

Отже, проведені дослідження показали, що при синтезі двомасових САК без використання і з використанням спостерігачів, нехтування дією дисипативних сил в об'єкті з пружним зв'язком призводить до невідповідності реальних динамічних показників вихідної координати регулювання очікуваним. Тому при синтезі САК координатами таких об'єктів слід враховувати дію внутрішнього і зовнішнього тертя в елементах кінематичної схеми.

УДК 621.313.3

О.В. Макаруч

Національний університет "Львівська політехніка", кафедра ЕМА

## МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ ВАЛА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

© Макаруч О.В., 2002

**Описується математичне формулювання та метод розв'язування задачі розрахунку поперечних коливань пружного вала, що обертається на двох нерухомих опорах і має нерівномірно розподілені по довжині масу та жорсткість.**

**The mathematical formulation and the method of solution of task of transversal oscillations calculation of the elastic shaft rotating on two motionless support and having nonuniformly distributed along on length a mass and rigidity are described.**

При проектуванні електричних машин, у яких співвідношення довжини активної частини до діаметра розточки статора перевищує три, виникає необхідність у проведенні специфічного механічного розрахунку вала з метою визначення максимально можливого його прогину, під час обертання з номінальною швидкістю, розрахунку так званих критичних швидкостей обертання та оцінки вібраційної надійності машини загалом. Ця задача стає особливо актуальною при проектуванні потужних турбогенераторів.

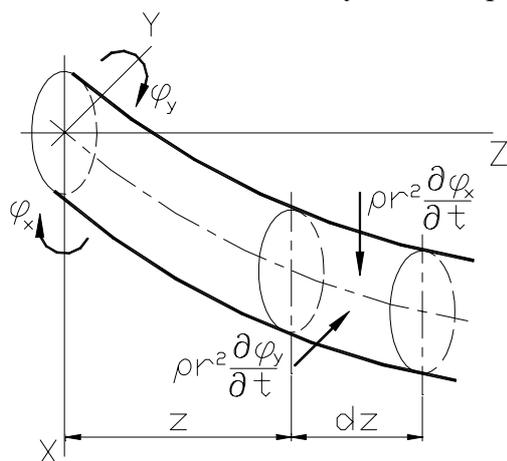


Рис. 1. До виводу рівняння (1)–(4)

У роботах, присвячених розв'язанню цієї задачі, пропонують аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь, що описують динаміку обертових валів й часто не враховують всіх основних чинників, які впливають на поведінку таких об'єктів, а саме: як правило, нерівномірний розподіл маси вала вздовж його осі обертання та різну жорсткість вала в напрямках головних осей інерції (нерівномірний вал).

Пропонується математична модель для розрахунку поперечних коливань вала, що обертається, яка враховує вищезгадані чинники у їх взаємозв'язку.

Об'єктом дослідження є горизонтальний пружний вал, закріплений на двох нерухомих опорах, із довільно розподіленою по його довжині масою та різними моментами інерції перерізів у напрямках головних осей.

Заданою системою координат XYZ такою, яка зображена на рис. 1.

Вважатимемо, що вал обертається із заданою швидкістю  $\omega$  та знаходиться під дією таких зовнішніх сил: сили ваги, розподіленої вздовж осі  $Z$ , та відцентрової сили, зумовленої ексцентриситетом центра мас.

Виділимо елемент вала довжиною  $dz$ . Тоді, кутові зміщення торцевих поверхонь елемента визначатимуться як

$$\varphi_x = -\frac{\partial y}{\partial z}; \quad \varphi_y = \frac{\partial x}{\partial z}, \quad (1)$$

де  $x, y$  – координати геометричного центра перерізу вала на віддалі  $z$ .

Проекції на осі  $X, Y$  кутових швидкостей та прискорень елемента записуються як

$$\omega_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial t}; \quad \omega_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \omega_x}{\partial t}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \omega_y}{\partial t}. \quad (3)$$

Моменти сил інерції елемента довжиною  $dz$  [1]

$$\begin{aligned} M_{ix} &= -\rho[z]r^2\varepsilon_x dz - 2\rho[z]r^2\omega\omega_y dz = \rho r^2(-\varepsilon_x - 2\omega\omega_y) dz; \\ M_{iy} &= -\rho[z]r^2\varepsilon_y dz + 2\rho[z]r^2\omega\omega_x dz = \rho r^2(-\varepsilon_y + 2\omega\omega_x) dz, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\rho = \rho[z]$  – функція розподілу маси вала, по його довжині (маса вала  $m = \int_0^l \rho dz$ ; де  $l$  – його довжина);  $r$  – радіус інерції;  $\rho r^2$  – масовий момент інерції елемента вала відносно осі обертання;  $\omega$  – кутова швидкість обертання вала.

