

УДК 518.61

О.М. Нечай

Національний університет “Львівська політехніка”
кафедра ПМ

**РОЗРАХУНОК ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ РОТОРА
ПРИ ЗАПУСКУ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА
ЧИСЛОВИМ МЕТОДОМ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ НАБЛИЖЕНЬ**

© Нечай О.М., 2002

Розв'язання задачі аналізу електромеханічних коливних процесів багатомасових систем можна одержати лише на основі сумісного інтегрування рівнянь електромагнітного й механічного станів системи. Розрахунок перехідних процесів електромеханічних систем, у яких існує зв'язок електромагнітних і механічних процесів, необхідно здійснювати з урахуванням пружності механічних ланок. У протилежному випадку похибка результатів розрахунку набуває не тільки якісного, а й кількісного характеру. Перш за все це стосується слабкодемпфованих механічних підсистем, яким притаманні реальні умови виникнення електромеханічного резонансу.

Запропонований новий числовий метод розрахунку таких процесів – метод дробово-раціональних наближень, який дозволяє розв'язувати системи диференціальних нелінійних рівнянь великої жорсткості, що характерні для цього процесу, і які були непосильні для розв'язання іншими існуючими методами.

The solution of the problem on the analysis of the electromechanical fluctuation processes of the multimass system could be got only on the base of common integration equalities of electromagnetic and mechanical states of system. The calculation of the surpassing processes of the electromechanical systems, in which exists the connection between the electromagnetic and mechanical processes, is necessary to make taking into account the spring power of the mechanical chains. If it is on the contrary the declination of the results in the calalation get not only the quality but the quantity character. First of all concern weekly damped mechanical subsystems which are characterized by the real condition for appearance of the electromechanical resonance.

Proposes new digital method calculation of such processes – the fraction-rational method of approaches, which allows to solve the systems of differential non-linear equalities of great stiff, which characterizes this process and which were impossible to do solved by the other existing methods.

В роботі розглядається математична модель асинхронного двигуна з врахуванням поперечних коливань ротора. Така модель була побудована в роботі [1], але у зв'язку з великою жорсткістю отриманої системи рівнянь їх розв'язували неявними методами. Оскільки на сучасному етапі розроблено новий математичний апарат для розв'язування системи жорстких диференціальних рівнянь [2], то в даній роботі побудовано математичну модель асинхронного двигуна з врахуванням поперечних коливань ротора із використанням явних числових методів для розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь.

Ротор розглядається як абсолютно тверде тіло з масою m і моментом інерції щодо центра маси J . Дисбаланс конструкції ротора враховується зміщенням центра маси c_m відносно його осі обертання c_R на ε (рис. 1). У нерухомих декартових координатах x і y , які збігаються з геометричним центром розточки статора O , координати центра обертання ротора x_R і y_R , а центра маси ротора – x_m і y_m . Кут повороту центра обертання ротора – γ_R , а кут повороту ротора відносно власного центра обертання – γ .

Взаємозв'язок координат центра обертання і центра маси ротора можна визначити з геометричних побудов (рис. 1).

$$x_R = x_m - \varepsilon \cos \gamma; \quad y_R = y_m - \varepsilon \sin \gamma. \quad (1)$$

