

УДК 621.365.2

Р.Я. Паранчук

Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра радіофізики

**ЗНАХОДЖЕННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЗБУДЖЕННЯ
ДЛЯ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ
ЗА ПРИНЦИПОМ МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА**

© Паранчук Р.Я., 2002

Проведено дослідження закону зміни параметра для рівняння другого порядку, котрий дає найсильніше параметричне збудження, спираючись на принцип максимуму Понтрягіна. Наведено приклад застосування запропонованої методики.

Excitation function for second order equation, which gives strongest parametric excitation is investigated using Pontriagin maximum principle. Application example of proposed method is given.

Рівняння другого порядку з параметричним збудженням описує багато механічних та електричних систем. Параметричний резонанс в них застосовується для генерування незагасаючих коливань. У зв'язку з цим важливою видається задача знаходження такого закону зміни параметра, котрий дає найсильніше параметричне збудження. Оскільки аналітичне інтегрування для довільної форми збудження неможливе, у цій роботі була зроблена спроба застосувати принцип максимуму Понтрягіна для знаходження оптимального закону зміни збудження.

Розглянемо рівняння другого порядку

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \varphi(t)y = 0 \quad (1)$$

Зробимо у рівнянні (1) підстановку $y = x \cdot \exp(-\delta t)$. Підставивши це значення у в рівняння (1), прийдемо до такого рівняння відносно x :

$$\ddot{x} + (\varphi(t) - \delta^2)x = 0$$

Позначимо нову функцію збудження $u(t) = \varphi(t) - \delta^2$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$\ddot{x} + u(t)x = 0 \quad (2)$$

Виберемо за функцію мети слід матриці монодромії, котрий необхідно максимізувати. Згідно з теорією Флоке [1] мультиплікатори для даного рівняння визначаються як власні значення матриці монодромії. Для знаходження цієї матриці необхідно проінтегрувати рівняння (2) з початковими умовами $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ та $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ на відрізку $[0, T]$. Отримана фундаментальна матриця розв'язків у точці T дасть нам матрицю монодромії. Записавши характеристичне рівняння для цієї матриці, при першому степені отримаємо коефіцієнт, що дорівнює $\text{Sp}M$. Нас цікавлять дійсні значення мультиплікаторів, у цьому випадку вони будуть однакового знака, оскільки їх добуток дорівнює одиниці. У той же час, оскільки сума мультиплікаторів дорівнює $\text{Sp}M$, то для максимізації більшого за модулем мультиплікатора необхідно максимізувати слід матриці. Оскільки принцип

максимуму вимагає одної системи рівнянь, позначимо першу пару x_1 та x_2 , а другу пару – x_3 та x_4 . Привівши рівняння (2) до нормальної форми Коші, отримуємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ux_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -ux_3 \end{cases} \quad (3)$$

Нашою функцією мети є величина $SpM = x_1(T) + x_4(T)$. Нам потрібно мати цей вираз у вигляді інтегралу. З врахуванням записаної системи одержимо:

$$SpM = \int_0^T (\dot{x}_1 + \dot{x}_4) dt + x_1(0) + x_4(0) = \int_0^T (x_2 - ux_3) dt + 2$$

Константа в даному виразі не є суттєвою, оскільки нас цікавить максимізація сліду матриці. Позначивши цільову функцію x_0 , додамо ще одне рівняння в систему (3):

$$\dot{x}_0 = x_2 - ux_3$$

Отже, маємо систему з п'яти рівнянь з початковими умовами $x(0) = (0, 1, 0, 0, 1)^T$. Згідно з принципом максимуму, далі необхідно сформулювати систему для функцій ψ за формулами

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^4 \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i},$$

де $f_j = \dot{x}_j$ – праві частини системи (3). Підставивши в ці вирази значення f_j , отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0 \\ \dot{\psi}_1 = u\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_0 - \psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = u(\psi_4 + \psi_0) \\ \dot{\psi}_4 = -\psi_3 \end{cases}$$

Початкові умови для цієї системи, згідно з [2], задані в точці T і мають вигляд $\psi(T) = (-1, 0, 0, 0, 0)^T$. З першого рівняння відразу отримаємо, що $\psi_0 = \text{const} = -1$. З врахуванням цього, система набуде вигляду