Згинальні моменти пружних сил, враховуючи (1) визначаються як [2]

$$\begin{aligned} M_x &= E \left( I_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} + I_{xy} \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right) = E \left( -I_x \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right); \\ M_y &= E \left( I_{xy} \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} + I_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right) = E \left( -I_{xy} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + I_y \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right); \end{aligned} \quad (5)$$

де  $I_x, I_y, I_{xy}$  – моменти інерції відносно осей  $i$  відцентровий момент інерції. Вони залежать від кута повороту вала  $\theta$  у нерухомій системі координат  $XYZ$  визначаються через моменти інерції перерізів відносно головних осей  $I_1, I_2$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{2}(I_1 - I_2)\cos(2\omega t); \\ I_y &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2) - \frac{1}{2}(I_1 - I_2)\cos(2\omega t); \\ I_{xy} &= -\frac{1}{2}(I_1 - I_2)\sin(2\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Для ротора турбогенератора можна вважати, що одна з головних осей проходить через вісь великого зубця, а друга – збігається з магнітною нейтраллю.

Вирази (5), враховуючи (6), перетворюються до вигляду

$$\begin{aligned} M_x &= -EI \left\{ A \sin(2\omega t) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + (1 + A \cos(2\omega t)) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right\} \\ M_y &= EI \left\{ (1 - A \cos(2\omega t)) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + A \sin(2\omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

де  $E$  – модуль пружності;  $I[z] = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$  – середній момент інерції перерізу вала;

$A[z] = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$  відношення, яке дорівнює нулю для валів циліндричної форми.

Зважаючи на умову рівноваги моментів, нехтуючи складовими другого порядку малості, отримуємо (рис. 2, а, б)

$$-\frac{\partial M_y}{\partial z} + \frac{M_{iy}}{dz} + Q_x = 0; \quad -\frac{\partial M_x}{\partial z} + \frac{M_{ix}}{dz} + Q_y = 0, \quad (8)$$

де  $Q_x, Q_y$  – проекції на осі перерізаючої сили.

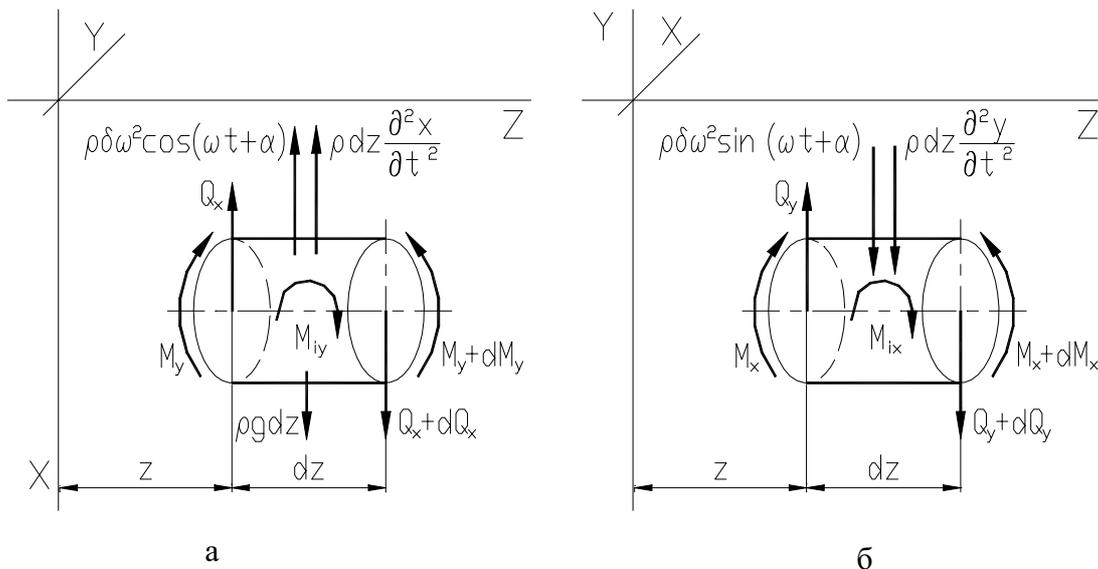


Рис. 2. До виводу рівнянь (8)–(10)