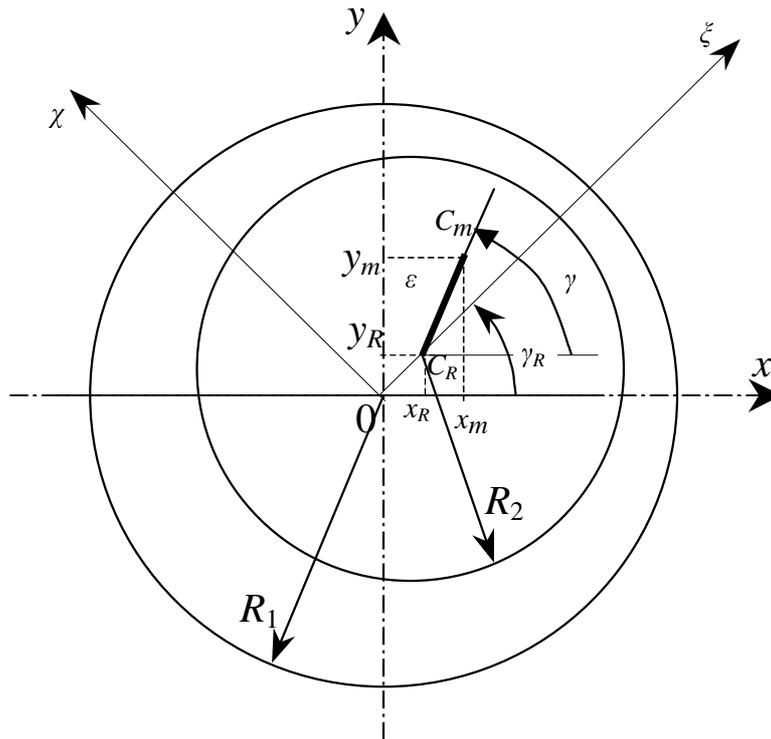


Рис. 1. Розрахункова схема процесу дослідження поперечних коливань ротора

Виберемо рухому систему декартових координат ζ і χ , яка містить спільний центр з нерухомою системою x і y , таким чином, щоб вісь ζ проходила через геометричний центр ротора c_R . Тоді кут повороту цієї системи координат γ_R буде

$$\gamma_R = \operatorname{arctg} \frac{y_R}{x_R}. \quad (2)$$

Кутова швидкість обертання рухомих координат ω_R і кут γ_R пов'язані співвідношенням

$$\dot{\gamma}_R = \omega_R. \quad (3)$$

Підставляючи (1), (2) в (3), після диференціювання по t отримаємо

$$\omega_R = \frac{x_R (v_{y_m} - \omega \varepsilon \cos \gamma) - y_R (v_{x_m} + \omega \varepsilon \sin \gamma)}{x_R^2 + y_R^2}, \quad (4)$$

де v_{x_m}, v_{y_m} – швидкості руху центра маси ротора по осях x і y ; ω – кутова швидкість ротора.

$$\dot{x}_m = v_{xm}; \quad \dot{y}_m = v_{ym}; \quad \dot{\gamma} = \omega. \quad (5)$$

Диференціальне рівняння ідеалізованої машини у рухомих координатах ξ і χ мають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{S\xi} &= u_\xi + p_0 \omega_R \Psi_{S\chi} - r_S i_{S\xi}; & \dot{\Psi}_{R\xi} &= p_0 (\omega_R - \omega) \Psi_{R\chi} - r_R i_{R\xi}; \\ \dot{\Psi}_{S\chi} &= u_\chi + p_0 \omega_R \Psi_{S\xi} - r_S i_{S\chi}; & \dot{\Psi}_{R\chi} &= p_0 (\omega - \omega_R) \Psi_{R\xi} - r_R i_{R\chi}, \end{aligned} \quad (6)$$

де Ψ_{ik} , i_{ik} , ($i = S, R$; $k = \xi, \chi$) – повні потокозчеплення і струми перетворених контурів; u_ξ , u_χ – напруги кола статора; r_S , r_R – активні опори; p_0 – кількість пар магнітних полюсів (індекси S і R вказують на належність до статора чи ротора, а ξ і χ – до перетворених контурів).

Напругу статора знаходимо з виразу

$$u_\xi = U_m \cos(\omega_0 t - p_0 \gamma_R); u_\chi = U_m \sin(\omega_0 t - p_0 \gamma_R), \quad (7)$$

де U_m , ω_0 – амплітуда напруги мережі та її електрична кутова частота.

