

Аналізуючи отримані залежності, можна помітити, що характер зміни величини прогину і критична швидкість залежать від жорсткості вала та розподілу його маси по довжині.

### Висновки

1. Результати моделювання не суперечать фізичній сутності явищ, що відбуваються в реальному об'єкті й підтверджують адекватність математичної моделі та можливість її застосування для розв'язування інженерних задач, пов'язаних з розрахунками динамічних показників валів: прогинів, розподілів згинальних моментів та перерізаючих зусиль по довжині вала, критичних швидкостей тощо.

2. Застосування методу колокації для алгебризації частинних похідних в одновимірних крайових задачах є цілком виправданим і дозволяє досягнути заданої точності розв'язку, виконавши меншу кількість арифметичних операцій, ніж при використанні інших методів. Оптимальна кількість вузлів колокації для даної задачі становить 8–10.

3. Запропонована модель може бути інтегрована в модель відповідної електричної машини. Це дозволить врахувати зовнішні сили електромагнітного походження, які діють на вал.

1. Тондл. А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л., 1971, – 388 с. 2. Титов В.В., Хуторецкий Г.М., Загородная Г.А. и др. Турбогенераторы. Расчет и конструкция. Энергия. – Л., 1967. – 894 с. 3. Фильц Р.В. Дискретные аналоги дифференциальных операторов и их применение в задачах электромеханики // Изв. вузов. Электромеханика. – 1990. – № 3. – С. 5–16.

УДК 621.372

В.С. Маляр, А.В. Маляр

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедри ЕАП, ТЗЕ

## РОЗРАХУНОК ТА АНАЛІЗ СТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ З ФЕРОРЕЗОНАНСНИМИ КОНТУРАМИ

© Маляр В.С., Маляр А.В., 2002

**Розглянуто особливості застосування диференціального сплайн-методу до розрахунку періодичних процесів в електротехнічних пристроях з ферорезонансними контурами та аналізу асимптотичної стійкості нелінійних періодичних режимів.**

**Peculiarities of application of the differential spline-method for calculating periodic processes in electrotechnical devices with ferroresonant circuits and for analyzing asymptotic stability of periodic modes have been considered.**

До складу багатьох електротехнічних пристроїв входять нелінійні індуктивні елементи та конденсатори, що зумовлює появу ферорезонансних явищ. Стаціонарні режими роботи таких пристроїв є періодичні й характеризуються не тільки несинусоїдністю кривих струмів та напруг, але й неоднозначністю. Розв'язувати задачу пошуку періодичного процесу шляхом розрахунку перехідного процесу до його усталення неефективно з багатьох міркувань. Крім того, такий підхід до розв'язання задачі розрахунку періодичного режиму може дати вичерпну інформацію про властивості конкретного об'єкта лише у випадку

однозначності розв'язку, тобто для конвергентних систем [1]. У разі їх неконвергентності отриманий шляхом розв'язування еволюційної задачі періодичний розв'язок залежить від заданих початкових умов, а віднайти всі можливі стаціонарні режими практично неможливо. У статті розглянутий розрахунок неоднозначних періодичних процесів, які існують в електротехнічних пристроях з ферорезонансними контурами, та дослідження їх на асимптотичну стійкість на основі використання сплайн-методу розрахунку [2]. Суть методу розрахунку та аналізу на стійкість викладемо на прикладі ферорезонансного контуру, який живиться від джерела синусоїдної напруги

$$u = U_m \sin \omega t. \quad (1)$$

Рівняння електричної рівноваги ферорезонансного контуру мають вигляд

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri + u_c = u; \quad \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C}, \quad (2)$$

де  $\psi = \psi(i)$ ,  $R$  – потокозчеплення котушки індуктивності та її активний опір;  $u_c$ ,  $C$  – напруга на конденсаторі та його ємність;  $i$  – миттєве значення струму в контурі.

