8)$$

Базисні функції для перехідних прямокутних кінцевих елементів мають вигляд (рис. 4)

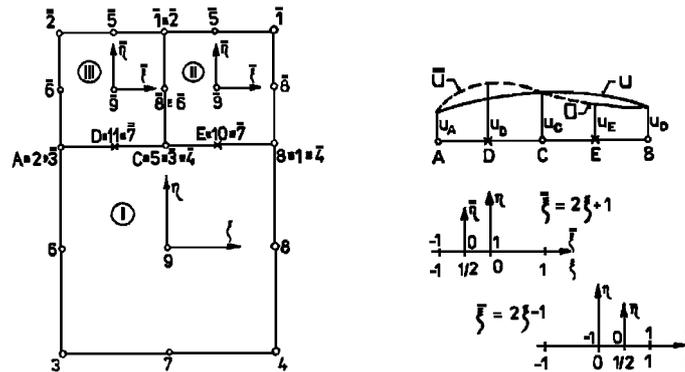


Рис. 4

Базисні функції перехідного кінцевого елемента (рис. 4) ми побудували за допомогою лагранжевого прямокутного кінцевого елемента з дев'ятьма вузлами, який ми доповнили на з'єднуючому боці кінцевого елемента двома вузлами 10 та 11, завдяки чому виник перехідний одинадцятивузловий прямокутний кінцевий елемент. Базисні функції лагранжевого прямокутного кінцевого елемента з дев'ятьма вузлами ми побудували за допомогою лагранжевих поліномів. Об'єднання перехідних кінцевих елементів із звичайними кінцевими елементами ми здійснили регулюванням функції переміщення  $u$  і  $v$  (4), (5), (6).

На стороні ADCEB перехідного кінцевого елемента I, де  $\eta = 1$

$$u = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)u_B - \frac{1}{2}\xi(1-\xi)u_A + (1-\xi^2)u_C. \quad (4)$$

На стороні CEB кінцевого елемента II, де  $\bar{\eta} = -1$

$$\bar{u} = -\frac{1}{2}\bar{\xi}(1-\bar{\xi})u_C + (1-\bar{\xi}^2)u_E + \frac{1}{2}\bar{\xi}(1+\bar{\xi})u_B. \quad (5)$$

На стороні ADC кінцевого елемента III, де  $\bar{\bar{\eta}} = -1$

$$\bar{\bar{u}} = \frac{1}{2}\bar{\bar{\xi}}(1-\bar{\bar{\xi}})u_A + \frac{1}{2}\bar{\bar{\xi}}(1+\bar{\bar{\xi}})u_C + (1+\bar{\bar{\xi}}^2)u_D. \quad (6)$$

При побудові базисних функцій сингулярного кінцевого елемента ми виходимо з ізопараметричного прямокутного кінцевого елемента з вісьма вузлами і двома степенями свободи. Вузол „1”, в якому базисна функція сингулярна, ми вкладаємо в кути отвору стінки, після чого локальна функція має вигляд:

$$W(\xi,\eta) = 1 - N_1(\xi,\eta) \quad (7)$$

У вузлі „1” ми помістили початок локальних координат  $\xi, \eta$ , тоді у вузлі „1” буде  $W_{1(0,0)} = 0$  і в усіх інших вузлах  $W_{k(i,j)} = 1$ . На підставі того, що ми використали в області кінцевого елемента позитивну функцію,  $R(\xi, \eta) = W^p$ , при чому „ $p$ ” буде “експонентою” сингулярності, що вимагається. Ця функція  $W_{k(i,j)}$  аналітично на початку координат, тобто у вузлі „1”, дорівнює нулю, а в інших вузлах дорівнює одиниці. Функції сторін прямокутного кінцевого елемента, які не перетинаються у вузлі „1”, теж дорівнюють одиниці, тобто  $R(\xi, \eta) = 1$  (рис. 5).

На підставі виведених властивостей візьмемо похідну базисної функції кінцевого елемента із сингулярністю у вузлі „1”, яка компатибільна по сторонах із несингулярними прямокутними ізопараметричними кінцевими елементами з базисними функціями  $N_i(\xi, \eta)$ .