З умови рівноваги сил

$$\frac{\partial Q_x}{\partial z} + \rho g - \rho \delta \omega^2 \cos(\omega t + \alpha) - \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial Q_y}{\partial z} + \rho \delta \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) + \rho \frac{\partial V_y}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

де  $V_x, V_y$  – проекції лінійної швидкості руху центра вала;  $\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$ ,  $\rho g$  – сили інерції та ваги на одиницю довжини вала;  $\rho \delta \omega^2$  – амплітуда відцентрової сили, зумовленої ексцентриситетом центра мас  $\delta[z]$ ;  $\alpha[z]$  – кут між вектором небалансу й однією з головних осей інерції вала.

Підставивши (4) у (8)

$$-\frac{\partial M_y}{\partial z} + \rho r^2 (-\varepsilon_y + 2\omega \omega_x) + Q_x = 0; \quad -\frac{\partial M_x}{\partial z} + \rho r^2 (-\varepsilon_x - 2\omega \omega_y) + Q_y = 0 \quad (10)$$

та доповнивши (10) виразами (1)–(3), (7), (9) й формулами для визначення лінійної швидкості

$$V_x = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad V_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (11)$$

отримуємо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка складається з 14 рівнянь і містить стільки ж невідомих  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ .

Крайову умову сформулюємо на підставі фізичних міркувань. Обидва кінці вала знаходяться в шарнірно-нерухомих опорах типу підшипників ковзання, отже, сумістивши початок системи координат з одним із кінців вала, одержимо

$$x|_{z=0} = x|_{z=1} = 0; \quad y|_{z=0} = y|_{z=1} = 0. \quad (12)$$

На кінцях вала згинальний момент дорівнює нулю, тобто

$$\left. \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right|_{z=1} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right|_{z=1} = 0, \quad (13)$$

або

$$M_x|_{z=0} = M_x|_{z=1} = 0; \quad M_y|_{z=0} = M_y|_{z=1} = 0. \quad (13a)$$

Отже, система диференціальних рівнянь (1)–(3), (7), (9)–(11) разом із крайовою умовою (12), (13) становить одновимірну крайову задачу, яка описує просторову форму осі пружного вала, що обертається, й враховує довільні розподіл маси та форму вала вздовж цієї осі, а також можливий ексцентриситет центра мас вала.

Хоча крайова задача й лінійна, але її аналітичний розв'язок достатньо складний і його не можна безпосередньо використати для розв'язання інженерних задач, наприклад, визначення критичних швидкостей обертання. З іншого боку, систему рівнянь можна доповнити складовими, що враховують важливі, але другорядні чинники, які за своєю природою є нелінійними (реакція масляного шару в підшипниках ковзання, радіальна сила електромагнітного притягання, яка є нелінійною функцією проміжку між статором і ротором, зовнішнє та внутрішнє тертя тощо). У такому випадку крайова задача стає нелінійною і не матиме аналітичного розв'язку. Тому перевагу надано числовим методам розв'язування таких задач.

Для алгебризації похідних за просторовою координатою обрано метод колокації, в якому похідна  $m$ -го порядку деякої функції  $\zeta$  замінюється її дискретним алгебричним аналогом на множині вузлів сітки, умовно накладеної на об'єкт, за формулою [3]

$$\frac{\partial^m \zeta}{\partial z^m} = TD^m T^{-1} \bar{\zeta} = \Gamma^m \bar{\zeta},$$

де  $T$  – матриця Тейлора;  $D^m$  – матриця диференціювання рядка Тейлора  $m$ -го порядку;  $\bar{\zeta}$  – стовпець дискрет;  $\Gamma^m$  – дискретний аналог диференціального оператора  $m$ -го порядку.

Для одновимірних задач застосування методу колокації порівняно з іншими методами, наприклад сітковим, вимагає меншої дискретизації об'єкта для досягнення заданої точності розв'язку.