Враховуючи, що в усталеному режимі  $\psi$  та  $u_c$  є періодичними функціями часу, розв'язком системи диференціальних рівнянь (ДР) (2) є Т-періодична залежність

$$i(t) = i(t+T), \quad (3)$$

причому таких розв'язків може бути декілька. Тому задачу пошуку періодичних розв'язків системи (2) ДР будемо розглядати як крайову з періодичними крайовими умовами

$$\psi(t) = \psi(t+T); \quad u_c(t) = u_c(t+T). \quad (4)$$

Алгебризацію системи (2) на сітці  $N$  вузлів періоду на підставі сплайн-апроксимації змінних стану здійснюємо відповідно до викладеного в [2] методом. У результаті замість нелінійної системи ДР (2) отримаємо нелінійну систему скінченних рівнянь

$$H\vec{\Psi} = RE\vec{I} + \vec{U}_c - \vec{U}; \quad (5a)$$

$$H\vec{U}_c - C^{-1}\vec{I} = 0, \quad (5b)$$

де  $H$  – квадратна матриця розміру  $N$ , елементи якої визначаються сіткою вузлів періоду [2];  $\vec{\Psi}, \vec{I}, \vec{U}_c, \vec{U}$  –  $N$ -мірні вектори, утворені з вузлових значень потокозчеплень, струмів, напруг на конденсаторі та прикладеної напруги;  $E$  – одинична матриця розміру  $N$ .

Нелінійна залежність (вебер-амперна характеристика дроселя)

$$\psi = \psi(i) \quad (5в)$$

доповнює систему ДР (5a), (5b) до замкненої.

Нелінійну систему (5) скінченних рівнянь можна розв'язати ітераційним методом Ньютона, однак для цього необхідно задати таке нульове наближення векторів  $\vec{I}$  та  $\vec{U}_c$ , яке було б в околі притягання методу, чого на практиці рідко вдається досягнути. Крім того, навіть у випадку збіжності ітераційного процесу існує проблема знаходження усіх можливих періодичних режимів та дослідження їх на стійкість.

Враховуючи наведене, з метою розв'язання поставленої задачі домножимо в рівнянні (5а) вектор  $\vec{U}$  вузлових значень збурюючої дії на скалярний параметр  $\epsilon$  та продиференціюємо отриману параметризовану алгебричну систему рівнянь (5) по цьому параметру. При диференціюванні врахуємо, що поточкозчеплення  $\psi$  дроселя в  $j$ -му вузлі залежить лише від значення струму у цьому ж вузлі періоду, тому похідна

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{I}} = M = \text{diag}(L_1, \dots, L_N) \quad (6)$$

– це діагональна матриця розміру  $N$ , елементами якої є диференціальні індуктивності  $L_j = \left. \frac{\partial \psi}{\partial i} \right|_j$ , які визначаються з характеристики (5в). Внаслідок диференціювання отримаємо

$$W \frac{d\vec{X}}{d\epsilon} = \vec{Y}, \quad (7)$$

де

$$W = \begin{array}{|c|c|} \hline HM - RE & -E \\ \hline C^{-1} & -H \\ \hline \end{array} \quad \text{– матриця Якобі системи (5);}$$

$\vec{X} = (\vec{I}, \vec{U}_c)^T$ ;  $\vec{Y} = (\vec{U}, 0)^T$  – вектори-стовпці (верхній індекс “Т” означає транспонування).

Початкові умови при цьому нульові, оскільки значенню  $\epsilon = 0$  відповідає нульове значення прикладеної напруги у всіх вузлах сітки. У зв'язку з тим, що ферорезонансна характеристика має особливі точки, в яких похідні  $d\vec{I}/d\epsilon$  та  $d\vec{U}/d\epsilon$  прямують до нескінченності, при підході до них необхідно переходити на інтегрування по іншій координаті, наприклад, першій або іншій компоненті вектора  $\vec{I}$ . При цьому в матриці Якобі необхідно поміняти місцями відповідний стовпчик і вектор правих частин. При підході до особливої точки ( $d\vec{I}/dI_1$  та  $d\vec{U}/dI_1$  прямують до нескінченності) необхідно знову повернутись до системи рівнянь аргументу  $\epsilon$ .

Серед множини отриманих при різних значеннях  $\epsilon$  періодичних режимів – сукупності векторів  $\vec{I}, \vec{U}_c$  – є як стійкі, так і нестійкі. Розв'язок нелінійної системи (5) стійкий у малому [3], якщо після малого збурення величини, які визначають періодичний режим – вектори  $\vec{I}, \vec{U}_c$  – набудуть вихідних значень.