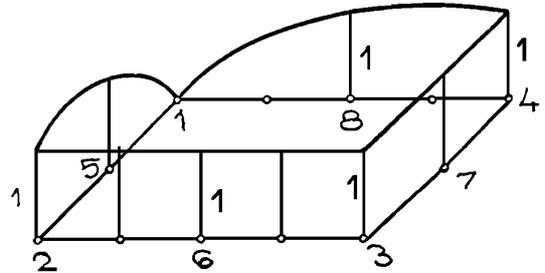


Рис. 5

$$\text{Базисні функції } H_i(\xi, \eta) \quad u_{(\xi, \eta)} = \sum H_{i(\xi, \eta)} u_i. \quad (8)$$

Матриці жорсткості для звичайних, перехідних і сингулярних кінцевих елементів ми побудували з базисних функцій (3) числовим інтегруванням найбільш високого алгебраїчного степеня точності – числового інтегрування Гаусса (1). Для звичайних сирендепових прямокутних кінцевих елементів матрицю жорсткості ми вирішили за допомогою 9 інтеграційних гауссових точок – вузлів, для перехідних і сингулярних матрицю жорсткості ми вирішили за допомогою 18 інтеграційних гауссових точок, розташованих в кінцевому елементі і здобутих з функції Лагранжа. Вагові функції ми розв’язали так, щоб отримати результати найвищого степеня точності, який дорівнює  $2n + 1$ .

### Друге розв’язання

Цю ж саму задачу ми розв’язали без сингулярних кінцевих елементів, які ми замінили звичайними кінцевими елементами, та порівняли результати розв’язання обох задач. Результати розв’язання обох задач в лінійній області виявилися однаковими. Отже, ми дійшли висновку, що сингулярні кінцеві елементи в лінійній області не мають ніякого впливу на результати.

В третьому та четвертому розв’язаннях стінки з отворами ми розділили область стінки на 120 ермитових прямокутних чотиривузлових кінцевих елементів і отримали 147 вузлів (рис. 6)

### Третє розв’язання

Стінку з отворами ми розв’язали у лінійній області обчислювальною програмою “МКР STENA 24”, в яку ми включили однакові ермитові прямокутні кінцеві елементи з чотирма вузлами у кутах і шістьма степенями свободи (9) в кожному вузлі. Розмірність матриці жорсткості дорівнює  $24 \times 24$ .

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (9)$$

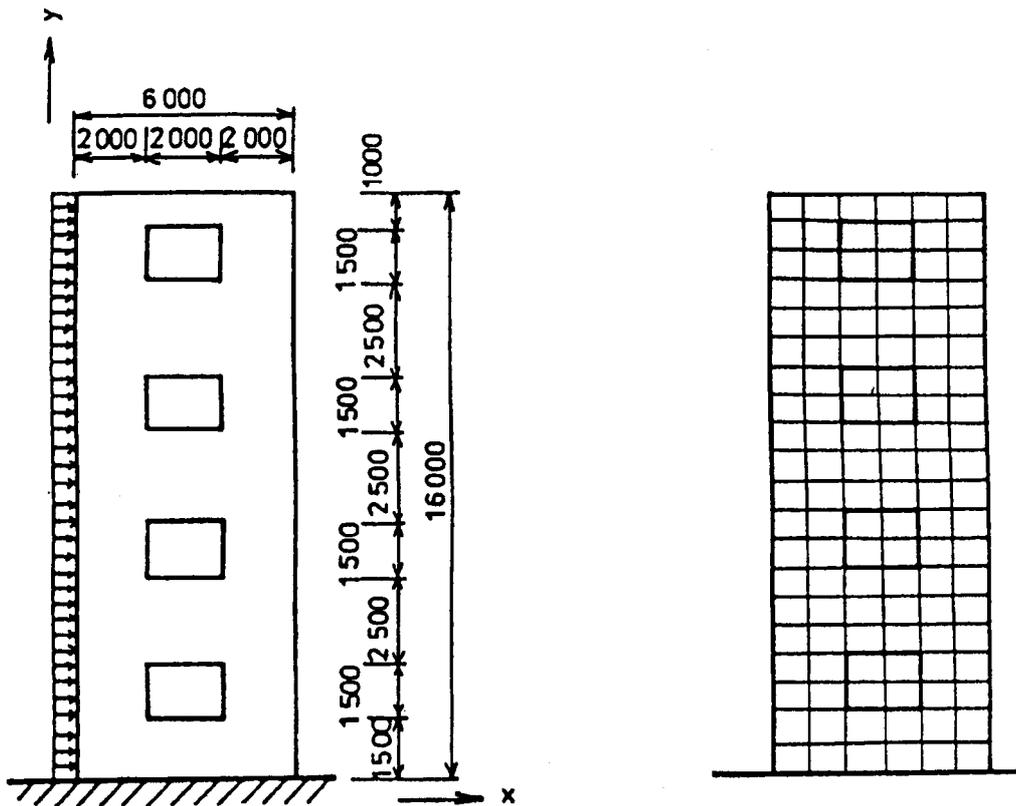


Рис. 6

Базисні функції ми побудували за допомогою оберненої матриці, побудованої з координатних функцій (10), які приводять до апроксимації переміщень по області прямокутного кінцевого елемента за допомогою полінома 4-го степеня від двох змінних.