Знаходимо струми

$$i_{mk} = \alpha_m (\Psi_{mk} - \psi_k), \quad m = S, R; \quad k = \xi, \chi, \quad (8)$$

де α_R, α_S – обернені індуктивності розсіювання обмоток статора і ротора; ψ_ξ і ψ_χ – робочі потокозчеплення :

$$\psi_\xi = a \int_0^{2\pi} B_\eta \cos(p_0 \eta) d\eta; \psi_\chi = a \int_0^{2\pi} B_\eta \sin(p_0 \eta) d\eta. \quad (9)$$

Тут η – кут, який відрахований у рухомій системі координат від осі ξ ; B_η – значення індукції в точці, яка віддалена від осі ξ на $p_0 \eta$ радіан; $a = \frac{2wlR_1}{\pi p_0}$ – сталий коефіцієнт,

причому w , l , R_1 – кількість ефективних витків фази, розрахункова довжина та внутрішній радіус розточка статора.

Магнітну індукцію знаходимо за значенням магнітної напруги зазора φ_η :

$$B_\eta = \frac{\mu_0 \varphi_\eta}{\delta(\eta)}. \quad (10)$$

Тут

$$\varphi_\eta = F_\eta - \varphi_{a\eta}, \quad (11)$$

де F_η – магніторушійна сила; $\varphi_{a\eta}$ – магнітна напруга на ділянках магнітопроводу за межами повітряного зазора, причому

$$F_\eta = \frac{3w}{\pi p_0} [(i_{S\xi} + i_{R\xi}) \cos p_0 \eta + (i_{S\chi} + i_{R\chi}) \sin p_0 \eta]; \quad (12)$$

$$\varphi_{a\eta} = \frac{R_m}{w} (\psi_\xi \cos p_0 \eta + \psi_\chi \sin p_0 \eta) \quad (13)$$

де R_m – магнітний опір двигуна без врахування опору зазора; $\delta(\eta)$ – повітряний зазор у точці η .

Враховуючи геометричні побудови рис. 5.2 і теореми косинусів, отримуємо вираз, який є функціональною залежністю зазора δ від кута η :

$$\delta(\eta) = \sqrt{x_R^2 + y_R^2 + R_1^2 - 2R_1 \sqrt{x_R^2 + y_R^2} \cos \eta} - R_2. \quad (14)$$

Вирази (8) – (14) дають змогу обчислити робочі потокозчеплення ψ_ξ і ψ_χ . Розв'язуючи цю систему відносно невідомих, одержимо

$$\begin{array}{c} \psi_\xi \\ \psi_\chi \end{array} = \frac{1}{\Delta} \begin{array}{cc} 1+TN & -TS \\ -TS & 1+TM \end{array} \cdot \begin{array}{c} DM+QS \\ DS+QN \end{array}, \quad (15)$$

де $\Delta = (1+TM)(1+TN) - T^2 S^2$; $T = \alpha_S + \alpha_R + \frac{\pi p_0}{3w^2} R_m$;

$$D = \alpha_S \Psi_{S\xi} + \alpha_R \Psi_{R\xi}; \quad D = \alpha_S \Psi_{S\chi} + \alpha_R \Psi_{R\chi};$$

$$M = b \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 p_0 \eta}{\delta(\eta)} d\eta; \quad S = b \int_0^{2\pi} \frac{\sin p_0 \eta \cos p_0 \eta}{\delta(\eta)} d\eta; \quad N = b \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 p_0 \eta}{\delta(\eta)} d\eta, \quad (16)$$

причому $b = \frac{3wa\mu_0}{\pi p_0}$ – сталий коефіцієнт.

Електромагнітний момент

$$M_E = \frac{3p_0(\psi_\xi i_{S\chi} + \psi_\chi i_{S\xi})}{2}. \quad (17)$$

Питому силу одностороннього протягування знаходимо за формулою [1]:

$$f_\eta = \frac{B_\eta^2}{2\mu_0}. \quad (18)$$

Результуючі сили у рухомих координатах будуть

$$F_\xi = R_1 l \int_0^{2\pi} f_\eta \cos \eta d\eta; \quad F_\chi = R_1 l \int_0^{2\pi} f_\eta \sin \eta d\eta. \quad (19)$$

Враховуючи (10), (18), інтеграли (19) будуть мати такий вигляд

$$F_\xi = c_0 \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_\eta^2}{\delta^2(\eta)} \cos \eta d\eta; \quad F_\chi = c_0 \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_\eta^2}{\delta^2(\eta)} \sin \eta d\eta, \quad (20)$$

де $c_0 = \frac{R_1 l \mu_0}{2}$ – сталий коефіцієнт.