Для дослідження стійкості розв'язку нелінійної системи (5) запишемо систему ДР, яка буде описувати процес при збуренні. При цьому необхідно враховувати, що вузлові значення змінних стану  $i$ , як наслідок, коефіцієнти сплайнів стають функціями часу. У результаті приходимо до нелінійної системи ДР відносно векторів  $\vec{\Psi}$  та  $\vec{I}$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\Psi}}{dt} + H\vec{\Psi} - RE\vec{I} - \vec{U}_c &= \vec{U}; \\ \frac{d\vec{I}}{dt} + H\vec{U}_c - C^{-1}\vec{I} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

За умови рівності нулю похідних за часом векторів  $\vec{\Psi}$ ,  $\vec{U}_c$  система (8) тотожна системі (5), отже, розв'язок нелінійної системи (5) скінченних рівнянь є усталеним режимом нелінійної системи (8) ДР. Для визначення асимптотичної стійкості цього розв'язку здійснимо лінеаризацію системи (8) ДР, скориставшись методикою [4]. У результаті отримаємо систему лінійних рівнянь, яку запишемо в матричній формі

$$Y \frac{d}{dt} \Delta \vec{X} + W \Delta \vec{X} = 0, \quad (9)$$

де  $Y = \text{diag}(M, E)$ ;  $\Delta \vec{X} = (\Delta \vec{I}, \Delta \vec{U}_c)^T$ .

Відзначимо, що у загальному випадку елементи матриці  $M$  є змінними, проте у даному випадку при малих приростах  $\Delta \vec{I}$  та  $\Delta \vec{U}_c$  вони постійні і дорівнюють їх значенню, яке відповідає значенню вектора  $\vec{I}$ .

Характеристичне рівняння системи (9) має вигляд

$$\det(pY + W) = 0. \quad (10)$$

Аналіз асимптотичної стійкості розв'язку системи (5) скінченних рівнянь можна здійснити за методом Рауса чи Гурвіца [4], попередньо обчисливши коефіцієнти рівняння (10) за однією із відомих стандартних процедур. Оскільки матриця  $M$  обчислюється під час інтегрування системи (7) ДР та ітераційного уточнення розв'язку методом Ньютона, необхідність її обчислення під час аналізу стійкості відпадає.

За наявності ферорезонансних явищ існує аперіодична нестійкість, яка зумовлює стрибки. Про неї можна судити на підставі вільного члена рівняння (10), який визначається як  $\det(W)$ . Якщо він від'ємний за умови додатних всіх визначників Гурвіца до передостаннього, то спостерігається аперіодична нестійкість періодичного режиму. Оскільки знаки решти коефіцієнтів рівняння (10) невідомі, то про аперіодичну стійкість періодичного режиму можна судити під час розрахунку багатовимірних характеристик періодичних режимів [5] не на підставі знака визначника, а його зміни. Це пояснюється тим, що розрахунок починається з  $\varepsilon=0$ , тобто тривіального завчасно відомого стійкого розв'язку  $\vec{I} = 0$ . Якщо ідучи вдовж характеристики визначник змінює знак, то це свідчить про перехід на нестійку частину характеристики. Наступна зміна знака  $\det(W)$  свідчить про повернення на стійку частину характеристики.

Як приклад, виконано розрахунок сіткової характеристики періодичного процесу в ферорезонансному контурі, який живиться від джерела напруги  $u = 90 \cos(\omega t + \pi/2)$ . Параметри схеми мають такі значення:  $r = 1,5$  Ом,  $c = 0,25 \cdot 10^{-3}$  Ф, а характеристика дроселя зображена на рис. 3. На рис. 1 показані залежності значень струму в першому, п'ятому і десятому вузлах періоду при  $N = 20$ , отримані внаслідок інтегрування по  $\varepsilon$  системи (9) методом Ейлера з ітераційним уточненням на кожному другому кроці методом Ньютона. Як видно з рис. 1, криві мають дві особливі точки:  $\varepsilon_1 = 0,289$  і  $\varepsilon_2 = 0,118$ , похідні в яких дорівнюють нескінченності і які розділюють стійкі і нестійкі частини характеристики. При нарощуванні  $\varepsilon$  від нуля до  $\varepsilon_1 = 0,289$  переміщення відбувається по стійкій частині характеристики, далі переходимо на нестійку (аперіодична нестійкість), а після проходження точки  $\varepsilon_2 = 0,118$ , відбувається знову перехід на стійку частину характеристики.