Для алгебризації похідних за часом використано неявний метод формул диференціювання назад (ФДН)  $g$ -го порядку

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{t=t_k} = a_0 \zeta_k + \sum_{i=1}^g a_i \zeta_{k-i},$$

де  $\zeta_k$  – шукане значення функції на  $k$ -му кроці інтегрування за  $t$ ;  $\zeta_{k-i}$  – відомі з попередніх кроків інтегрування значення функції  $\zeta$ ;  $a_0, \dots, a_g$  – коефіцієнти ФДН.

Після нескладних математичних перетворень, на  $k$ -му кроці інтегрування за часом необхідно розв'язати лінійну систему алгебричних рівнянь (САР) відносно невідомих значень  $x_k, y_k$ . У векторній формі вона має вигляд

$$\begin{aligned} \left( \text{H}\Gamma^2 \text{HK}_3 \Gamma^2 + r^2 a_0^2 \text{H}\Gamma \rho_m \Gamma - \rho_m a_0^2 \right) \bar{x}_k + \left( \text{H}\Gamma^2 \text{HK}_1 \Gamma^2 + 2r^2 a_0 \omega \text{H}\Gamma \rho_m \Gamma \right) \bar{y}_k &= \text{H}\bar{F}_x - \bar{K}_x; \\ \left( \text{H}\Gamma^2 \text{HK}_1 \Gamma^2 + 2r^2 a_0 \omega \text{H}\Gamma \rho_m \Gamma \right) \bar{x}_k + \left( \text{H}\Gamma^2 \text{HK}_2 \Gamma^2 - r^2 a_0^2 \text{H}\Gamma \rho_m \Gamma + \rho_m a_0^2 \right) \bar{y}_k &= \text{H}\bar{F}_y - \bar{K}_y, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \text{H} &= \text{diag}(0, 1, \dots, 1, 0); & \rho_m &= \text{diag}(\rho_0, \dots, \rho_N); \\ \text{K}_1 &= \text{diag}(-EI_0 A_0 \sin(2\omega t), \dots, -EI_N A_N \sin(2\omega t)); \\ \text{K}_2 &= \text{diag}(-EI_0 (1 + A_0 \cos(2\omega t)), \dots, -EI_N (1 + A_N \cos(2\omega t))); \\ \text{K}_3 &= \text{diag}(EI_0 (1 - A_0 \cos(2\omega t)), \dots, EI_N (1 - A_N \cos(2\omega t))) \end{aligned} \quad (15)$$

– діагональні матриці розміру  $(N+1)$ ;  $(N+1)$  – кількість вузлів одновимірної сітки, накладеної на вісь  $Z$  (кількість вузлів колокації);

$$\begin{aligned} \bar{F}_x &= \left\| -g\rho_0 + \rho_0 \delta_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_0) \dots - g\rho_N + \rho_N \delta_N \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_N) \right\|_*; \\ \bar{F}_y &= \left\| -\rho_0 \delta_0 \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_0) \dots - \rho_N \delta_N \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_N) \right\|_*; \\ \bar{K}_x &= r^2 \text{H}\Gamma \rho_m \left( a_0 \sum_{i=1}^g a_i \bar{\varphi}_{y,k-i} - 2\omega \sum_{i=1}^g a_i \bar{\varphi}_{x,k-i} + \sum_{i=1}^g a_i \bar{\omega}_{y,k-i} \right) - a_0 \text{H}\rho_m \sum_{i=1}^g a_i \bar{x}_{k-i} - \\ &- \text{H}\rho_m \sum_{i=1}^g a_i \bar{v}_{x,k-i}; \\ \bar{K}_y &= r^2 \text{H}\Gamma \rho_m \left( a_0 \sum_{i=1}^g a_i \bar{\varphi}_{x,k-i} + 2\omega \sum_{i=1}^g a_i \bar{\varphi}_{y,k-i} + \sum_{i=1}^g a_i \bar{\omega}_{x,k-i} \right) + a_0 \text{H}\rho_m \sum_{i=1}^g a_i \bar{y}_{k-i} + \\ &+ \text{H}\rho_m \sum_{i=1}^g a_i \bar{v}_{y,k-i} \end{aligned} \quad (16)$$

– вектори-стовпці розміру  $(N+1)$ .