Маючи струми і робочі потокозчеплення, значення φ_η можна знайти за формулами (11) – (13). Сили одностороннього магнітного притягування у нерухомих осях знаходимо в результаті перетворення координат

$$F_x = F_\xi \cos \gamma_R - F_\chi \sin \gamma_R; \quad F_y = F_\xi \sin \gamma_R + F_\chi \cos \gamma_R. \quad (21)$$

Результуючі сили у напрямі осей x і y з врахуванням пружно-дисипативних властивостей конструкції та ваги ротора з врахуванням (1), (5) будуть

$$\begin{array}{l} \Phi_x = F_x - c_x x_R - v_x (v_{xm} + \varepsilon \omega \sin \gamma); \\ \Phi_y = F_y - gm - c_y y_R - v_y (v_{ym} - \varepsilon \omega \cos \gamma), \end{array} \quad (22)$$

де g – прискорення вільного падіння тіла; v_x , v_y – коефіцієнти опору, c_x , c_y – жорсткості опор ротора.

Швидкості руху ротора отримаємо із загального рівняння динаміки:

$$\dot{v}_{xm} = \frac{\Phi_x}{m}; \quad \dot{v}_{ym} = \frac{\Phi_y}{m}; \quad (23)$$

$$\dot{\omega} = \frac{[M_E - M_M + \Phi_x \varepsilon \sin \gamma - (\Phi_y + mg) \varepsilon \cos \gamma]}{J}, \quad (24)$$

де M_M – момент опору, а координати – згідно з (5).

Спільному інтегруванню підлягає система рівнянь (3), (5), (6), (24). В результаті чого знаходимо повні поточкозчеплення перетворених контурів $\Psi_{S\xi}$, $\Psi_{S\chi}$, $\Psi_{R\xi}$, $\Psi_{R\chi}$, координати центра маси ротора x_m , y_m , кути повороту рухомої системи координат γ_R і ротора γ , лінійні швидкості руху центра маси ротора v_{xm} , v_{ym} і кутову швидкість ротора ω . Через високочастотні коливання механічної системи рівняння є досить жорсткими і для проведення їх інтегрування надають перевагу неявним числовим методам.

Відомо, що явні лінійні числові методи, незважаючи на їх просту структуру, непридатні для розв'язання жорстких систем з огляду на їх обмежену область стійкості. Для дослідження жорстких систем в основному використовуються лінійні неявні числові методи. Найширшого застосування отримали неявні багатокрокові методи Гіра. Однак реалізація цих методів для розв'язання нелінійних систем ДР вимагає на кожному кроці інтегрування розв'язку нелінійних алгебраїчних систем, що породжує певні відомі обчислювальні проблеми. Крім цього, для методів Гіра існує так званий бар'єр Далавіста, тобто не існує А – стійкого числового методу Гіра вище другого порядку точності. Вказані недоліки цих методів підтверджують актуальність побудови нових ефективніших методів розв'язання штивних систем диференціальних рівнянь, зокрема, дробово-раціональних багатокрокових методів.

Розглянемо структуру дробово-раціональних наближень [2] розв'язку задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0, \quad y \in R^N, \quad f: R^{N+1} \rightarrow R^N, \quad x \in R. \quad (25)$$

Ці наближення представляють усереднення з ваговими коефіцієнтами ω , послідовності тейлорівських наближень розв'язку. Тобто $y_{n+1}^{[p]}$ – наближення розв'язку p -го порядку точності в сітковому вузлі $x_{n+1} = x_n + h$ визначаються співвідношенням

$$y_{n+1}^{[p]} = \sum_{k=0}^p \omega_k T_{p-k, n}, \quad (26)$$

де $T_{j, n}$ – тейлорівське наближення j -го порядку відносно сіткового вузла n , а ω_n – k -т ваговий коефіцієнт усереднення (26)

$$\omega_k = \frac{(-1)^k C_p^k a_p^k h^k J_n^k}{(E - a_p h^k J_n)^p}, \quad (27)$$

де E – одинична матриця відповідної розмірності, C_p^k – кількість комбінацій з p елементів по k , J_n – значення матриці Якобі системи (25) у вузлі x_n , a_p – параметр забезпечення відповідної стійкості наближення (26), h – віддаль між сітковими вузлами на даному етапі інтегрування.