Особливі точки проходимо шляхом інвертування – переходом від ДР аргументу  $\varepsilon$  до ДР іншого аргументу, наприклад, вузлового значення струму  $i_1$  у першому вузлі.

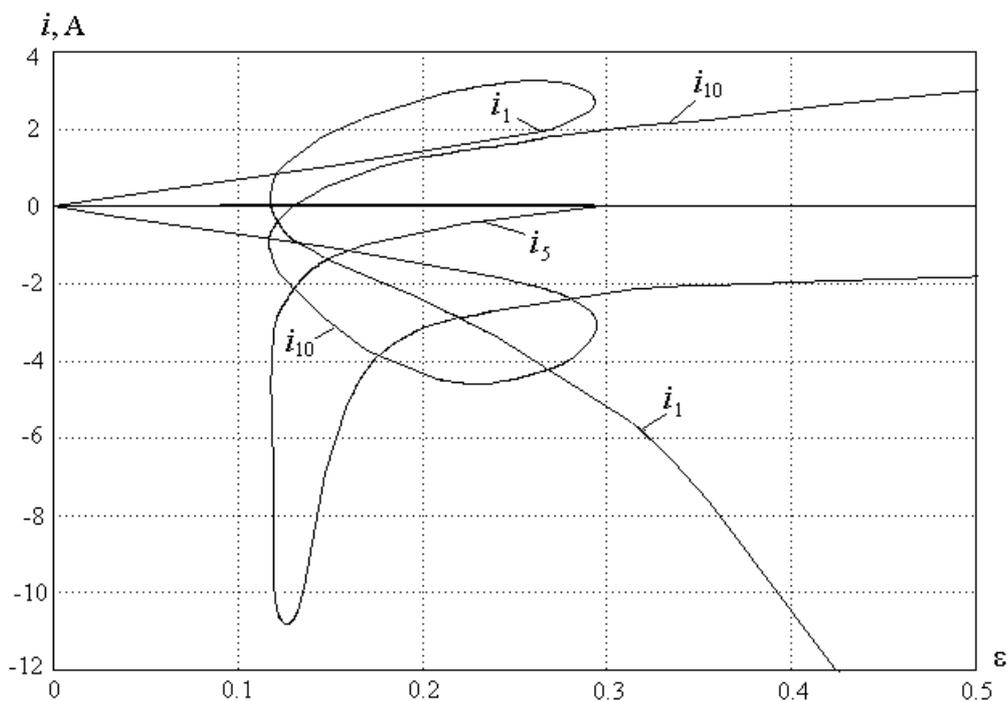


Рис. 1. Залежності від  $\varepsilon$  значень струмів у першому ( $i_1$ ), п'ятому ( $i_5$ ) та десятому ( $i_{10}$ ) вузлах періоду

