

вмикання тиристорного компенсатора. Величина максимального струму збудження $I_{\text{СМАХ}}$ вибирається з умови забезпечення необхідного запасу АГ за напругою.

Висновки

1. Запропонований підхід до визначення ПФ АГ в каналі збудження за струмом збудження дозволяє здійснювати аналіз і синтез САК напруги АГ в середовищі MATLAB Simulink. Відхилення результатів аналізу, отриманих при використанні ПФ, від реальних значень не перевищує 8%.

2. Модель АГ з самозбудженням можна застосовувати під час розробки САК напруги АГ для оцінки ступеня її інваріантності до збурень.

1. Вишневецький Л.В. Передаточные функции асинхронного генератора с конденсаторным возбуждением // Техн. электродинамика. – 1988. – № 2. – С. 75–80. 2. Плахтина О.Г., Куцик А.С., Копчак Б.Л. Математичне моделювання автономного джерела на базі асинхронного генератора з самозбудженням і тиристорного регулятора напруги // Вісн. НУ “Львівська політехніка”. – 2001. – Вип. 418. – С. 140–146. 3. Плахтина Е. Г. Математическое моделирование электромашино – вентиляционных систем. – Львов, 1986. – 164 с. 4. Шехтер Я.П. Использование энергии ветра. – М., 1983. – С. 36–41. 5. Михайлов О.П. Автоматизированный электропривод станков и промышленных роботов. Учеб. для вузов. – М., 1990. – 304 с. 6. Кардашов А.А. Применение z-преобразования для экспоненциальной аппроксимации корреляционных и переходных функций // Автоматика и телемеханика. – М., 1968. – № 3. – С. 61–70.

УДК 621.313

Р. Фільц

Технічно-рільнична академія в Бидгощі
Інститут електротехніки, кафедра основ електротехніки (Польща)

МОДЕЛЬ УЗАГАЛЬНЕНОЇ НЕЯВНОПОЛЮСНОЇ МАШИНИ ЯК ЕЛЕМЕНТ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

© Фільц Р.В., 2002

Запропонована модель узагальненої неявнополісної електричної машини як елемент моделі електромеханічної системи. Модель ґрунтується на описі машини за допомогою інтегральних рівнянь і диференціальних параметрів. Застосування моделі проілюстровано на прикладі електромеханічної системи, що складається з неявнополісних машин.

Mathematical model of generalized non-salient-pole saturated electrical machine as an electromechanical multipole has been elaborated. The model is based on mathematical description with integral equations. It is applicable for stiff equation systems and ensures high numerical stability. The application of the model has been illustrated on modelling of an electromechanical system.

Вступ

Під електромеханічною системою (ЕМС) розумітимемо систему, елементами якої є електромеханічні, електромагнітні й напівпровідникові перетворювачі (електричні машини,

тягові електромагнітні апарати, трансформатори, дроселі, перетворювачі частоти, випростувачі тощо), а також пристрої керування (які можуть містити напівпровідникові елементи) й інші перетворювачі енергії (вітродвигуни, водяні й парові турбіни тощо).

Задача математичного моделювання перехідних процесів в ЕМС традиційно розв'язується в такій послідовності:

- для даної схеми ЕМС складають систему диференційних рівнянь, що описує всі перехідні процеси в ЕМС, і початкові умови, що виділяють шуканий перехідний процес у цій ЕМС;
- отриману систему рівнянь розв'язують числово.

При цьому, незважаючи на багаторічний досвід розв'язування задач цього типу, вибір основних напрямів опрацювання алгоритму – вибір між явними і неявними методами числового інтегрування, між статичними і диференційними параметрами, між застосуванням прямих методів і діакоптики – практично залишаються на розсуд користувача, що, за відсутності достатнього власного досвіду, не сприяє ефективності його праці.

Дослідження в галузі електромеханіки й теорії кіл, проведені автором протягом останніх років, призвели до нового бачення цієї проблеми й до опрацювання на цій підставі загальної стратегії математичного моделювання в електромеханіці, яка зводить до мінімуму багатоваріантність методів математичного розв'язування задачі. Сутність цієї стратегії передбачає:

- застосування до опису процесів в ЕМС рівнянь інтегральних, а не диференційних;
- конструювання математичних моделей елементів ЕМС як моделей багатополюсників (БП): для фізично неподільних електромеханічних елементів ЕМС (електричних машин, тягових електромагнітних апаратів, трансформаторів, дроселів) – на підставі опрацьованої автором у 80-х роках теорії узагальненого електромеханічного перетворювача енергії [1], а для конструкційно неподільних статичних пристроїв (продукованих на промисловому рівні напівпровідникових перетворювачів частоти, пристроїв керування тощо) – на підставі класичної теорії електричних кіл;
- конструювання математичної моделі ЕМС з моделей БП на підставі класичної теорії електричних кіл.

Вичерпний для практичних застосувань виклад опрацьованої стратегії вимагає розгляду не тільки її сутності, але й опису моделей хоча б найважливіших елементів ЕМС – конкретних типів електричних машин (синхронних, асинхронних, постійного струму, з напівпровідниковими комутаторами, спеціальних), статичних електромагнітних перетворювачів (трансформаторів, дроселів) і напівпровідникових пристроїв (випростувачів, напівпровідникових перетворювачів частоти, систем керування). Очевидно, що досягнення цієї мети в межах однієї статті внаслідок обмеження її обсягу не є можливим. У даній статті це питання розглядається стосовно класу електромеханічних перетворювачів енергії, які охоплюються поняттям узагальненої неявнополюсної електричної машини (УНЕМ), під якою розумітимемо машину з неявнополюсною конструкцією шихтованого магнітопроводу з багатофазними (без обмеження на симетричність) обмотками на статорі й на роторі. Моделі для інших типів елементів ЕМС як БП, безпосередньо придатні до застосування в пропонованому методі моделювання ЕМС, зацікавлений читач знайде в статтях [2, 3] і в публікаціях, які готуються до друку.

Чому рівняння інтегральні, а не диференційні?

Згадана у Вступі багатоваріантність методів моделювання перехідних процесів в ЕМС має глибокі математичні корені і шлях їх усунення належить шукати ще на рівні математичного формулювання задачі. Як відомо, цю задачу можна формулювати в одному з трьох варіантів, а саме, з використанням:

- рівнянь диференційних;
- рівнянь диференційних та інтегральних;
- рівнянь інтегральних.

На питання “котрий з цих варіантів найліпший?” здебільшого відповідають: “істотної різниці немає; вибір варіанта є справою смаку”, але при розв’язуванні практичних задач майже завжди перевагу надають першому з них, і це зумовлено, насамперед, тим, що переважна більшість опрацьованих і доведених до комп’ютерних програм алгоритмів стосується рівнянь диференційних. Однак авторові не вдалося на підставі аналізу літератури знайти переконливу відповідь на запитання, чому дослідники, які опрацьовували алгоритми числового інтегрування, приділяли основну увагу саме диференційним рівнянням. Це спонукало автора до проведення самостійних досліджень і ці дослідження призвели до наведених нижче результатів.

Порівняємо формулювання задачі перехідних процесів згідно з першим і третім варіантами на прикладі найпростішого електричного кола, що є послідовним сполученням резистора з опором R , конденсатора з ємністю C і напруги $u(t)$ ідеального джерела.

У першому варіанті маємо алгебраїчне й диференційне рівняння

$$Ri + u_C = u(t); \quad i = C \frac{du_C}{dt}, \quad (1)$$

де i – струм у колі; u_C – напруга на конденсаторі, і початкову умову

$$\text{“якщо } t = 0, \text{ то } u_C(0) = u_{C0}\text{”}, \quad (2)$$

де u_{C0} – початкове значення напруги на конденсаторі. Рівняння (1) разом з початковою умовою (2) визначають тзв. задачу Коші.