Підставивши (27) у співвідношення (26) та ввівши співвідношення $F_{k,n} = T_{k,n} - y_n$, після відповідних перетворень, формула наближення розв'язку задачі (25) набере вигляд

$$y_{n+1}^{[p]} = y_n + \frac{\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_p^k a_p^k h^k J_n^k F_{p-k,n}}{(E - a_p h^k J_n)^p}. \quad (28)$$

Для спрощення виразу (28), його дробову частину розкладено на суму елементарних дробів за степенями знаменника. В результаті тих перетворень одержимо

$$y_{n+1}^{[p]} = y_n + \sum_{i=1}^p \frac{C_p^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_i^j a_p^j F_{i-j,n}}{(E - a_p h^k J_n)^i}. \quad (29)$$

Співвідношення (29) визначає наближення довільного конкретного p -порядку розв'язку задачі (25). Використовуючи (29), можна побудувати наближення довільного конкретного порядку p . Наведемо приклади наближень 1 – 4-го порядків узгодженості.

$$y_{n+1}^{[1]} = y_n + \frac{F_{1,n}}{E - a_1 h J_n}, \quad (30)$$

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n + \frac{2F_{1,n}}{E - a_2 h J_n} + \frac{F_{2,n} - 2F_{1,n}}{(E - a_2 h J_n)^2}, \quad (31)$$

$$y_{n+1}^{[3]} = y_n + \frac{3F_{1,n}}{E - a_3 h J_n} + \frac{3(F_{2,n} - 2F_{1,n})}{(E - a_2 h J_n)^2} + \frac{F_{3,n} - 3F_{2,n} + 2F_{1,n}}{(E - a_3 h J_n)^3}, \quad (32)$$

$$y_{n+1}^{[4]} = y_n + \frac{4F_{1,n}}{E - a_4 h J_n} + \frac{6(F_{2,n} - 2F_{1,n})}{(E - a_4 h J_n)^2} + \frac{4(F_{3,n} - 3F_{2,n} + 3F_{1,n})}{(E - a_4 h J_n)^3} + \frac{F_{4,n} - 4F_{3,n} + 6F_{2,n} - 4F_{1,n}}{(E - a_4 h J_n)^4}. \quad (33)$$

Для реалізації обчислень вказаних наближень доцільно організувати рекурентні процедури. Ввівши позначення для матриці $Q_{p,n}$

$$Q_{p,n} = E - a_p h J_p, \quad (34)$$

формули (30) – (33) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{[1]} &= y_n + Q_{1,n}^{-1} F_{1,n}, \\ y_{n+1}^{[2]} &= y_n + Q_{2,n}^{-1} \left(2F_{1,n} + Q_{2,n}^{-1} (F_{2,n} - 2F_{1,n}) \right), \\ y_{n+1}^{[3]} &= y_n + Q_{3,n}^{-1} \left(3F_{1,n} + Q_{3,n}^{-1} (3(F_{2,n} - 2F_{1,n}) + Q_{3,n}^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times (F_{3,n} - 3F_{2,n} + 3F_{1,n})) \right), \end{aligned} \quad (35)$$

$$y_{n+1}^{[4]} = y_n + Q_{4,n}^{-1} (4F_{1,n} + Q_{4,n}^{-1} (6(F_{2,n} - 2F_{1,n}) + Q_{4,n}^{-1} \times \\ \times (4(F_{3,n} - 3F_{2,n} + 3F_{1,n}) + Q_{4,n}^{-1} (F_{4,n} - 4F_{3,n} + 6F_{2,n} - 4F_{1,n}))).$$