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0 \\ \dot{\psi}_1 = u\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = 1 - \psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = u(\psi_4 - 1) \\ \dot{\psi}_4 = -\psi_3 \end{cases} \quad (4)$$

Тепер можна знайти гамільтоніан для методу максимуму у вигляді

$$H = \sum_{i=0}^4 \psi_i f_i.$$

Після перетворень отримаємо

$$H = x_2(\psi_1 - 1) + \psi_3 x_4 - u(x_3(\psi_4 - 1) + x_1 \psi_2).$$

Згідно з принципом максимуму, слід вибирати керування в кожен момент часу так, щоби гамільтоніан набував максимального значення з врахуванням обмежень, котрі накладені на u в конкретній задачі. У нас обмеження на u випливають з обмежень, накладених на φ : $\varphi \in [0, \varphi_{\max}]$. Відповідно $u \in [-\delta^2, \varphi_{\max} - \delta^2]$. Позначимо $u_{\min} = -\delta^2$, а $u_{\max} = \varphi_{\max} - \delta^2$. З виразу для гамільтоніана легко бачити, що умова максимізації гамільтоніана матиме вигляд

$$u = \begin{cases} u_{\min}, & (x_3(\psi_4 - 1) + x_1\psi_2) > 0 \\ u_{\max}, & (x_3(\psi_4 - 1) + x_1\psi_2) < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Тобто функція u буде розривною, набуватиме лише два дискретні значення, і здійснюватиме перехід між ними, коли вираз $(x_3(\psi_4 - 1) + x_1\psi_2)$ змінює знак.

Отже, системи рівнянь (3) та (4) будуть кусково-постійними і піддаватимуться аналітичному інтегруванню для конкретної функції u . Але функція u у свою чергу залежить і від x і від ψ . Оскільки початкові умови задані в різних точках, то проінтегрувати системи, визначаючи u по ходу інтегрування неможливо.

Зробимо припущення, що наша функція збудження на першій частині періоду має максимальне значення, а на другій частині – мінімальне, тобто на проміжку інтегрування є лише один перехід з максимуму у мінімум. Тоді можна проінтегрувати першу систему на першій частині періоду, а другу – на другій частині, і в точці переходу, котру позначимо α , можна записати умову

$$(x_3(\psi_4 - 1) + x_1\psi_2) = 0.$$

Зробимо позначення

$$\omega_1 = \sqrt{u_{\max}} \quad \omega_2 = \sqrt{-u_{\min}} = \delta.$$

Розв'язки першої системи, котрі нас цікавлять, з врахуванням початкових умов матимуть вигляд

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \omega_1 t \\ x_3 &= \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \end{aligned}$$

Для другої системи матимемо

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{\operatorname{ch} \omega_2 T}{\omega_2} \operatorname{sh} \omega_2 t - \frac{\operatorname{sh} \omega_2 T}{\omega_2} \operatorname{ch} \omega_2 t \\ \psi_4 &= \operatorname{sh} \omega_2 T \operatorname{ch} \omega_2 t - \operatorname{ch} \omega_2 T \operatorname{sh} \omega_2 t + 1 \end{aligned}$$

Остаточно для точки переходу отримаємо умову

$$\frac{\sin \omega_1 \alpha}{\omega_1} \operatorname{ch}[\omega_2(T - \alpha)] + \frac{\cos \omega_1 \alpha}{\omega_2} \operatorname{sh}[\omega_2(T - \alpha)] = 0 \quad (7)$$

або

$$\operatorname{tg}(\omega_1 \alpha) = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{th}[\omega_2(T - \alpha)].$$

Цей вираз має кілька коренів на інтервалі $[0; 2\pi]$. На рис. 1 показана залежність лівої частини (7) від α для параметрів $\varphi_{\max} = 9$; $\delta = 0,01$; $T = 2\pi$.