Підкреслимо, що *початкова умова не є рівнянням у загальноматематичному розумінні цього поняття і її не можна підставляти до рівнянь задачі; як відомо, її можна тільки враховувати* під час розв’язування задачі. Автор схильний розглядати цю обставину як логічну непослідовність, яка, як і кожна інша логічна непослідовність у математиці, може мати далеко ідучі негативні наслідки.

Ці ж зауваження стосуються й другого варіанта формулювання задачі розрахунку перехідних процесів в ЕМС.

У третьому варіанті маємо систему рівнянь

$$Ri + u_C = u(t); \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_{C0}, \quad (3)$$

Отже, у третьому варіанті поняття початкової умови як окремого (і, до речі, нематематичного) об’єкта виявляється зайвим, і тут самі лише рівняння (3) несуть вичерпну інформацію про шуканий перехідний процес. З цієї ж причини зайвим є також поняття задачі Коші і розрахунок потрібного перехідного процесу зводиться безпосередньо до розв’язування системи рівнянь (3). Легко переконатися, що ці висновки стосуються перехідних процесів у будь-яких фізичних об’єктах. Принципово важливою особливістю

третього варіанта є відсутність логічної непослідовності, відзначеної для перших двох варіантів формулювання задачі розрахунку перехідних процесів в ЕМС.

А тепер порівняємо досягнення в галузі числових методів розв'язування задач у кожному з розглянутих варіантів.

Протягом минулого сторіччя опрацьовано велику кількість числових методів розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь [4]. Ці методи прийнято поділяти на явні й неявні. Спочатку експериментально, а вже пізніше теоретичними дослідженнями було виявлено, що явні методи непридатні у випадках тзв. жорстких систем диференціальних рівнянь. Для неявних методів спочатку експериментально, а згодом теоретично було встановлено, що вони нерівноцінні з погляду числової стійкості, і серед них тільки один метод, а саме метод трапецій є стійким при всіх значеннях параметрів фізично реалізованих об'єктів (тобто об'єктів з фізично реалізованими параметрами). Саме тому метод трапецій набув у практиці найбільшого розповсюдження. Вже тільки на підставі цієї короткої характеристики числових методів розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь користувач, який не володіє жодною апріорною інформацією про задачу Коші, яку потрібно розв'язати, вибере саме метод трапецій.

У випадках, коли задача сформульована для диференціальних та інтегральних рівнянь, її переформулюють до першого варіанта, позбуваючись у рівняннях інтегралів шляхом диференціювання цих рівнянь.

У третьому варіанті наближають інтеграли на кроці h інтегрування алгебраїчними виразами. Якщо прийняти, що підінтегральна функція $y(t)$ є многочленом першого степеня, то отримуємо алгебраїчний вираз

$$\int_{t-h}^t y(t)dt = \frac{y(t-h) + y(t)}{2} h,$$

де $y(t-h)$ – відоме (обчислене на попередньому кроці інтегрування) значення підінтегральної функції в момент часу $t-h$. Цей вираз відображає відому формулу трапецій, а метод числового інтегрування, який ґрунтується на його застосуванні, є методом першого порядку.

Отже, стартуючи від формулювання задачі в третьому варіанті, ми відразу приходимо до того ж самого результату, на отримання якого, стартуючи від формулювання задачі в першому варіанті, потрібне було ціле сторіччя.

Припущення

Приймемо при опрацюванні моделі УНЕМ такі припущення:

- вихрові струми й гістерезис відсутні;
- магнітне поле складається з трьох незалежних з погляду рівнянь магнітостатики частин – основного поля, поля розсіяння статора й поля розсіяння ротора;
- поле розсіяння статора (ротора) залежить лінійно від струмів фаз статора (ротора);
- пази ротора не скошені відносно пазів статора;
- фази статора (ротора) є обмотками з гармонічними розподілами провідників уздовж кола статора (ротора).

Ці припущення дозволяють врахувати насичення магнітопроводів неявнополюсних машин на задовільному для моделювання ЕМС рівні і водночас запевняють швидкодію моделі ЕМС, яка лише на 2–10 відсотків нижча від швидкодії моделі, опрацьованої без урахування насичення.

Магнітна характеристика й параметри магнітопроводу УНЕМ

За прийнятих припущень магнітопровід УНЕМ характеризується полярною симетрією і, як показано в [5], його магнітні властивості однозначно описуються його магнітною характеристикою як векторною функцією векторного аргументу

$$\Phi = \Phi(F), \quad (4)$$

де

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{mX} \\ \Phi_{mY} \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} F_{mX} \\ F_{mY} \end{bmatrix},$$

причому F_{mX}, F_{mY} є проєкціями на осі довільної прямокутної системи координат OXY зображуючого вектора F_m результуючої намагнічувальної сили, а Φ_{mX}, Φ_{mY} є проєкціями на осі цієї ж системи координат зображуючого вектора Φ_m основного магнітного потоку УНЕМ. Математичний зміст векторної функції (4) визначається сукупністю рекурентних формул

$$F_m = \sqrt{F_{mX}^2 + F_{mY}^2}; \quad \Phi_m = \Phi_m(F_m); \quad \Phi_{mX} = \frac{F_{mX}}{F_m} \Phi_m; \quad \Phi_{mY} = \frac{F_{mY}}{F_m} \Phi_m,$$

де F_m – модуль вектора F_m ; Φ_m – модуль вектора Φ_m , а скалярна залежність $\Phi_m = \Phi_m(F_m)$ відображає характеристику одновимірного намагнічування магнітопроводу УНЕМ.

Похідна векторної функції (4) є тензором диференціальних магнітних провідностей магнітопроводу УНЕМ, який згідно з [5] обчислюється за формулою

$$A = \frac{d\Phi(F)}{dF} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{mX}}{\partial F_{mX}} & \frac{\partial \Phi_{mX}}{\partial F_{mY}} \\ \frac{\partial \Phi_{mY}}{\partial F_{mX}} & \frac{\partial \Phi_{mY}}{\partial F_{mY}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\rho \frac{F_{mX}^2}{F_m^2} + A_\tau \frac{F_{mY}^2}{F_m^2} & (A_\rho - A_\tau) \frac{F_{mX} F_{mY}}{F_m^2} \\ (A_\rho - A_\tau) \frac{F_{mY} F_{mX}}{F_m^2} & A_\rho \frac{F_{mY}^2}{F_m^2} + A_\tau \frac{F_{mX}^2}{F_m^2} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де

$$A_\rho = \frac{d\Phi_m(F_m)}{dF_m} = A_\rho(F_m); \quad A_\tau = \frac{\Phi_m(F_m)}{F_m} = A_\tau(F_m) \quad (6)$$

відповідно, радіальна й тангенціальна диференціальні магнітні провідності магнітопроводу УНЕМ.

З формули (5) випливає, що тензор A є симетричним тензором.

Магнітомеханічна характеристика й параметри УНЕМ

Позначатимемо величини, що належать до фаз статора й до фаз ротора відповідно індексами $s1, \dots, sS$ і $r1, \dots, rR$. Утворимо вектор струмів і вектор потокозчеплень фаз УНЕМ, зображувані стовпцевими матрицями

$$i_g = [i_{s1} \ \dots \ i_{sS} \ i_{r1} \ \dots \ i_{rR}]_T; \quad \psi_g = [\psi_{s1} \ \dots \ \psi_{sS} \ \psi_{r1} \ \dots \ \psi_{rR}]_T;$$

стали матрицю індуктивностей розсіяння фаз

$$L_{g\sigma} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} L_{\sigma s1s1} & \dots & L_{\sigma s1sS} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{\sigma sSs1} & \dots & L_{\sigma sSsS} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L_{\sigma r1r1} & \dots & L_{\sigma r1rR} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{\sigma rRr1} & \dots & L_{\sigma rRrR} \end{bmatrix} \right);$$

матрицю кількостей витків фаз

$$w = \text{diag} (w_{s1}, \dots, w_{sS}, w_{r1}, \dots, w_{rR})$$

і матриці

$$Q = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \cos\beta_{s1} & \sin\beta_{s1} \\ \vdots & \vdots \\ \cos\beta_{sS} & \sin\beta_{sS} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\beta_{r1} & \sin\beta_{r1} \\ \vdots & \vdots \\ \cos\beta_{rR} & \sin\beta_{rR} \end{bmatrix} \right); \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos(p\gamma) & \sin(p\gamma) \\ -\sin(p\gamma) & \cos(p\gamma) \end{bmatrix} = \Gamma(\gamma),$$

де $\beta_{s1}, \dots, \beta_{sS}$ – кути нахилу (в електричних радіанах) осей фаз статора до довільно вибраного на статорі променя OS; $\beta_{r1}, \dots, \beta_{rR}$ – кути нахилу (в електричних радіанах) осей фаз ротора до довільно вибраного на роторі променя OR; γ – кут повороту ротора (в геометричних радіанах), який вважатимемо таким, що дорівнює кутів нахилу променя OR до променя OS; p – кількість пар полюсів УНЕМ.