$$f(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (10)$$

Елементи матриці жорсткості кінцевих елементів стінки ми розв'язали з умови варіацій потенційної енергії, тобто мінімуму варіаційного рівняння Лагранжа аналітичним інтегруванням (11) і отримали її в експліцитному вигляді

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] d\xi d\eta. \quad (11)$$

#### Четверте розв'язання

Цю саму задачу ми розв'язали обчислювальною програмою "МКР STENA 32", в яку ми включили однакові ермітові прямокутні кінцеві елементи з чотирма вузлами в кутах і з вісьма степенями свободи в кожному вузлі (12). Розмір матриці жорсткості дорівнює 32×32.

Визначення невідомих коефіцієнтів базисних функцій пов'язано з подоланням значних труднощів з оберненням матриць, тому базисні функції для прямокутних ермітових кінцевих елементів ми побудували перемноженням ермітових поліномів (13) в кожному координатному напрямку  $\xi, \eta$ .

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 N_{01}(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, N_{01}(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 \\
 N_{11}(\xi) &= a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), N_{11}(\eta) = a(\eta - 2\eta^2 + \eta^3) \\
 N_{02}(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, N_{02}(\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3 \\
 N_{12}(\xi) &= -a(\xi^2 - \xi^3), N_{12}(\eta) = -a(\eta^2 - \eta^3).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

В обох випадках результати розв'язання напружень і деформацій для стінки з отворами обчислювальними програмами “МКР STENA 24” та “МКР STENA 32” майже однакові, відмінність в результатах виникла внаслідок розв'язання різної кількості рівнянь.

Порівнянням результатів з першого і другого варіантів ми дійшли висновку, що вони дуже близькі, різниця у всіх випадках становить менше ніж 3 %.

Розв'яжемо стінку з чотирма отворами (рис. 1) для другого випадку у фізично нелінійній області. Стінку з отворами розв'язуємо для розрахункової моделі, здобутої в першому варіанті, де ми використали сингулярні прямокутні кінцеві елементи.

Стінку з отворами було розв'язано тою самою обчислювальною програмою “МКР”, в яку ми включили спеціальні прямокутні кінцеві елементи з вісьма вузлами з двома степенями свободи. Зону плоскої стінки з отворами ми розділили на 140 восьмивузлових прямокутних сирендипових кінцевих елементів. Поділ зони стінки з отворами на кінцеві елементи вже був вирішений в першому варіанті лінійної області і цю обчислювальну модель ми залишили для розв'язання і в фізично нелінійній області. Ця розрахункова модель добре відповідає вимогам розв'язання стінки з отворами і в фізично нелінійній області, оскільки сингулярні кінцеві елементи дозволяють отримати напруження в близькості сингулярних точок-кутів отворів, а перехідні кінцеві елементи дозволяють зменшити на половину розміри кінцевого елемента на першому поверсі в близькості отвору стінки.

Розв'язання стінки з отворами в нелінійній області методом кінцевих елементів буває складнішим, ніж в лінійній області. Варіабільність методики кінцевих елементів, яку ми використали в лінійних задачах, множимо (збільшуємо) кількістю ітераційних кроків. В нелінійній галузі розв'язання було замінено поступовим лінійним розв'язанням – “нарощувальним методом”. При цьому розв'язані фізичні рівняння виконуються на кожному кроці. Ми обрали різні кроки, оскільки розв'язання вимагає введення великої кількості вихідних даних. Програму складено з метою оптимального використання операційної пам'яті обчислювальної машини. Для розрахунку стінки з отворами в нелінійній області нами обрано метод “кривої для описання моделі”. Йдеться про дуже просту модель нарощування напружень, яка вмонтована в програму. Модель описує моментальні об'ємні і дотичні модулі по частинах лінійної функції моментальної об'ємної зміни. Якщо матеріал навантажений або полегшений, експліцитна умова течії не застосовується, а визначаються лише історичні об'ємні зміни.

