УДК 517.9

І.В. Кузьо, Б.І. Сокіл
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра теоретичної механіки

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ У ЗМІННИХ ОДНОВИМІРНИХ СИСТЕМАХ

Розглядається питання аналітичного дослідження коливних процесів сильнонелінійних систем із розподіленими параметрами. В основу досліджень покладено: а) принцип одночастотності коливань; б) ідею використання періодичних Ateb-функцій для описання коливальних процесів систем із степеневою нелінійністю; в) узагальнення на основі вказаних вище функцій, асимптотичних методів нелінійної механіки на нові класи нелінійних систем.

The operation is devoted to problems of analytical research of oscillatory processes of strongly nonlinear systems with distributed parameters.The research is based on: a) the principle of the unique frequency of nonlinear systems; б) application of the periodic Ateb-functions for exposition of oscillatory processes of the systems with degree nonlinear tie; в) application, on the base of use of the mentioned above functions, of asymptotic methods of a nonlinear mechanics to the new classes of nonlinear systems.

Математичною моделлю коливань суцільного середовища із змінними фізико-механічними властивостями є рівняння [1]

$$\rho(t,\vec{r})u_{tt} = div\left(f\left(\vec{r}, gradu\right)\right) - g\left(\vec{r}, u, u_t, \mu t\right), \tag{1}$$

де $\rho(t,\vec{r})$ – розподіл густини по його об`єму ($\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3)$ – радіус-вектор довільної точки середовища), $f(\vec{r},u)$ і $g(\vec{r},u,u_t,\mu t)$ – функції, які характеризують пружні властивості середовища (співвідношення $f(\vec{r}, gradu)$), а також дію на нього сил опору, додаткових пружних, зовнішніх періодичних та іншої природи сил (функція $g(\vec{r},u,u_t,\mu t)$).

Динамічні процеси у середовищах побудовою аналітичних розв’язків відповідних диференціальних рівнянь, достатньо для практичних цілей вивчені для випадків: а) однорідного лінійно-пружного середовища [2] (густина $\rho(t,\vec{r})$ – стала, $f(\vec{r},u)$ і $g(\vec{r},u,u_t,\mu t)$ – лінійні відносно u і її похідних функції); б) однорідного середовища пружні властивості матеріалу якого можна апроксимувати залежностями, які близькі до лінійних [3] (густина середовища $\rho(t,\vec{r})$ – стала, $divgradf(\vec{r},u) = \Delta u + \varepsilon divf_1(gradu)$, ε – малий параметр, Δ – оператор Лапласа відносно лінійних змінних, $f_1(...)$ – відома нелінійна функція, $g(\vec{r},u,u_t,\mu t)$ – лінійна відносно u і її похідних або близька до неї функція із сталими коефіцієнтами); в) близького до лінійно-пружного одновимірного однорідного середовища [1] ($divf(\vec{r}, gradu) = \mathrm{k}(\vec{r},\mathrm{t})\Delta u + \varepsilon divf_1(gradu)$, $g(\vec{r},u,u_t,\mu t) = c(\vec{r},t)u)$, $k(\vec{r},t)$ і $c(\vec{r},t)$ – повільно змінні функції); г) одновимірного однорідного нелінійно пружного середовища [4,5] (густина середовища $\rho(t,\vec{r})$ – стала, $f(\vec{r},t) = cu^{\nu+1}$, c,ν – сталі , а $u = u(x_1,t)$, $g(\vec{r},u,u_t,\mu t) = 0$); д) одновимірного однорідного близького до лінійно-пружного середовища при наявності додаткової нелінійно-пружної сили [6] (густина середовища $\rho(t,\vec{r})$-стала, $u=u(x,t)$, $f(\vec{r},t)=cu^2+\varepsilon f_1(u)$, $g(\vec{r},u,u_t,\mu t)=ku^{\nu+1}, c,k,\nu$ – сталі).

Для більш загального випадку динамічних процесів у одновимірних середовищах: випадок нелінійно-пружного близького до однорідного тіла, математичною моделлю руху може бути рівняння

$$u_{tt}-\alpha^2(\varepsilon t)u_{xx}u_x^{\nu}=\varepsilon f(u_t,u_x,\mu t) \tag{2}$$