З фізичних міркувань є очевидним, що кожній сукупності значень вектора i_g й кута γ відповідає єдине магнітне поле УНЕМ і, як наслідок, єдина сукупність значень вектора ψ_g й електромагнітного моменту M , отже, існує сукупність залежностей

$$\psi_g = \psi_g(i_g, \gamma); \quad M = M(i_g, \gamma),$$

або ж, одна векторна функція векторного аргументу $\Xi = \Xi(\Theta)$, де $\Xi = [\psi_g \ M]_{\Gamma}$; $\Theta = [i_g \ \gamma]_{\Gamma}$, яка відображає магнітомеханічну характеристику УНЕМ. Згідно з [6], математичний зміст векторної функції $\Xi = \Xi(\Theta)$ визначається сукупністю рекурентних формул

$$F = \frac{2}{\pi p} \Gamma^T Q^T w i_g; \quad \Phi = \Phi(F);$$

$$\psi_g = L_{g\sigma} i_g + w Q \Gamma \Phi; \quad M = i_g^T w Q \Gamma^{(\gamma)} \Phi = \Phi^T (\Gamma^T)^{(\gamma)} Q^T w i_g,$$

де

$$\Gamma^{(\gamma)} = \frac{d\Gamma(\gamma)}{d\gamma} = p \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sin(p\gamma) & \cos(p\gamma) \\ -\cos(p\gamma) & -\sin(p\gamma) \end{bmatrix} = \Gamma^{(\gamma)}(\gamma).$$

Похідна векторної функції $\Xi = \Xi(\Theta)$ є тензором диференціальних магнітомеханічних параметрів УНЕМ

$$\Pi = \frac{d\Xi}{d\Theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_g}{\partial i_g} & \frac{\partial \psi_g}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial M}{\partial i_g} & \frac{\partial M}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{ii} & \Pi_{i\gamma} \\ \Pi_{\gamma i} & \Pi_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} L_{g\sigma} + \frac{2}{\pi p} w Q \Gamma \Lambda \Gamma^T Q^T w & w Q \Gamma^{(\gamma)} \Phi + \frac{2}{\pi p} w Q \Gamma \Lambda (\Gamma^T)^{(\gamma)} Q^T w i_g \\ \Phi^T (\Gamma^T)^{(\gamma)} Q^T w + \frac{2}{\pi p} i_g^T w Q \Gamma^{(\gamma)} \Lambda \Gamma^T Q^T w & i_g^T w Q \Gamma^{(\gamma\gamma)} \Phi + \frac{2}{\pi p} i_g^T w Q \Gamma^{(\gamma)} \Lambda (\Gamma^T)^{(\gamma)} Q^T w i_g \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де

$$\Gamma^{(\gamma)}(\gamma) = \frac{d\Gamma^{(\gamma)}(\gamma)}{d\gamma} = -p^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos(p\gamma) & \sin(p\gamma) \\ -\sin(p\gamma) & \cos(p\gamma) \end{bmatrix}.$$

З (7) випливає, що тензор Π є симетричним тензором.

Математичне формулювання задачі розрахунку перехідних процесів в електромеханічній системі

Нехай ЕМС складається з K елементів, які є неявнополіусними електричними машинами (НЕМ). Розглядатимемо k -ту НЕМ (яку вважатимемо k -м елементом ЕМС) як БП, що має на статорі S_k фаз і на роторі R_k фаз, і ці фази сполучені між собою за заданою схемою. Точки вмикання k -ї НЕМ до ЕМС називатимемо полюсами цієї НЕМ, а всі інші точки сполучення її фаз – вузлами k -ї НЕМ. Нехай k -та НЕМ має P_k полюсів і W_k вузлів. Утворимо для неї вектор струмів фаз, вектор потокозчеплень фаз, вектор індукованих у фазах напруг, вектор потенціалів полюсів і вектор потенціалів вузлів, зображувані стовпцевими матрицями

$$i_g = [i_{s1} \ \dots \ i_{sS} \ i_{r1} \ \dots \ i_{rR}]_T; \quad \psi_g = [\psi_{s1} \ \dots \ \psi_{sS} \ \psi_{r1} \ \dots \ \psi_{rR}]_T;$$

$$u_{kgL} = [u_{kLs1} \ \dots \ u_{kLsS} \ u_{kLr1} \ \dots \ u_{kLrR}]_T; \quad \varphi_k = [\varphi_{k1} \ \dots \ \varphi_{kP_k}]_T; \quad \varphi_{ki} = [\varphi_{ki1} \ \dots \ \varphi_{kiW_k}]_T.$$

Вважатимемо, що струми, які протікають через полюси, є додатними, якщо вони спрямовані назовні від багатополіусника.

За першим законом Кірхгофа маємо для k -ї НЕМ алгебраїчні рівняння

$$i_k = -A_{ke} i_{kg}; \quad (8)$$

$$A_{ki} i_{kg} = 0, \quad (9)$$

де

$$A_{ke} = \begin{bmatrix} A_{ke1,s1} & \dots & A_{ke1,sS} & A_{ke1,r1} & \dots & A_{ke1,rR} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{keP_k,s1} & \dots & A_{keP_k,sS} & A_{keP_k,r1} & \dots & A_{keP_k,rR} \end{bmatrix};$$

$$A_{ki} = \begin{bmatrix} A_{ki1,s1} & \dots & A_{ki1,sS} & A_{ki1,r1} & \dots & A_{ki1,rR} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{kiW_k,s1} & \dots & A_{kiW_k,sS} & A_{kiW_k,r1} & \dots & A_{kiW_k,rR} \end{bmatrix}$$

– перша матриця інциденцій для полюсів і вузлів відповідно.

Наприклад, для НЕМ, граф електричного кола якої зображений на рис. 1, вектори φ_k , i_k , φ_{ki} мають вигляд

$$\varphi_k = [\varphi_{k1} \ \dots \ \varphi_{k7}]_T; \quad i_k = [i_{k1} \ \dots \ i_{k7}]_T; \quad \varphi_{ki} = [\varphi_{ki1} \ \varphi_{ki2} \ \varphi_{ki3}]_T.$$

а матриці A_{ke} , A_{ki} дорівнюють відповідно

$$A_{ke} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_{ki} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

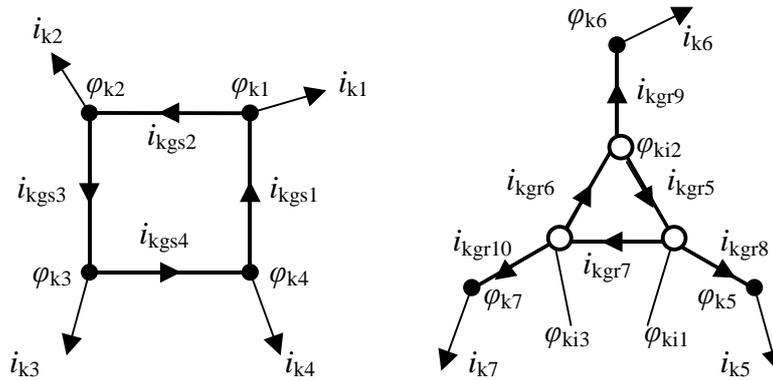


Рис. 1. Граф електричного кола k -ї НЕМ

За другим законом Кірхгофа маємо для фаз k -ї НЕМ алгебраїчне рівняння

$$R_{kg} i_{kg} + u_{kgL} - A_{ke}^T \varphi_k - A_{ki}^T \varphi_{ki} = 0, \quad (10)$$

де $R = \text{diag}(R_{s1}, \dots, R_{sS}, R_{r1}, \dots, R_{rR})$ – матриця опорів фаз k -ї НЕМ.