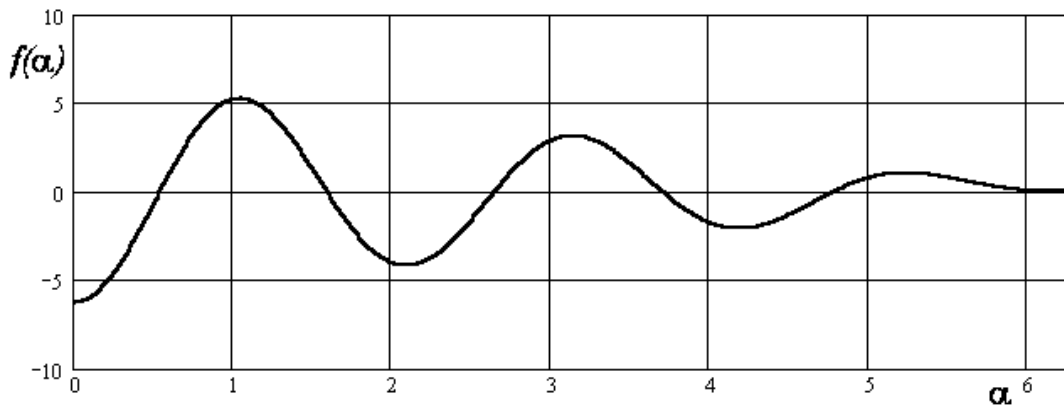


Рис. 1. Залежність лівої частини (7) від α для $\varphi_{\max} = 9$; $\delta = 0,01$; $T = 2\pi$

Але лише перший (найменший) корінь $\alpha \approx 0,54$ дійсно узгоджується з принципом максимуму. Залежності $u(t)$ та $s(t)$ для нього наведені на рис. 2. Інші корені хоча і дають перехід $s(t)$ в точці α через нуль, але не задовольняють вираз (5), тобто мають ще інші переходи через нуль.

У результаті інтегрування отримаємо залежність $s(t) = (x_3(\psi_4 - 1) + x_1\psi_2)$ від часу. Вона наведена на рис. 2, б. На рис. 2, а наведено залежність від часу функції збудження.

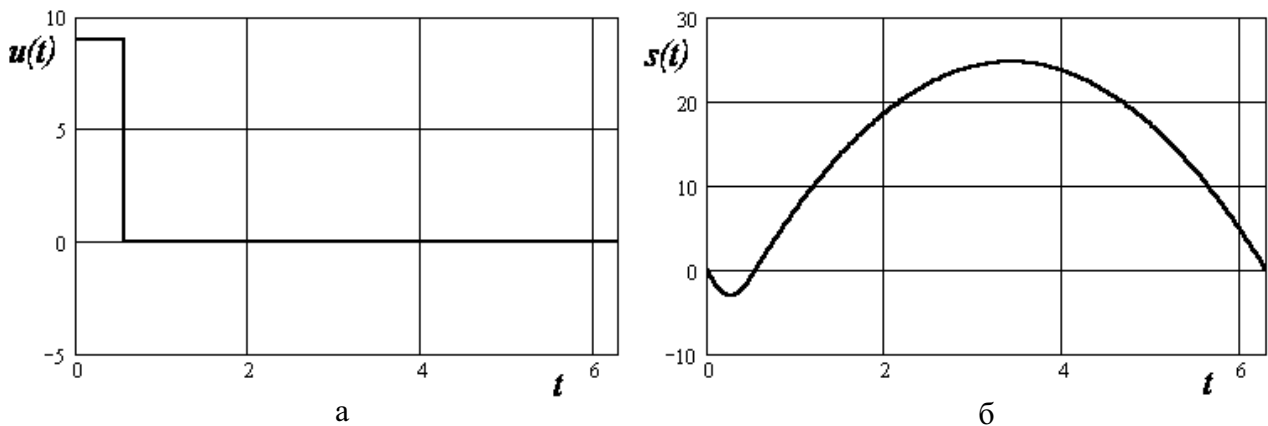


Рис. 2. Функції $u(t)$ (а) та $s(t)$ (б) для $\varphi_{\max} = 9$; $\delta = 0,01$; $T = 2\pi$; $\alpha = 0,54$

На рис. 3 показані аналогічні залежності для одного з “неправильних” коренів $\alpha \approx 2,7$.