У рівнянні (2) права частини є аналітичною 2π – періодичною по μt функцією. Параметр ν визначається згідно із співвідношення $\nu+1=(2m+1)(2n+1)^{-1}$; $m,n=0,1,2,\ldots$; $\alpha(\varepsilon t)$ – повільно змінна функція. Як і в [1], введенням нової змінної $\tau=\varepsilon t$ рівняння (2) можна подати у вигляді

$$u_{tt}-\alpha^2(\tau)u_{xx}u_x^{\nu}=\varepsilon f(u_t,u_x,\mu t) \tag{3}$$

Розглянемо спочатку незбурене рівняння, яке відповідає (3), тобто рівняння при $\varepsilon=0$

$$u_{tt}-\alpha^2(\tau)u_{xx}u_x^{\nu}=0, \tag{4}$$

для дослідження якого можна застосувати методу відокремлення змінних Фур'є. Згідно із останнім функцію $u(t,x)$ будемо шукати у вигляді: $u(t,x)=\overline{T}(t)\overline{X}(x)$. Невідомі функції $\overline{T}(t), \overline{X}(x)$ отримуються як розв'язки звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\overline{X}''_{xx}\left(\overline{X}'_x\right)^{\nu}+\lambda\overline{X}=0,\\ &\ddot{\overline{T}}+\lambda\alpha^2(\tau)\overline{T}^{\nu+1}=0, \end{aligned} \tag{5}$$

в яких $\alpha(\tau)$=const, а параметр λ визначається із крайових умов, які накладені на функцію $u(t,x)$, тобто умов закріплення середовища. Для останнього розглянемо такі способи закріплення: а) обидва кінці середовища нерухомі (закріплені); б) обидва кінці середовища вільні; в) правий кінець закріплений, а лівий – вільний і їм, відповідно, відповідають класичні крайові умови для функції $u(t,x)$ у вигляді

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u(x,t)\big|_{x=l}=0, \tag{6а}$$

$$u_x(x,t)\big|_{x=0}=u_x(x,t)\big|_{x=l}=0, \tag{6б}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u_x(x,t)\big|_{x=l}=0. \tag{6г}$$

Легко переконатись, що розв'язки першого рівняння співвідношень (5), які узгоджуються із крайовими умовами (6а) – (6г) можна записати на основі використання Ateb-функцій [7] у вигляді

$$\overline{X}(x)=X_0 sa\left(1,(\nu+1)^{-1},k\Pi_x l^{-1}x\right), \tag{7а}$$

$$\overline{X}(x)=X_0 ca\left(1,(\nu+1)^{-1},k\Pi_x l^{-1}x\right), \tag{7б}$$

$$\overline{X}(x)=X_0 sa\left(1,(\nu+1)^{-1},(2k+1)\Pi_x(2l)^{-1}x\right), \tag{7в}$$

де X_0 – стала інтегрування, $k=1,2,...$, Π_x – півперіод використаних Ateb-функцій, тобто $\Pi_x=\sqrt{\pi}\,\Gamma\left((\nu+2)(\nu+1)^{-1}\right)\Gamma^{-1}\left(2^{-1}+(\nu+2)(\nu+1)^{-1}\right)$.

Наведеним вище функціям відповідають такі значення параметру λ: $\lambda_k = 2X_0(\nu+2)^{-1}\left(k\Pi_x l^{-1}\right)^{\nu+2}$ – для крайових умов (6а), (6б), і відповідно $\lambda_k = 2X_0(\nu+2)^{-1}\times \left((2k+1)\Pi_x (2l)^{-1}\right)^{\nu+2}$ – для крайових умов (6в). З врахуванням отриманого вище, розв'язок другого рівняння співвідношень (5) також виражається через періодичні Ateb-функції у вигляді

$$T(t) = T_0 ca(\nu+1, 1, \omega(a,\tau)t + \theta), \tag{8}$$

де T_0, θ – сталі інтегрування, $a = X_0 T_0$.

Функція $\omega(a,\tau)$ в (8) набирає вигляду

$$\omega(a,\tau) = \alpha(\tau)\sqrt{a^{\nu}\left(sl^{-1}\Pi_x\right)^{\nu+2}}. \tag{9}$$

В останній формулі параметр s для крайових умов (6а) і (6б) набуває значення k, а для крайових умов (6в) – $2^{-1}(2k+1)$.

Отже, одночастотні форми коливань одновимірного пружного неоднорідного середовища, які відповідають нелінійній математичній моделі (4) і крайовим умовам, що узгоджуються із співвідношеннями (6а) – (6г), можна описати залежностями

$$u(x,t) = aca(\nu+1, 1, \omega(a,\tau)t + \theta)\begin{cases} sa\left(1, (\nu+1)^{-1}, k\Pi_x l^{-1}x\right), \\ ca\left(1, (\nu+1)^{-1}, k\Pi_x l^{-1}x\right), \\ sa\left(1, (\nu+1)^{-1}, (2k+1)\Pi_x (2l)^{-1}x\right), \end{cases} \tag{10}$$