З закону електромагнітної індукції випливає інтегральне співвідношення

$$\psi_{kg} = \int_{t_{-1}}^t u_{kgL} dt + \psi_{kg,-1}, \quad (11)$$

де $\psi_{kg,-1}$ – значення вектора ψ_{kg} в момент часу t_{-1} .

Магнітомеханічна характеристика k -ї НЕМ описується сукупністю рекурентних формул

$$F_k = \begin{bmatrix} F_{kmX} \\ F_{kmY} \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi p_k} \Gamma_k^T Q_k^T w_k i_{kg}; \quad F_{km} = \sqrt{F_{kmX}^2 + F_{kmY}^2};$$

$$\Phi_{km} = \Phi_{km}(F_{km}); \quad \Phi_{kmX} = \frac{F_{kmX}}{F_{km}} \Phi_{km}; \quad \Phi_{kmY} = \frac{F_{kmY}}{F_{km}} \Phi_{km}; \quad F_k, \quad \Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_{kmX} \\ \Phi_{kmY} \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$\psi_{kg} = L_{kg\sigma} i_{kg} + w_k Q_k \Gamma_k \Phi_k; \quad M_k = i_{kg}^T w_k Q_k \Gamma_k^{(\gamma_k)} \Phi_k = \Phi_k^T (\Gamma_k^T)^{(\gamma_k)} Q_k^T w_k i_{kg},$$

де

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos(p_k \gamma_k) & \sin(p_k \gamma_k) \\ -\sin(p_k \gamma_k) & \cos(p_k \gamma_k) \end{bmatrix} = \Gamma_k(\gamma_k); \quad \Gamma^{(\gamma_k)} = p_k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sin(p_k \gamma_k) & \cos(p_k \gamma_k) \\ -\cos(p_k \gamma_k) & -\sin(p_k \gamma_k) \end{bmatrix} = \Gamma^{(\gamma_k)}(\gamma_k). \quad (13)$$

Система рівнянь (8)–(13) описує перехідний електромеханічний процес у k -й НЕМ за умови, що потенціали її полюсів і кут повороту її ротора є відомими функціями часу. Однак оскільки k -та НЕМ є елементом ЕМС, то вектор φ_k і кут γ_k є невідомими, і для їх визначення необхідно розглядати систему загалом. Щоб розрахувати електромеханічний процес в ЕМС, необхідно доповнити рівняння для всіх НЕМ рівняннями, що описують електричні й механічні зв'язки між елементами системи.

Для спрощення конструювання системи рівнянь, що описують електричні сполучення між елементами системи, зобразимо електричну схему ЕМС у вигляді швейцарського комутатора (рис. 2), тобто у вигляді двох сукупностей шин – горизонтальних, що відповідають вузлам ЕМС, і вертикальних, що відповідають полюсам окремих НЕМ. Вмикання j -го полюса k -ї НЕМ до n -го вузла ЕМС здійснюється в комутаторі болтом, що сполучає вертикальну шину, до якої під'єднаний j -ий полюс k -ї НЕМ, з горизонтальною шиною, що відповідає n -му вузлові ЕМС. Якщо ЕМС містить ідеальні джерела напруги, то їх належить врахувати в схемі ЕМС за допомогою напруг цих джерел, ввімкнених між відповідними вузлами ЕМС. Звідси випливає, що в ЕМС маємо два види вузлів: вузли з невідомими потенціалами $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, які називатимемо первинними вузлами, й вузли, які називатимемо вторинними, тобто такі, потенціали яких $\varphi_{z1}, \dots, \varphi_{zZ}$ визначаються як суми потенціалів первинних вузлів і напруг відповідних ідеальних джерел. Наприклад, в ЕМС, схема якої зображена на рис. 2, маємо 9 первинних вузлів з потенціалами $\varphi_1, \dots, \varphi_9$ і 6 вторинних вузлів з потенціалами

$$\varphi_{z1} = \varphi_3 + u_{z1}; \quad \varphi_{z2} = u_{z2}; \quad \varphi_{z3} = u_{z3}; \quad \varphi_{z4} = \varphi_5 + u_{z4}; \quad \varphi_{z5} = \varphi_5 + u_{z5}; \quad \varphi_{z6} = \varphi_5 + u_{z6}.$$

Утворимо вектор потенціалів первинних вузлів ЕМС, вектор напруг ідеальних джерел, вектор потенціалів вторинних вузлів ЕМС і вектор струмів, які допливають від ідеальних джерел напруги до вторинних вузлів ЕМС, зображувані стовпцевими матрицями

$$\varphi = [\varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_N]_{\Gamma}; \quad u_z(t) = [u_{z1}(t) \quad \dots \quad u_{zZ}(t)]_{\Gamma}; \quad \varphi_z = [\varphi_{z1} \quad \dots \quad \varphi_{zZ}]_{\Gamma}; \quad i_z = [i_{z1} \quad \dots \quad i_{zZ}]_{\Gamma}.$$

За першим законом Кірхгофа маємо для первинних і вторинних вузлів ЕМС алгебраїчні рівняння

$$\sum_{k=1}^K A_k i_k - H i_z = 0; \quad (14)$$

$$i_z = -\sum_{k=1}^K A_{kz} i_k, \quad (15)$$

де

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1,1} & \dots & A_{k1,P_k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{kN,1} & \dots & A_{kN,P_k} \end{bmatrix}; \quad A_{kz} = \begin{bmatrix} A_{kz1,1} & \dots & A_{kz1,P_k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{kzZ,1} & \dots & A_{kzZ,P_k} \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} H_{1,1} & \dots & H_{1,Z} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{N,1} & \dots & H_{N,Z} \end{bmatrix}$$

– відповідно, перша матриця інциденцій для первинних вузлів ЕМС, перша матриця інциденцій для вторинних вузлів ЕМС і матриця, що визначає відпливаючі від первинних вузлів струми через струми в ідеальних джерелах напруги.