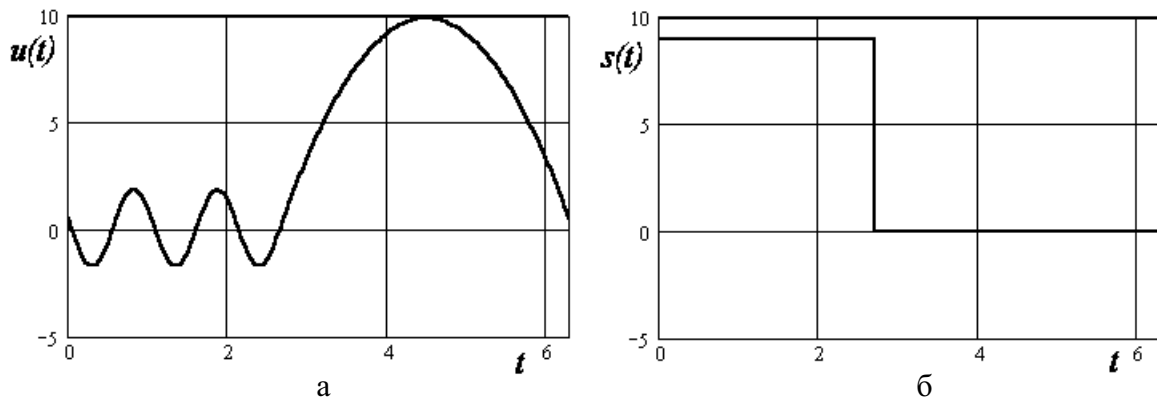


Рис. 3. Функції $u(t)$ (а) та $s(t)$ (б) для $\varphi_{\max} = 9$; $\delta = 0,01$; $T = 2\pi$; $\alpha = 2,7$

Для перевірки отриманих результатів та сама задача була розв'язана методом найшвидшого спуску. Цей метод дав такі самі функції збудження, як і принцип максимуму.

Отримані результати свідчать про те, що найсильнішого параметричного збудження коливань можна досягти стрибкоподібною зміною параметрів системи. Оскільки теорема Понтрягіна дає лише необхідні умови глобального максимуму, то потрібно провести ще додаткові дослідження для доведення достатності цієї умови.

1. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.*, – М.: Наука, 1967, 472 с. 2. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. *Методы теории автоматического управления.* – М., 1971. – 744 с.

УДК 621.313.175.32

В.І. Ткачук, Л.В. Каша, В.Г. Гайдук

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра ЕМА

ДОСЛІДЖЕННЯ ПУЛЬСАЦІЙ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО МОМЕНТУ ВЕНТИЛЬНОГО РЕАКТИВНОГО ДВИГУНА З БУФЕРАМИ ЕНЕРГІЇ

© Ткачук В.І., Каша Л.В., Гайдук В.Г., 2002

Описано вплив кута вмикання, кількості секцій та інших параметрів на величину пульсацій електромагнітного моменту вентильних реактивних двигунів з буферами енергії. Наведено результати та графіки досліджень вентильних реактивних двигунів з послідовними буферами енергії.

The influence of an switch on angle, amount of sections and other parameters on magnitude of pulsings of an electromagnetic moment of switched reluctance motor with buffers of energy are described. The researches results of switched reluctance motor with buffers of energy are given.

Хоч прогнози щодо популярності електричних машин і є песимістичними, вони і надалі розширюють межі застосування в промисловості, побуті, транспорті тощо. З розвитком науки та техніки кількість видів постійно зростає. До нових видів електричних машин необхідно зарахувати вентильні реактивні двигуни (ВРД), які все частіше застосовуються в регульованих електроприводах.

Одним з найпростіших за конструкцією є електромеханічний перетворювач (ЕМП) ВРД з явнополюсним статором, зосередженими котушками його обмотки та зубчастим пасивним ротором. Такий ЕМП є простішим, дешевшим і технологічнішим, ніж найпростіші з електричних машин – асинхронні, а ВД на його основі за регульовальними властивостями не поступаються колекторним двигунам постійного струму. Технологічність і простота конструкції, дешевизна та стійкість в роботі, задовільні регульовальні характеристики зумовили розширення використання цих електричних машин в електроприводі, де вимагаються високі споживчі показники.

В [1] запропонована конструкція ЕМП на U-подібних елементах (рис. 1), яка забезпечує повну магнітну ізоляцію секцій ВД.