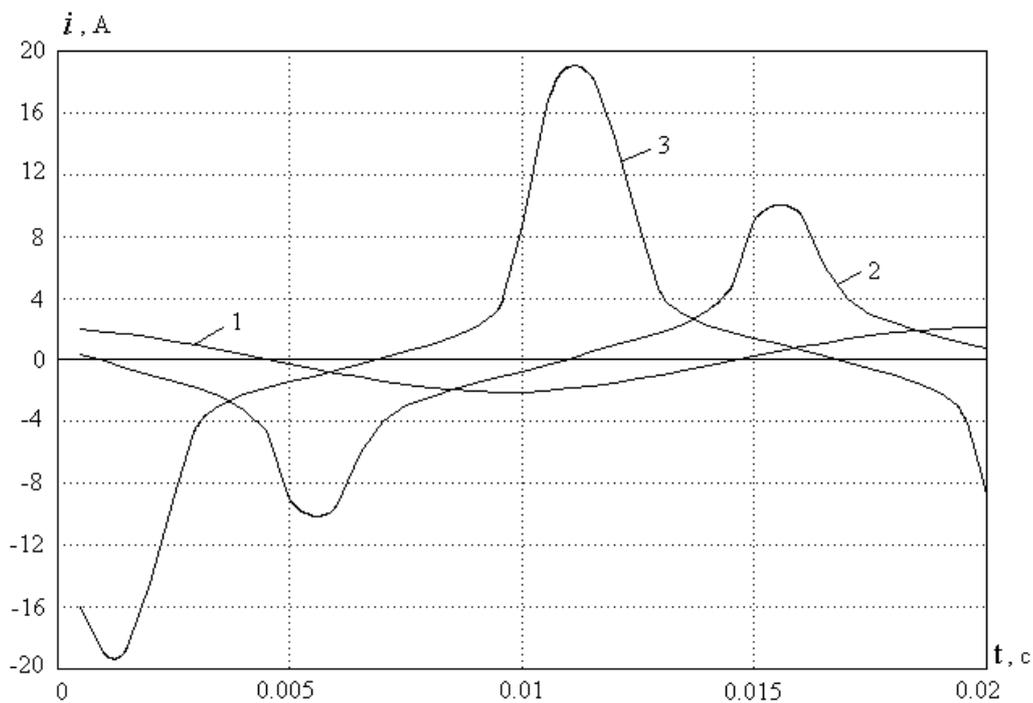


Рис. 2. Розрахункові криві струму на періоді, які відповідають трьом точкам статичної характеристики: 1,3 – стійкі; 2 – нестійка

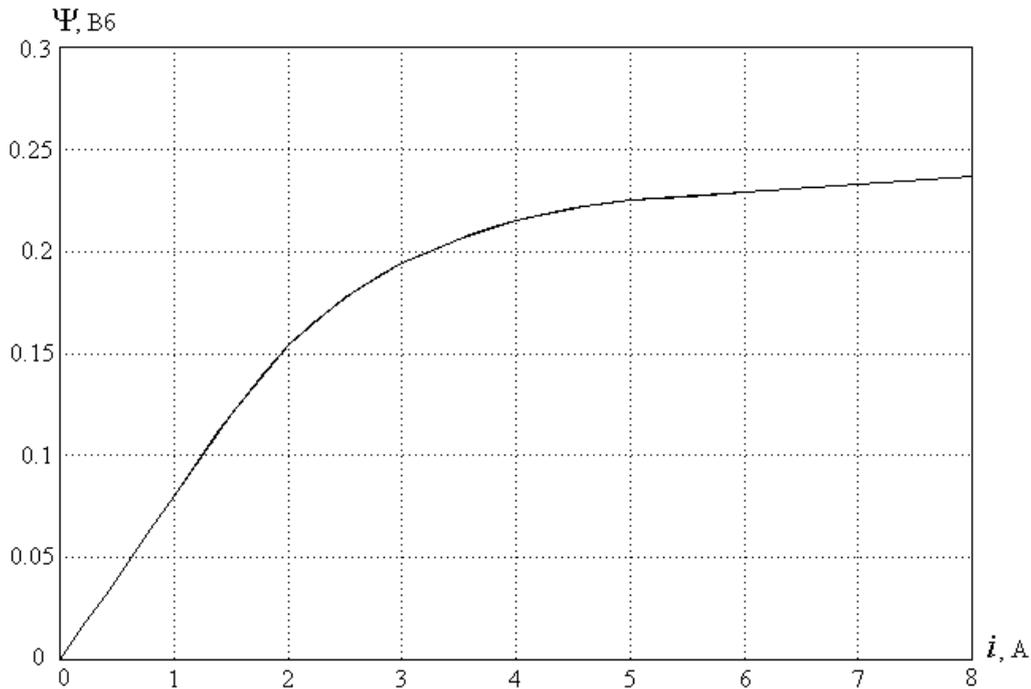


Рис. 3. Вебер-амперна характеристика дроселя

На рис. 2 зображені розрахункові криві струму на періоді, які відповідають трьом точкам статичної характеристики рис. 1, дві з яких (1, 3) стійкі, а одна (2) нестійка.

1. Синицкий Л.А. Элементы качественной теории нелинейных электрических цепей. – Львов, 1975. – 151 с. 2. Маляр В.С. Основные положения сплайн-метода расчета периодических режимов работы электрических цепей // Электроника и связь. – 1998. – Вып. 5. – С. 11–14. 3. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. – К., 1997. – 544 с. 4. Фильц Р.В., Дячишин Б.В., Маляр В.С. Обобщенная методика составления линеаризованных уравнений нелинейных систем // Изв. вузов СССР. Электромеханика. – 1978. – № 6. – С. 671–675. 5. Маляр В.С. Розрахунок статичних характеристик періодичних процесів диференціальним сплайн-методом // Теоретична електротехніка. – 2000. – Вип. 55. – С. 37–42.