Наприклад, для ЕМС, схема якої зображена на рис.2, вектори φ , u_z , i_z , φ_z мають вигляд

$$\varphi = [\varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_9]_{\Gamma}; \quad u_z(t) = [u_{z1}(t) \quad \dots \quad u_{z6}(t)]_{\Gamma}; \quad \varphi_z = [\varphi_{z1} \quad \dots \quad \varphi_{z6}]_{\Gamma}; \quad i_z = [i_{z1} \quad \dots \quad i_{z6}]_{\Gamma},$$

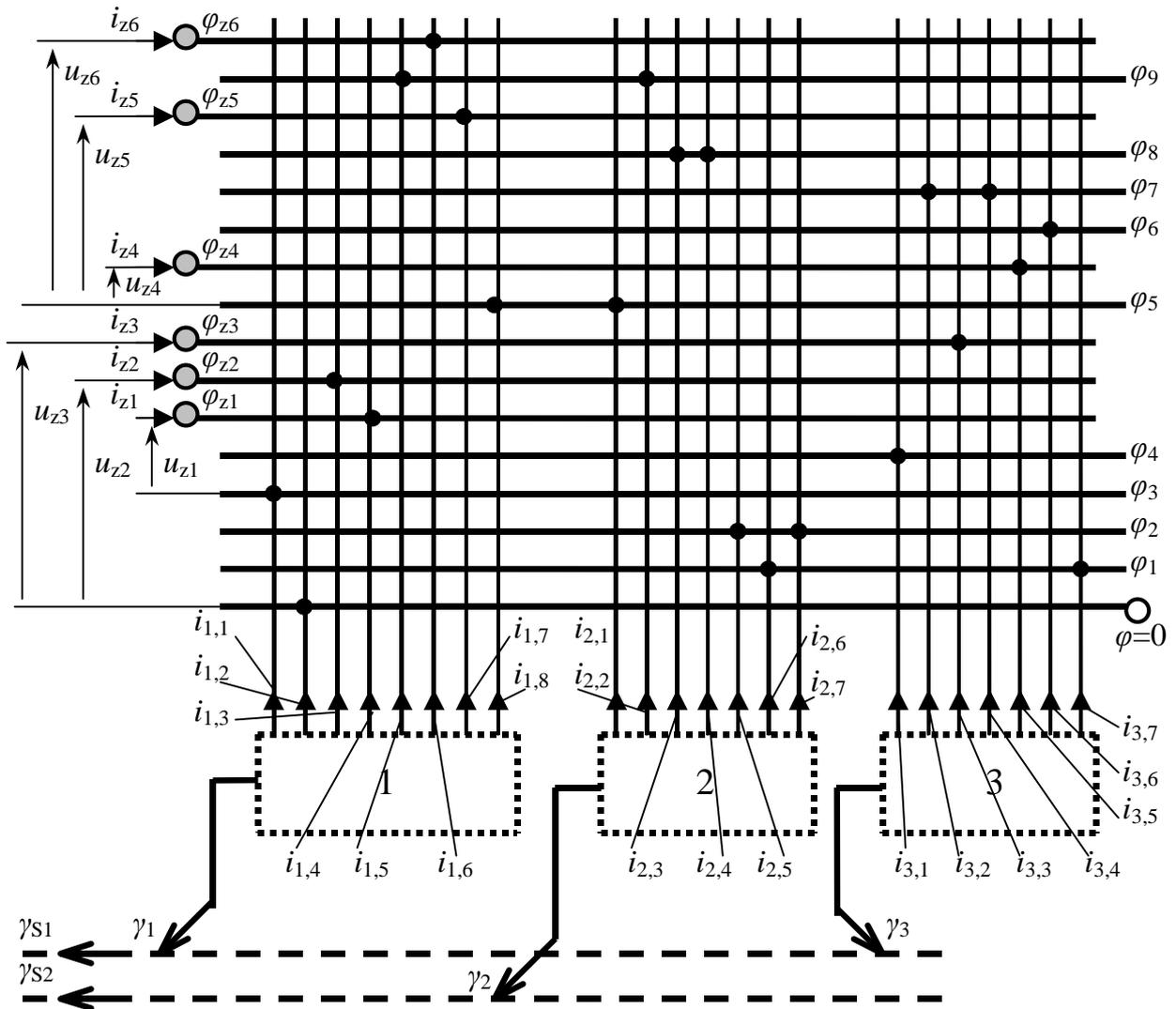


Рис. 2. Схема EMC

а матриці A_k , A_{kz} , H дорівнюють відповідно

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad
 A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad
 A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad
 H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{1z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{2z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{3z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Потенціали вторинних вузлів ЕМС визначаються через потенціали первинних вузлів ЕМС і напруги ідеальних джерел за формулою

$$\varphi_z = H^T \varphi + u_z. \quad (16)$$

Потенціали полюсів k -ї НЕМ визначаються через потенціали первинних і вторинних вузлів ЕМС за формулою

$$\varphi_k = A_k^T \varphi + A_{kz}^T \varphi_z. \quad (17)$$

Нехай вали усіх НЕМ сполучені між собою у V валів ЕМС. Вали ЕМС зображатимемо на схемі ЕМС горизонтальними штриховими лініями (рис. 2). За додатний напрям обертання кожного з валів ЕМС приймемо бачений з боку лівого торця вала напрям обертання, протилежний до напрямку руху стрілок годинника. Напрямок обертання вала k -ї НЕМ, згідний з додатним напрямом обертання вала ЕМС, з яким вал цієї НЕМ сполучений, позначатимемо на схемі ЕМС похиленим відрізком прямої зі стрілкою, горизонтальна складова якої має напрям, згідний з додатними напрямками обертання з валів ЕМС, а напрям обертання вала k -ї НЕМ, протилежний до додатного напрямку обертання вала ЕМС, позначатимемо похиленим відрізком прямої зі стрілкою, горизонтальна складова якої має напрям, протилежний до додатних напрямів обертання валів ЕМС.

Утворимо вектор кутів повороту валів ЕМС, вектор кутових швидкостей обертання валів ЕМС, вектор кутових прискорень валів ЕМС і вектор прикладених до валів ЕМС моментів як відомих функцій часу, зображувані стовпцевими матрицями

$$\gamma_S = [\gamma_{S1} \dots \gamma_{SV}]_T; \quad \omega_S = [\omega_{S1} \dots \omega_{SV}]_T; \quad \varepsilon_S = [\varepsilon_{S1} \dots \varepsilon_{SV}]_T; \quad M_S(t) = [M_{S1}(t) \dots M_{SV}(t)]_T.$$

Введемо для k -ї НЕМ матрицю-стовпець C_k з V елементами, в якій v -й елемент дорівнює $+1$, якщо k -та НЕМ сполучена з v -м валом ЕМС і додатні напрями обертання цих валів збігаються, дорівнює -1 , якщо k -та НЕМ сполучена з v -м валом ЕМС і додатні напрями обертання цих валів є протилежними, і дорівнює 0 , якщо k -та НЕМ не сполучена з v -м валом ЕМС.

Наприклад, для ЕМС, схема якої зображена на рис. 2, вектори γ_S , ω_S , ε_S , $M_S(t)$ мають відповідно вигляд

$$\gamma_S = [\gamma_{S1} \quad \gamma_{S2}]_T; \quad \omega_S = [\omega_{S1} \quad \omega_{S2}]_T; \quad \varepsilon_S = [\varepsilon_{S1} \quad \varepsilon_{S2}]_T; \quad M_S(t) = [M_{S1}(t) \quad M_{S2}(t)]_T,$$

а матриці C_1 , C_2 , C_3 дорівнюють відповідно

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Векторне рівняння механічного стану ЕМС має вигляд

$$\sum_{k=1}^K C_k M_k + \sum_{k=1}^K C_k M_{kd} + M_S(t) = 0, \quad (18)$$

де M_{kd} – динамічний момент k -ї НЕМ. За другим законом Ньютона

$$M_{kd} = -J_k \varepsilon_k, \quad (19)$$

де J_k – момент інерції обертових мас k -ї НЕМ, ε_k – кутове прискорення вала k -ї НЕМ.

З означень кутової швидкості й кутового прискорення випливають інтегральні співвідношення

$$\omega_k = \int_{t_{-1}}^t \varepsilon_k dt + \omega_{k,-1}; \quad \gamma_k = \int_{t_{-1}}^t \omega_k dt + \gamma_{k,-1}, \quad (20)$$

де $\gamma_{k,-1}$, $\omega_{k,-1}$ – значення змінних γ_k , ω_k в момент часу t_{-1} .

Кут повороту k -ї НЕМ визначається через вектор кутів повороту валів ЕМС за формулою

$$\gamma_k = C_k^T \gamma_S + \gamma_{k0}, \quad (21)$$

де γ_{k0} – постійний кут, що визначає положення вала k -ї НЕМ відносно вала ЕМС, з яким він сполучений.