а їх періоди вже для незбуреного випадку залежать як фізико-механічних властивостей та густини матеріалу (параметра $\alpha(\tau)$), так і початкових умов руху (амплітуди коливань). З останнім пов'язані основні труднощі дослідження впливу малих збурень на динамічні процеси розглядуваного типу нелінійних систем, тобто систем, основні явища у яких описуються крайовими задачами для збуреного рівняння (3). Враховуючи загальні методи теорії збурень для нелінійних систем [8,9], у першому наближенні відносно малого параметра ε динамічні процеси у таких системах можна описувати також залежностями (10), тільки для останніх параметри a і θ будуть вже повільно змінними функціями. Для знаходження закону зміни останніх із (3) отримується система звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} X(x)\left\{\dot{a}ca(\nu+1,1,\psi) - 2(\nu+2)^{-1}a\dot{\theta}sa(1,\nu+1,\psi)\right\} = 0, \\ 2X(x)(\nu+2)^{-1}\left\{\dot{a}(\omega + a\omega_a)sa(1,\nu+1,\psi) - a\omega\dot{\theta}ca^{\nu+1}(\nu+1,1,\psi)\right\} = \\ = 2(\nu+2)^{-1}\omega_\tau asa(1,\nu+1,\psi)X(x) + \varepsilon f_1(a,x,\psi,\gamma), \end{gathered} \tag{11}$$

де $\varepsilon f_1(a,x,\psi,\gamma)$ – відома функція, $\gamma = \mu t$, ω_a, ω_τ – частинні похідні функції $\omega(a,\tau)$ за аргументами a і τ, $X(x) = X_0^{-1}\overline{X}(x)$.

Остання система диференціальних рівнянь визначає закони зміни в часі амплітуди і фази одночастотного динамічного процесу у вигляді

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon a}{2\omega}\omega_\tau + \frac{\varepsilon}{4\Pi_T \mathrm{P}\omega}\int_0^{2\Pi_T}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} f_1(a,x,\psi,\gamma)sa(1,\nu+1,\psi)X(x)dxd\gamma d\psi,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\varepsilon(\nu+2)}{8a\Pi_T \mathrm{P}\omega} \int_0^{2\Pi_T} \int_0^{2\pi} \int_0^{l} f_1(a, x, \psi, \gamma) ca(\nu+1,1,\psi) X(x) dx d\gamma d\psi \tag{12}$$

для нерезонасного ($\omega(a,\tau) \neq \Pi_T \pi^{-1}\mu$) випадку і амплітуду та "різницю фаз" ($\varphi = \psi - \Pi_T \pi^{-1}\mu t$)

$$\begin{gathered} \dot{a} = \frac{\varepsilon a}{2\omega}\omega_\tau + \frac{\varepsilon}{2\Pi_T \mathrm{P}\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{l} f_1\left(a, x, \Pi_T \pi^{-1}\gamma + \varphi, \gamma\right) sa(1, \nu+1, \psi) X(x) dx d\gamma , \\ \dot{\varphi} = \omega(a,\tau) - \Pi_T \pi^{-1}\mu + \\ + \frac{\varepsilon(\nu+2)}{2\mathrm{P}a\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{l} f_1\left(a, x, \Pi_T \pi^{-1}\gamma + \varphi, \gamma\right) sa(1, \nu+1, \psi) X(x) dx d\gamma \end{gathered} \tag{13}$$

для резонансного випадку.

Зауважимо, що в останніх формулах Π_T – півперіод по ψ використаних Ateb-функцій, тобто $\Pi_T = \sqrt{\pi}\,\Gamma\left((\nu+2)^{-1}\right)\Gamma^{-1}\left(2^{-1} + (\nu+2)^{-1}\right)$, $\mathrm{P} = \int_0^{l} X^2(x) dx$, а сам метод без особливих труднощів можна узагальнити і на випадок неоднорідних нелінійно-пружних одновимірних систем.

1. Митропольский Ю.А., Лимарченко О.С. К вопросу об асимптотических приближениях для медленных волновых процессов в нелинейных диспергирующих средах // Укр. мат. журн. – 1998. – 59, №3. – С. 357-371. 2. Василенко Н. В. Теория колебаний. – К.: Вища школа, 1992. – 429 с.3.Митропольский Ю.А,.Мосеенков Б.И Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.:Вища школа, 1976.-592с. 4.Сокил Б. И. Об асимптотических разложениях краевой задачи для одного нелинейного уравнения с частными производными // Укр. мат.журн. – 1982. – 34. – №6. – С. 803 – 805. 5.Сокіл Б. І. Про один спосіб побудови одночастотних розв'язків для нелінійного хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 1994. – 46. – №6. – С. 782 – 785. 6.Митропольський Ю.О., Сокіл Б.І. Про застосування Ateb-функцій для побудови асимптотичного розв'язку збуреного нелінійного рівняння Клейна-Гордона //Укр. мат. журн. – 1998. – 50. – №5. – С.665 – 670.. 7.Сеник П. М. Обернення неповної Beta-функції // Укр. мат. журн. – 1969. – 21. – №3. – С. 325 – 333. 8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, – 1972.-276 с. 9. Найфэ А. Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.