Модель, описана кривою, оцінюється при аналізі як отримана нарощуванням по частинах лінійної моделі. Матрицю жорсткості звичайних, перехідних і сингулярних кінцевих елементів вирішуємо за допомогою гауссової числової інтеграції у дев'яти і вісімнадцяти гауссових вузлових точках. Для кожного нарощування в цих гауссових точках знаходимо деформації та напруження. В матриці жорсткості матриця еластичних констант [D] різна для кожної вузлової точки і кожне навантаження залежить від моментального стану об'ємних деформацій у відповідній вузловій точці. Навантаження стінки змінюється в шести діапазонах у такій послідовності збільшення вузлових навантажень: 0,5; 1,5; 5,0; 7,0; 8,0; 9,0. Програму побудовано так, щоб після досягнення максимальної специфічної

об'ємної деформації отримати остаточне рішення. В нашому випадку це сталося на шостому кроці навантаження. Об'ємні і дотичні модулі вирішимо на підставі набутих матеріальних характеристик. Замість величини після появи тріщин ми зменшуємо задану величину на  $1/700$  ( $K_{UN}$ ) –  $1/1000$  ( $G_{LD}$ ) навпроти максимальної.

$e_v$	$K_{LD}$	$K_{UN}$	$G_{LD}$	
1.	0,000	770000	700000	1000000
2.	0,002	700000	1000	700000
3.	0,005	500000	1000	500000
4.	0,010	300000	1000	300000
5.	0,015	100000	1000	100000
6.	0,020	1000	1000	1000

Стінку з отворами ми вирішуємо тільки для першого поверху. Відрізану частину заступаємо відповідними внутрішніми силами, які обчислюємо для окремих навантажувальних кроків нарощуваного навантаження, враховуючи силові умови рівноваги. Це спрощення на підставі принципу Сен Венана має тільки локальний вплив в близькості зони навантаження, а в місцях максимальних напружень цим можна нехтувати.

Стінку з отворами на першому поверсі розділимо на 74 восьмивузлові прямокутні сирендипові кінцеві елементи (рис. 7). Стінку розв'язуємо двома способами. В першому випадку, в зоні кутів отворів використовуємо сингулярні елементи, які мають сингулярну точку в куті отвору. В другому випадку, розв'язуємо стінку з отворами без сингулярних кінцевих елементів. В остаточному результаті нормальні і дотичні напруження  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  для п'ятого навантажувального кроку порівнюємо і зображуємо графічно (рис. 8).

290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310
	13	-311 14	-312 15	-313 16	-314 17	-315 18	-316 19	-317 20	-318 21	-319 22	-320 23	-321 24	-322 25	-323 26	-324 27	-325 28	-326 29	-327 30	-328 31	-329 32
-320	+321	322 323	324 325	326 327	328 329	330 331	332 333	334 335	336 337	338 339	340 341	342 343	344 345	346 347	348 349	350 351	352 353	354 355	356 357	358 359
350	351	352 353	354 355	356 357	358 359	360 361	362 363	364 365	366 367	368 369	370 371	372 373	374 375	376 377	378 379	380 381	382 383	384 385	386 387	388 389
-377	+378	379 380	381 382	383 384	385 386	387 388	389 390	391 392	393 394	395 396	397 398	399 400	401 402	403 404	405 406	407 408	409 410	411 412	413 414	415 416
397	398	399 400	401 402	403 404	405 406	407 408	409 410	411 412	413 414	415 416	417 418	419 420	421 422	423 424	425 426	427 428	429 430	431 432	433 434	435 436
-417	+418	419 420	421 422	423 424	425 426	427 428	429 430	431 432	433 434	435 436	437 438	439 440	441 442	443 444	445 446	447 448	449 450	451 452	453 454	455 456
437	438	439 440	441 442	443 444	445 446	447 448	449 450	451 452	453 454	455 456	457 458	459 460	461 462	463 464	465 466	467 468	469 470	471 472	473 474	475 476
-467	+468	469 470	471 472	473 474	475 476	477 478	479 480	481 482	483 484	485 486	487 488	489 490	491 492	493 494	495 496	497 498	499 500	501 502	503 504	505 506
497	498	499 500	501 502	503 504	505 506	507 508	509 510	511 512	513 514	515 516	517 518	519 520	521 522	523 524	525 526	527 528	529 530	531 532	533 534	535 536
-518	+519	519 520	521 522	523 524	525 526	527 528	529 530	531 532	533 534	535 536	537 538	539 540	541 542	543 544	545 546	547 548	549 550	551 552	553 554	555 556
529	530	531 532	533 534	535 536	537 538	539 540	541 542	543 544	545 546	547 548	549 550	551 552	553 554	555 556	557 558	559 560	561 562	563 564	565 566	567 568