Система рівнянь, яка охоплює рівняння (8)–(13) для кожної з K НЕМ ЕМС, разом з рівняннями (14)–(21), що відображають сполучення цих НЕМ в електромеханічній системі, однозначно описує шуканий перехідний процес в ЕМС. Зауважимо, що ця система рівнянь містить початкові умови (в рівняннях (10), (20)). Розв'язком цієї системи рівнянь є сукупність залежностей змінних i_{kg} , γ_k , F_{kmX} , F_{kmY} , F_{km} , Φ_{km} , Φ_{kmX} ,

$$\Phi_{kmY}, \psi_{kg}, M_k, u_{kgL}, i_k, \varphi_{ki}, \varphi_k, \omega_k, \varepsilon_k, M_{dk} \quad (k = 1, \dots, K); \varphi, \varphi_z, i_z, \gamma_S, \omega_S, \varepsilon_S.$$

Алгоритм розрахунку перехідного процесу ЕМС

Алгебраїзувавши інтеграли в співвідношеннях вигляду (10), (20) за формулою трапецій, отримуємо алгебраїчні рівняння вигляду

$$\psi_{kg} = \frac{h}{2} u_{kgL} + \frac{h}{2} u_{kgL,-1} + \psi_{kg,-1}; \quad \gamma_k = \frac{h}{2} \omega_k + \frac{h}{2} \omega_{k,-1} + \gamma_{k,-1}; \quad \omega_k = \frac{h}{2} \varepsilon_k + \frac{h}{2} \varepsilon_{k,-1} + \omega_{k,-1}. \quad (22)$$

де ψ_{kg} , u_{kgL} , γ_k , ω_k , ε_k – значення відповідних змінних у момент часу t .

З (22) отримуємо формули

$$u_{kgL} = \frac{2}{h} \psi_{kg} - \frac{2}{h} \psi_{kg,-1} - u_{kgL,-1}; \quad (23)$$

$$\omega_k = \frac{2}{h} \gamma_k - \frac{2}{h} \gamma_{k,-1} - \omega_{k,-1}; \quad (24)$$

$$\varepsilon_k = \frac{4}{h^2} \gamma_k - \frac{4}{h^2} \gamma_{k,-1} - \frac{4}{h} \omega_{k,-1} - \varepsilon_{k,-1}. \quad (25)$$

Підставивши (23) до (10), отримуємо рівняння

$$R_{kg} i_{kg} + \frac{2}{h} \psi_{kg} - \frac{2}{h} \psi_{kg,-1} - u_{kgL,-1} - A_{ke}^T \varphi_k - A_{ki}^T \varphi_{ki} = 0. \quad (26)$$

Підставивши (15) до (14), отримуємо рівняння

$$\sum_{k=1}^K A_{kH} i_k = 0, \quad (27)$$

де $A_{kH} = A_k + H A_{kz}$.

Підставивши (16) до (17), отримуємо рівняння

$$\varphi_k = A_{kH}^T \varphi + A_{kz}^T u_z, \quad (28)$$

де $A_{kH}^T = A_k^T + A_{kz}^T H^T$.

Підставивши (19) до (18), отримуємо рівняння

$$\sum_{k=1}^K C_k M_k - \sum_{k=1}^K C_k J_k \varepsilon_k + M_S(t) = 0. \quad (29)$$

Система алгебраїчних рівнянь (8)–(13), (15), (16), (19), (21), (26)–(29) містить невідомі значення змінних стану кожної з K НЕМ і змінні стану φ , φ_z , i_z , γ_S , ω_S , ε_S ЕМС. Вона є нелінійною. Будемо розв'язувати її методом Ньютона.

При опрацюванні алгоритму вважатимемо, що магнітомеханічна характеристика k -ї НЕМ представлена сукупністю явних функцій

$$\psi_{kg} = \psi_{kg}(i_{kg}, \gamma_k); \quad M_k = M_k(i_{kg}, \gamma_k). \quad (30)$$

Рівнянням (8), (9), (21), (25)–(29) відповідають на i -й ітерації методу Ньютона лінеаризовані рівняння

$$\begin{aligned} \Delta i_k^{<i>} &= -A_{ke} \Delta i_{kg}^{<i>}; & A_{ki} \Delta i_{kg}^{<i>} &= -f_{k1}^{<i-1>}; \\ \Delta \gamma_k^{<i>} &= C_k^T \Delta \gamma_S^{<i>}; & \Delta \varepsilon_k^{<i>} &= \frac{4}{h^2} \Delta \gamma_k^{<i>}; \\ R_{kg} \Delta i_{kg}^{<i>} + \frac{2}{h} \Delta \psi_{kg}^{<i>} - A_{ke}^T \Delta \varphi_k^{<i>} - A_{ki}^T \Delta \varphi_{ki}^{<i>} &= -f_{k2}^{<i-1>}; \\ \sum_{k=1}^K A_{kH} \Delta i_k^{<i>} &= -f^{<i-1>}; & \Delta \varphi_k^{<i>} &= A_{kH}^T \Delta \varphi^{<i>}; \\ \sum_{k=1}^K C_k \Delta M_k^{<i>} - \sum_{k=1}^K C_k J_k \Delta \varepsilon_k^{<i>} &= -f_M^{<i-1>}; \\ \Delta \psi_{kg}^{<i>} &= \Pi_{kii}^{<i-1>} \Delta i_{kg}^{<i>} + \Pi_{ki\gamma}^{<i-1>} \Delta \gamma_k^{<i>}; \\ \Delta M_k^{<i>} &= \Pi_{k\gamma i}^{<i-1>} \Delta i_{kg}^{<i>} + \Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>} \Delta \gamma_k^{<i>}, \end{aligned} \quad (31)$$

де $\Delta i_k^{<i>}$, $\Delta i_{kg}^{<i>}$, $\Delta \gamma_k^{<i>}$, $\Delta \varepsilon_k^{<i>}$, $\Delta \psi_{kg}^{<i>}$, $\Delta \varphi_k^{<i>}$, $\Delta \varphi_{ki}^{<i>}$, $\Delta \varphi^{<i>}$, $\Delta M_k^{<i>}$, $\Delta \gamma_S^{<i>}$ – поправки невідомих i_k , i_{kg} , γ_k , ε_k , ψ_{kg} , φ_k , φ_{ki} , φ , M_k , γ_S на i -й ітерації;

$$\begin{aligned} f_{k1}^{<i-1>} &= A_{ki}^{<i-1>} i_{kg}^{<i-1>}; & f_{k2}^{<i-1>} &= R_{kg} i_{kg}^{<i-1>} + \frac{2}{h} \psi_{kg}^{<i-1>} - \frac{2}{h} \psi_{kg,-1} - u_{kL,-1} - A_{ke}^T \varphi_k^{<i-1>} - A_{ki}^T \varphi_{ki}^{<i-1>}; \\ f^{<i-1>} &= \sum_{k=1}^K A_{kH} i_k^{<i-1>}; & f_M^{<i-1>} &= \sum_{k=1}^K C_k M_k^{<i-1>} - \sum_{k=1}^K C_k J_k \varepsilon_k^{<i-1>} + M_S(t) \end{aligned} \quad (32)$$