Розглянуті вище формули наближень використано для побудови дробово-раціональних числових методів відповідного типу, який залежить від вибору способу визначення приростів $F_{k,n}$ тейлорівських часткових сум $T_{k,n}$. При використанні при цьому коефіцієнтів типу Рунге-Кутта, одержимо однокрокові числові методи. Проілюструємо цей підхід на одному класі класичних методів Рунге-Кутта.

$$F_{1,n} = k_1, F_{2,n} = k_2, F_{3,n} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), F_{4,n} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_4 + k_5) \\ k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2), \\ k_4 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_5 = hf(x_n + h, y_n + k_4). \quad (36)$$

Тип стійкості одержаних числових методів визначається вибором параметрів a_p .

Для дослідження динамічного процесу, описаного системою рівнянь (3), (5), (6), (24), розроблено програму забезпечення реалізації описаних однокрокових дробово-раціональних числових методів з використанням алгоритму автоматичного вибору порядку методу і величини кроку інтегрування системи рівнянь.

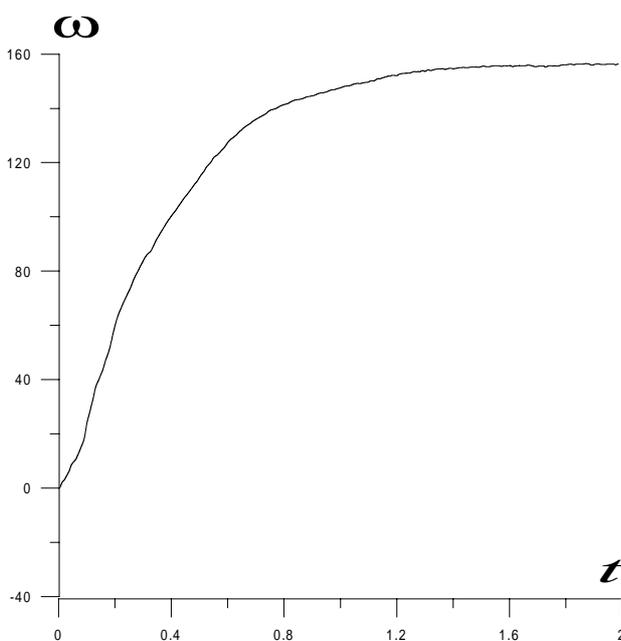


Рис. 2. Кутова швидкість обертання ротора

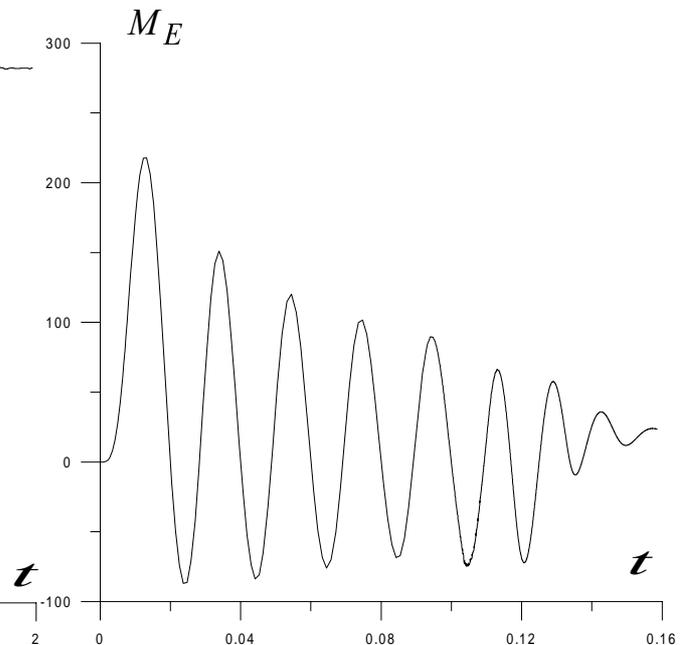


Рис. 3. Електромагнітний момент

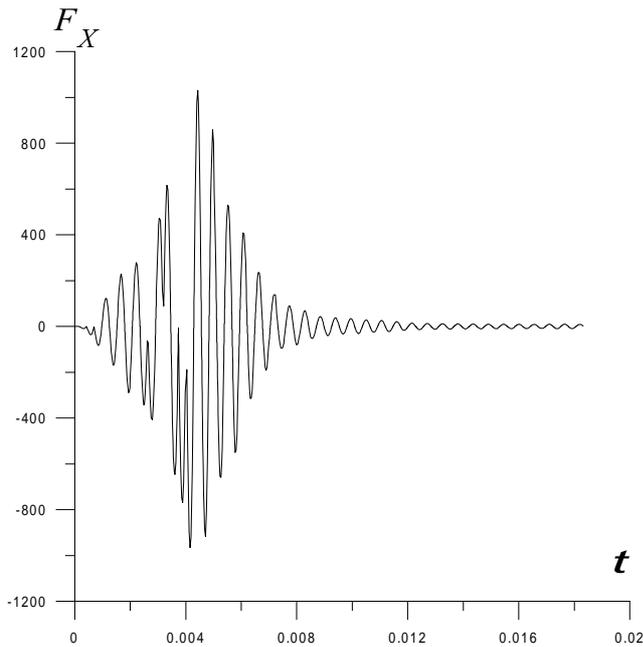