Рис. 7

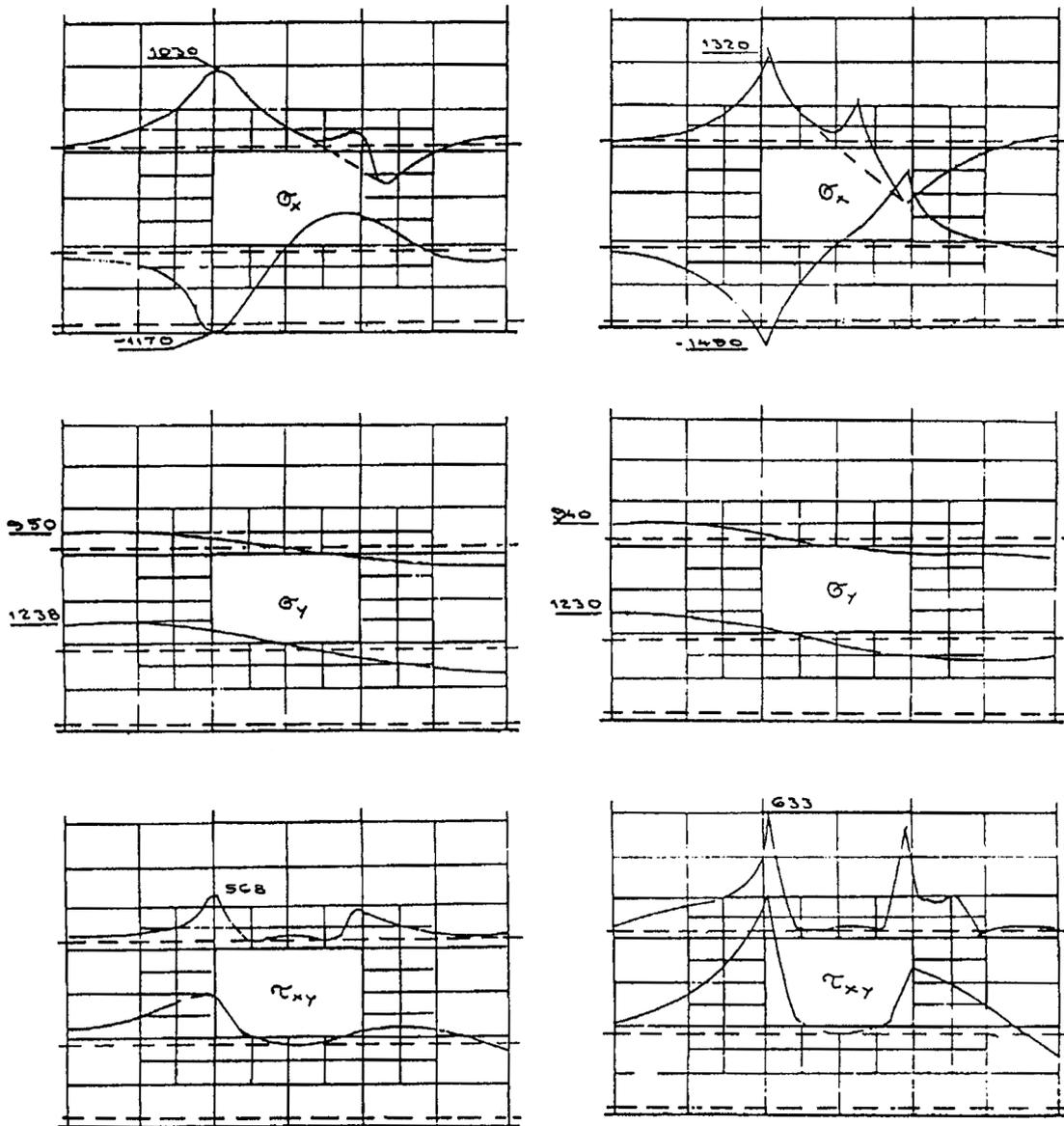


Рис. 8

Порівнюванням результатів досягнутих розв'язанням стінки з отворами методом кінцевих елементів у фізично нелінійній області із звичайними кінцевими елементами і з використанням сингулярних кінцевих елементів можна виявити, що отримані концентрації напружень у безпосередній близькості отворів стінки в деяких випадках відрізняються на 30%. Тим самим можна вважати доведеним, що вплив базисних функцій сингулярних кінцевих елементів в окремих випадках значно змінюють результати розв'язань стінки методом кінцевих елементів.

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. – М.: Мир. 1984 – 428 с. 2. Норри Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир. 1981. – 304 с. 3. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир. 1980. – 304 с.