– нев'язки рівнянь (9), (26), (27), (29) обчислені за $(i-1)$ -им наближенням невідомих;

$$\begin{aligned} \Pi_{kii}^{<i-1>} &= L_{kg\sigma} + \frac{2}{\pi p_k} w_k Q_k \Gamma_k(\gamma_k^{<i-1>}) A_k^{<i-1>} \Gamma_k^T(\gamma_k^{<i-1>}) Q_k^T w_k; \\ \Pi_{ki\gamma}^{<i-1>} &= w_k Q_k \Gamma_k(\gamma_k^{<i-1>}) \Phi_k^{<i-1>} + \frac{2}{\pi p_k} w_k Q_k \Gamma_k(\gamma_k^{<i-1>}) A_k^{<i-1>} (\Gamma_k^T)^{(\gamma_k)}(\gamma_k^{<i-1>}) Q_k^T w_k i_{kg}^{<i-1>}; \\ \Pi_{k\gamma i}^{<i-1>} &= \Phi^{T<i-1>} (\Gamma_k^T)^{(\gamma_k)}(\gamma_k^{<i-1>}) Q_k^T w_k + \frac{2}{\pi p_k} i_{kg}^{T<i-1>} w_k Q_k \Gamma_k(\gamma_k^{<i-1>}) A_k^{<i-1>} \Gamma_k^T(\gamma_k^{<i-1>}) Q_k^T w_k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>} &= i_{kg}^{T<i-1>} w_k Q_k \Gamma_k^{(\gamma_k \gamma_k)} (\gamma_k^{<i-1>}) \Phi_k^{<i-1>} + \\ &+ \frac{2}{\pi p_k} i_{kg}^{T<i-1>} w_k Q_k \Gamma_k^{(\gamma_k)} (\gamma_k^{<i-1>}) A_k^{<i-1>} (\Gamma_k^T)^{(\gamma_k)} (\gamma_k^{<i-1>}) Q_k w_k i_{kg}^{<i-1>}; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\Gamma^{(\gamma_k \gamma_k)} (\gamma_k) = \frac{d\Gamma^{(\gamma_k)} (\gamma_k)}{d\gamma_k} = -p_k^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos(p_k \gamma_k) & \sin(p_k \gamma_k) \\ -\sin(p_k \gamma_k) & \cos(p_k \gamma_k) \end{bmatrix}$$

– матриці, обчислені за $(i-1)$ -м наближенням невідомих.

У результаті алгебраїчних перетворень лінійної системи (31) отримуємо формули

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{ki}^{<i>} &= -(Y_{ki}^{<i-1>})^{-1} A_{ki} Y_{kg}^{<i-1>} A_{ke}^T A_{kH}^T \Delta\varphi^{<i>} + \\ &+ \frac{2}{h} (Y_{ki}^{<i-1>})^{-1} A_{ki} Y_{kg}^{<i-1>} \Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>} C_k^T \Delta\gamma_S^{<i>} + (Y_{ki}^{<i-1>})^{-1} H_k^{<i-1>}; \quad (34) \\ \Delta i_{kg}^{<i>} &= -\frac{2}{h} Y_{kg}^{<i-1>} \Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>} C_k^T \Delta\gamma_S^{<i>} + Y_{kg}^{<i-1>} A_{ke}^T A_{kH}^T \Delta\varphi^{<i>} + Y_{kg}^{<i-1>} A_{ki}^T \Delta\varphi_{ki}^{<i>} - Y_{kg}^{<i-1>} f_{k2}^{<i-1>} \end{aligned}$$

і лінійну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{bmatrix} Y_{\varphi\varphi}^{<i-1>} & Y_{\varphi\gamma}^{<i-1>} \\ Y_{\gamma\varphi}^{<i-1>} & Y_{\gamma\gamma}^{<i-1>} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi^{<i>} \\ \Delta\gamma_S^{<i>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\varphi}^{<i-1>} \\ H_{\gamma}^{<i-1>} \end{bmatrix} \quad (35)$$

де

$$\begin{aligned} H_k^{<i-1>} &= A_{ki} Y_{kg}^{<i-1>} f_{k2}^{<i-1>} - f_{k1}^{<i-1>}; \\ H_{\varphi}^{<i-1>} &= -f^{<i-1>} - \sum_{k=1}^K A_{kH} A_{ke} (Y_{kg}^{<i-1>} f_{k2}^{<i-1>} - Y_{kg}^{<i-1>} A_{ki}^T (Y_{ki}^{<i-1>})^{-1} H_k^{<i-1>}); \\ H_{\gamma}^{<i-1>} &= \sum_{k=1}^K C_k \Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>} (Y_{kg}^{<i-1>} f_{k2}^{<i-1>} + Y_{kg}^{<i-1>} A_{ki}^T (Y_{ki}^{<i-1>})^{-1} H_k^{<i-1>}) - f_M^{<i-1>}; \\ Y_{kg}^{<i-1>} &= (R_{kg} + \frac{2}{h} \Pi_{kii}^{<i-1>})^{-1}; \quad Y_{ki}^{<i-1>} = A_{ki} Y_{kg}^{<i-1>} A_{ki}^T; \\ Y_{\varphi\varphi}^{<i-1>} &= \sum_{k=1}^K A_{kH} A_{ke} (Y_{kg}^{<i-1>} A_{ki}^T (Y_{ki}^{<i-1>})^{-1} A_{ki} Y_{kg}^{<i-1>} - Y_{kg}^{<i-1>} A_{ke}^T A_{kH}^T); \\ Y_{\varphi\gamma}^{<i-1>} &= \frac{2}{h} \sum_{k=1}^K A_{kH} A_{ke} (Y_{kg}^{<i-1>} - Y_{kg}^{<i-1>} A_{ki}^T (Y_{ki}^{<i-1>})^{-1} A_{ki} Y_{kg}^{<i-1>}) \Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>} C_k^T; \\ Y_{\gamma\varphi}^{<i-1>} &= \sum_{k=1}^K C_k \Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>} (Y_{kg}^{<i-1>} - Y_{kg}^{<i-1>} A_{ki}^T (Y_{ki}^{<i-1>})^{-1} A_{ki} Y_{kg}^{<i-1>}) A_{ke}^T A_{kH}^T; \\ Y_{\gamma\gamma}^{<i-1>} &= \frac{2}{h} \sum_{k=1}^K C_k \Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>} (Y_{kg}^{<i-1>} A_{ki}^T (Y_{ki}^{<i-1>})^{-1} A_{ki} Y_{kg}^{<i-1>} - Y_{kg}^{<i-1>}) \Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>} C_k^T + \\ &+ \sum_{k=1}^K C_k (\Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>} - \frac{4}{h^2} J_k) C_k^T. \end{aligned} \quad (37)$$

З формул (5), (7), (33), (37) випливає, що матриця коефіцієнтів при невідомих у системі (35) є симетричною матрицею.

Алгоритм розв'язування задачі на i -й ітерації кроку інтегрування зводиться до виконання таких операцій:

- обчислення за $(i-1)$ -м наближенням $F_k^{<i>}$, $F_{km}^{<i>}$, $F_{kmX}^{<i>}$, $F_{kmY}^{<i>}$, $\Phi_{km}^{<i>}$, $\Phi_{kmX}^{<i>}$, $\Phi_{kmY}^{<i>}$, $\Phi_k^{<i>}$, $\psi_{kg}^{<i>}$, $M_k^{<i>}$, $u_{kgL}^{<i>}$, $i_k^{<i>}$, $\varphi_k^{<i>}$, $\gamma_k^{<i>}$, $\omega_k^{<i>}$, $\varepsilon_k^{<i>}$, $\varphi_z^{<i>}$, $i_z^{<i>}$, $\varphi^{<i>}$, $\gamma_S^{<i>}$, $\omega_S^{<i>}$, $\varepsilon_S^{<i>}$ невідомих F_k , F_{km} , F_{kmX} , F_{kmY} , Φ_{km} , Φ_{kmX} , Φ_{kmY} , Φ_k , ψ_{kg} , M_k , u_{kgL} , i_k , φ_k , γ_k , ω_k , ε_k , φ , γ_S , ω_S , ε_S значень нев'язок $f_{k1}^{<i-1>}$, $f_{k2}^{<i-1>}$, $f_M^{<i-1>}$, $f_{\gamma}^{<i-1>}$, векторів $H_k^{<i-1>}$, $H_\varphi^{<i-1>}$, $H_\gamma^{<i-1>}$ і матриць $\Pi_{kii}^{<i-1>}$, $\Pi_{kij}^{<i-1>}$, $\Pi_{kji}^{<i-1>}$, $\Pi_{k\gamma\gamma}^{<i-1>}$, $Y_{kg}^{<i-1>}$, $Y_{ki}^{<i-1>}$, $Y_{\varphi\varphi}^{<i-1>}$, $Y_{\varphi\gamma}^{<i-1>}$, $Y_{\gamma\varphi}^{<i-1>}$, $Y_{\gamma\gamma}^{<i-1>}$ відповідно за формулами (32), (36), (33), (37);