Використовуючи комп'ютерну реалізацію запропонованої моделі, здійснено розрахунок першої критичної швидкості для валів чотирьох типів:

1. Вал з рівномірно розподіленою масою й однаковими моментами інерції по головних осях

$$\rho^{(1)} = 750,4 \frac{\text{кг}}{\text{М}}; \quad I_1^{(1)} = I_2^{(1)} = 7,366 \cdot 10^{-4} \text{ М}^4.$$

Тут і надалі верхній індекс у дужках означає номер математичного експерименту.

2. Вал із рівномірно розподіленою масою і різними моментами інерції по головних осях

$$\rho^{(2)} = \rho^{(1)}; \quad I_1^{(2)} = 1,5I_1^{(1)}; \quad I_2^{(2)} = 0,5I_2^{(1)}.$$

3. Вал з нерівномірно розподіленою масою й однаковими моментами інерції по головних осях

$$\rho^{(3)}[z] = -93,73z^2 + 468,6z + 359,9; \text{ причому } \int_0^l \rho^{(3)} dz = \rho^{(1)}l; \quad I_1^{(3)}[z] = I_2^{(3)}[z] = \frac{(\rho^{(3)}[z])^2}{4\pi\gamma},$$

де  $\gamma$  – густина матеріалу, з якого виготовлено вал;

4. Вал із нерівномірно розподіленою масою і різними моментами інерції по головних осях

$$\rho^{(4)} = \rho^{(3)}; \quad I_1^{(4)}[z] = 1,5I_1^{(3)}[z]; \quad I_2^{(4)}[z] = 0,5I_2^{(3)}[z].$$

У всіх чотирьох випадках довжина вала становить 5 м, радіус інерції – 0,1237 м, модуль пружності –  $2 \cdot 10^{11}$  Па, ексцентриситет центра мас не залежить від  $Z$  і становить 1 мм, швидкість обертання змінювалась в діапазоні  $0 \leq \omega \leq 300$  рад/с.

Залежності максимального прогину  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  від кутової швидкості  $\omega$  для випадків 1 і 2 зображені на рис. 3, а для випадків 3 і 4 – рис. 4.

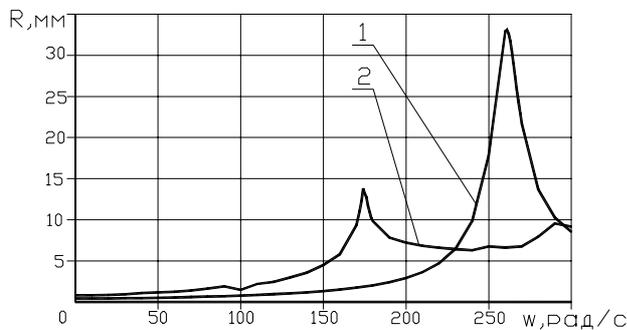


Рис. 3. Залежності  $R(\omega)$

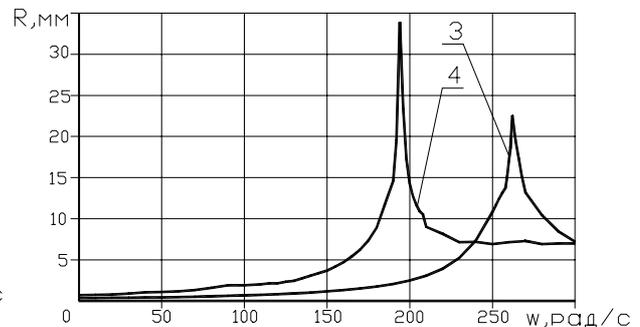


Рис. 4. Залежності  $R(\omega)$

Годографи вектора  $\bar{R}$  при швидкостях, близьких до критичних, зображені на рис. 5, 6. У 1-му та 2-му випадках  $\omega = 170$  рад/с, у 3-му –  $\omega = 260$  рад/с, у 4-му –  $\omega = 190$  рад/с.