Рис. 4. Залежність сили одностороннього магнітного притягування $F_X(t)$

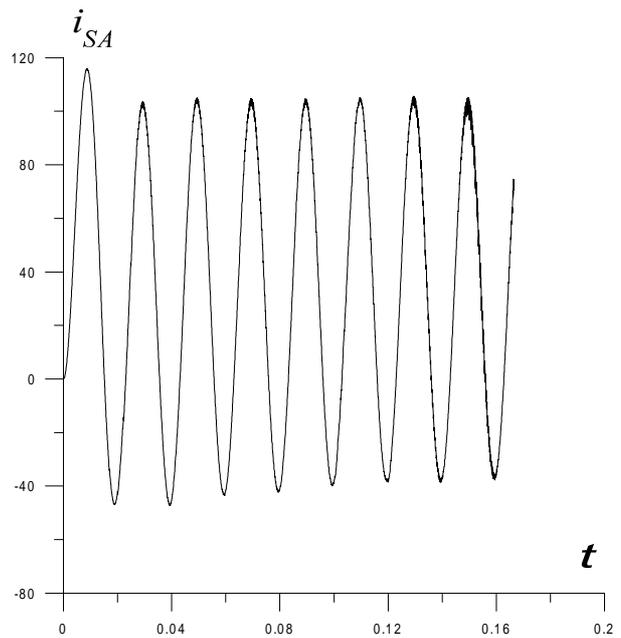


Рис. 5. Струм обмотки статора i_{SA}

Під час розгону асинхронних двигунів виникають моменти, в яких геометричний центр ротора знаходиться в точці ексцентрицитету двигуна, а це відповідно приводить до того, що , коли параметри x_R і y_R одночасно прямують до нуля, то, згідно з виразом (4), кутова швидкість дорівнює ∞ . Для уникнення таких ситуацій в точках , де x_R і y_R наближаються до нуля, приймаємо $x_R = \varepsilon$ при $y_R = 0$. Саме це уточнення пом'якшує проблему жорсткості системи рівнянь і дозволяє з необхідною точністю обчислити параметри цього процесу і зокрема таких, як кутова частота (рис. 3) і магнітний момент (рис. 4), сили одностороннього магнітного притягування (рис. 5) та струми обмоток статора (рис. 6).

Результати досліджень свідчать, що розглянутий числовий метод дозволяє з достатньою точністю розрахувати основні параметри процесу поперечних коливань ротора при запуску асинхронного двигуна.

1. Чабан В.И., Харченко Е.В. К расчету виброактивности асинхронных электродвигателей // *Электричество*. – 1984 – № 8. – 52 с. 2. Слоновський Р.В., Яремко Т.М. Чисельні методи розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь. – Львів: ЛПІ, 1990. – 34 с.