- розв'язання числовим методом лінійної системи алгебраїчних рівнянь (35);

- обчислення поправок $\Delta\varphi_{ki}^{<i>}$, $\Delta i_{kg}^{<i>}$ за формулами (34);

- обчислення i -го наближення векторів φ , γ_S і векторів φ_{ki} , i_{kg} відповідно за формулами

$$\varphi^{<i>} = \varphi^{<i-1>} + \Delta\varphi^{<i>}; \quad \gamma_S^{<i>} = \gamma_S^{<i-1>} + \Delta\gamma_S^{<i>}; \quad \varphi_{ki}^{<i>} = \varphi_{ki}^{<i-1>} + \Delta\varphi_{ki}^{<i>}; \quad i_{kg}^{<i>} = i_{kg}^{<i-1>} + \Delta i_{kg}^{<i>};$$

- обчислення i -го наближення решти невідомих відповідно за формулами

$$F_k^{<i>} = \begin{bmatrix} F_{kmX}^{<i>} \\ F_{kmY}^{<i>} \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi p_k} \Gamma(\gamma_k^{<i>}) Q_k^T w_k i_{kg}^{<i>}; \quad F_{km}^{<i>} = \sqrt{(F_{kmX}^{<i>})^2 + (F_{kmY}^{<i>})^2};$$

$$\Phi_{km}^{<i>} = \Phi_{km}(F_{km}^{<i>}); \quad \Phi_{kmX}^{<i>} = \frac{F_{kmX}^{<i>}}{F_{km}^{<i-1>}} \Phi_{km}^{<i>}; \quad \Phi_{kmY}^{<i>} = \frac{F_{kmY}^{<i>}}{F_{km}^{<i-1>}} \Phi_{km}^{<i>}; \quad \Phi_k^{<i>} = \begin{bmatrix} \Phi_{kmX}^{<i>} \\ \Phi_{kmY}^{<i>} \end{bmatrix};$$

$$\psi_{kg}^{<i>} = L_{kg\sigma} i_{kg}^{<i>} + w_k Q_k \Gamma_k(\gamma_k^{<i>}) \Phi_k^{<i>}; \quad M_k^{<i>} = i_{kg}^{T<i>} w_k Q_k \Gamma_k(\gamma_k^{<i>}) \Phi_k^{<i>};$$

$$u_{kgL}^{<i>} = \frac{2}{h} \psi_{kg}^{<i>} - \frac{2}{h} \psi_{kg,-1} - u_{kgL,-1};$$

$$\gamma_k^{<i>} = C_k^T \gamma_S^{<i>} + \gamma_{k0}; \quad \omega_k^{<i>} = \frac{2}{h} \gamma_k^{<i>} - \frac{2}{h} \gamma_{k,-1} - \omega_{k,-1}; \quad \varepsilon_k^{<i>} = \frac{4}{h^2} \gamma_k^{<i>} - \frac{4}{h^2} \gamma_{k,-1} - \frac{4}{h} \omega_{k,-1} - \varepsilon_{k,-1};$$

$$i_k^{<i>} = -A_{ke} i_{kg}^{<i>}; \quad \varphi_k^{<i>} = A_{kH}^T \varphi^{<i>} + A_{kz}^T u_z; \quad \varphi_z^{<i>} = H^T \varphi^{<i>} + u_z; \quad i_z^{<i>} = -\sum_{k=1}^K A_{kz} i_k^{<i>}.$$

В опрацьованому алгоритмі на кожній ітерації кроку інтегрування розв'язується лінійна система алгебраїчних рівнянь (35) з $N + V$ невідомими – поправками потенціалів первинних вузлів ЕМС і поправками кутів повороту валів ЕМС, а всі інші невідомі обчислюються за формулами. Оцінимо під цим кутом зору ефективність опрацьованого алгоритму на прикладі ЕМС, яка складається з $K = 30$ НЕМ, електричні кола яких сполучені у $N = 20$ вузлах системи, а вали – у $V = 8$ валах системи, причому кожна з НЕМ має по $S_k + R_k = 6$ фаз. Порядок систем рівнянь (35) при цьому дорівнює $N + V = 20 + 6 = 26$, і кількість довгих арифметичних операцій, необхідних для її розв'язання становить у першому наближенні $26^3 / 3 \approx 6000$. Якщо цю ж ЕМС описувати безпосередньо в базисі струмів гілок, то кількість невідомих у відповідній лінійній системі алгебраїчних рівнянь на ітерації кроку інтегрування дорівнюватиме $K(S_k + R_k) + V = 30 \cdot 6 + 8 = 188$, а кількість довгих арифметичних операцій, необхідних для її

розв'язання становитиме в першому наближенні $188^3 / 3 \approx 2210000$ що у 370 разів більше ніж у пропонованому алгоритмі.

Важливою властивістю пропонованого алгоритму є симетрія матриці коефіцієнтів при невідомих у системі (35), оскільки це запевняє високу чисельну стійкість алгоритму, а при розв'язуванні цієї системи методом Зайдля гарантує збіжність ітераційної процедури при будь-якому нульовому наближенні її кореня.

1. Фильц Р. Магнитно-механические параметры электромеханических преобразователей // Изв. вузов СССР. Электромеханика. – 1988. – № 12. – С. 18–22. 2. Filc R. Modelowanie stanów nieustalonych statycznego przetwornika elektromagnetycznego jako elementu układu elektrycznego // Krajowe Sympozjum “Modelowanie i Symulacja Komputerowa w Technice”. – Łódź, 5–6 marca 2002. – P. 13–20. 3. Filc R. Modelowanie stanów nieustalonych nieliniowych układów elektrycznych zbudowanych z oporników, cewek i kondensatorów // VII Konferencja Naukowo – Techniczna “Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice” ZKwE'2002. Poznań – Kiekrz, 22–24 kwietnia 2002. 4. Chua L. O., Pen-Min Lin. Computer-aided Analysis of Electronic Circuits, New Jersey, Englewood Cliffs. – 1975. 5. Фильц Р. Математические основы теории электромеханических преобразователей. – К., 1979. 6. Filc R., Hładkyj W., Ceślik S. Modelowanie matematyczne uogólnionego przetwornika elektromechanicznego z niejawnobiegowym rdzeniem ferromagnetycznym. XXII IC-SPETO. –Gliwice – Ustroń, 1999. – P. 175–180.

УДК 621.314

Т.М. Шелепеть, В.С. Гордий

Національний університет “Львівська Політехніка”, кафедра ЕМС

МАТЕМАТИЧНЕ ТА ЦИФРОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ПРОЦЕСІВ ТРАНСФОРМАТОРІВ З МАГНЕТНИМИ ШУНТАМИ

© Шелепеть Т.М., Гордий В.С. 2002

Наведений універсальний підхід до моделювання електромагнетних процесів трансформаторів з магнетними шунтами.

The universal method for modeling of the electromagnetic processes of transformers with magnetic shunt is presented.

В електротехніці використовують багато різноманітних електромагнетних апаратів, що складаються з магнетних кіл та обмоток. Залежно від конструкції магнетопроводу та розташування обмоток, електромагнетні апарати мають різні характеристики й використовуються для певних електромагнетних систем. Найпростішим класичним варіантом електромагнетного апарата є трансформатор з концентричними обмотками. Але, достатньо розмістити обмотки на різних стрижнях і між обмотками встановити магнетний шунт з невеликою відстанню до магнетопроводу, як характеристики такого апарата суттєво зміняться.

Трансформатори з магнетними шунтами мають крутопадаючу зовнішню вольт-амперну характеристику і тому коротке замикання в колі вторинної обмотки не супроводжується значним