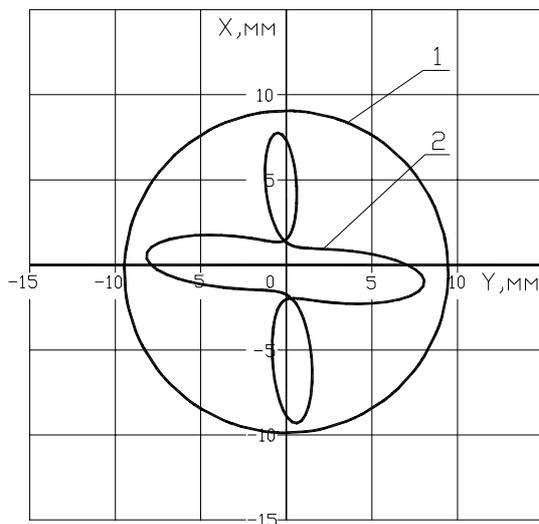


Рис. 5. Годографи вектора  $R$

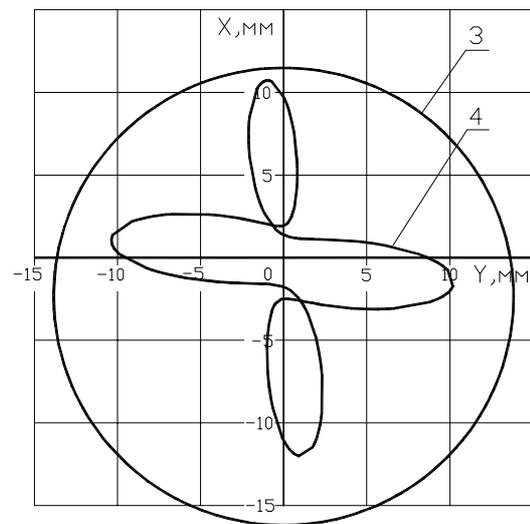


Рис. 6. Годографи вектора  $R$

Аналізуючи отримані залежності, можна помітити, що характер зміни величини прогину і критична швидкість залежать від жорсткості вала та розподілу його маси по довжині.

### Висновки

1. Результати моделювання не суперечать фізичній сутності явищ, що відбуваються в реальному об'єкті й підтверджують адекватність математичної моделі та можливість її застосування для розв'язування інженерних задач, пов'язаних з розрахунками динамічних показників валів: прогинів, розподілів згинальних моментів та перерізаючих зусиль по довжині вала, критичних швидкостей тощо.

2. Застосування методу колокації для алгебризації частинних похідних в одновимірних крайових задачах є цілком виправданим і дозволяє досягнути заданої точності розв'язку, виконавши меншу кількість арифметичних операцій, ніж при використанні інших методів. Оптимальна кількість вузлів колокації для даної задачі становить 8–10.

3. Запропонована модель може бути інтегрована в модель відповідної електричної машини. Це дозволить врахувати зовнішні сили електромагнітного походження, які діють на вал.

1. Тондл. А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л., 1971, – 388 с. 2. Титов В.В., Хуторецкий Г.М., Загородная Г.А. и др. Турбогенераторы. Расчет и конструкция. Энергия. – Л., 1967. – 894 с. 3. Фильц Р.В. Дискретные аналоги дифференциальных операторов и их применение в задачах электромеханики // Изв. вузов. Электромеханика. – 1990. – № 3. – С. 5–16.

УДК 621.372

В.С. Маляр, А.В. Маляр

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедри ЕАП, ТЗЕ

## РОЗРАХУНОК ТА АНАЛІЗ СТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ З ФЕРОРЕЗОНАНСНИМИ КОНТУРАМИ

© Маляр В.С., Маляр А.В., 2002

**Розглянуто особливості застосування диференціального сплайн-методу до розрахунку періодичних процесів в електротехнічних пристроях з ферорезонансними контурами та аналізу асимптотичної стійкості нелінійних періодичних режимів.**

**Peculiarities of application of the differential spline-method for calculating periodic processes in electrotechnical devices with ferroresonant circuits and for analyzing asymptotic stability of periodic modes have been considered.**

До складу багатьох електротехнічних пристроїв входять нелінійні індуктивні елементи та конденсатори, що зумовлює появу ферорезонансних явищ. Стаціонарні режими роботи таких пристроїв є періодичні й характеризуються не тільки несинусоїдністю кривих струмів та напруг, але й неоднозначністю. Розв'язувати задачу пошуку періодичного процесу шляхом розрахунку перехідного процесу до його усталення неефективно з багатьох міркувань. Крім того, такий підхід до розв'язання задачі розрахунку періодичного режиму може дати вичерпну інформацію про властивості конкретного об'єкта лише у випадку