

Тут доречно підкреслити, що навіть при $N = Q + 1$ моделювання на підставі польового підходу не пов'язане з ускладненням моделі розрахунку перехідних електромагнітних процесів у стрижні кліткової обмотки, а з погляду підготовки вхідних даних для цієї моделі є набагато простішим, оскільки не вимагає обчислення матриці індуктивностей N -шарової обмотки.

1. Клоков Б. К. Расчет вытеснения тока в стержнях произвольной конфигурации // *Электротехника*. – 1969. – № 9. – С. 25–29.
2. Макаруч О.В. Порівняння моделей перехідних процесів у стрижні короткозамкненої обмотки електричної машини // *Тез. доп. 1-ї Міжнар. конф. “Математичне моделювання в електротехніці й електроенергетиці”*. – Львів, 1995. – 92 с.
3. Фильц Р.В., Онышко Е.Г., Плахтына Е.Г. Алгоритм расчета переходных процессов в асинхронной машине с учетом насыщения и вытеснения тока // *Преобразователи частоты для электропривода*. – Кишинев, Штиинца, 1979. – С. 11–22.
4. Фильц Р.В., Макаруч О.В. Математичне моделювання електромагнітних процесів у стрижні короткозамкненої обмотки // *Технічна електродинаміка*. – 1995. – № 1. – С. 3–8.
5. Шимони К. *Теоретическая электротехника*. – М., 1964. – 773 с.

УДК 621.313.3

В.М. Гладкий

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра ЕМА

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПРОЦЕСІВ У СТРИЖНЯХ ПАЗА ДВОКЛІТКОВОГО РОТОРА

© Гладкий В.М., 2002

Опрацьовано математичну модель для розрахунків електромагнітних перехідних процесів у стрижнях пазу двокліткового ротора. Модель базується на розрахунку електромагнітного поля у стрижнях на підставі методу колокації, алгебризації диференціальних рівнянь за формулою диференціювання назад g -го порядку та розв'язуванні нелінійної системи алгебричних рівнянь методом Ньютона. Наведено результати математичного експерименту.

A mathematical model for calculating electromagnetic transients in the bars of double-bar rotor slot has been developed. The model is based on electromagnetic field computation with the collocation method, differential equations algebraization with the g -th order backward differentiation formula and nonlinear algebraic equations system solving with the Newton's method. The results of mathematical experiments are presented.

У низці приводів, де необхідно мати великий пусковий момент, використовують двокліткові асинхронні двигуни, що мають поліпшені пускові характеристики порівняно з двигунами з одноклітковим ротором. Наведені у літературі [1, 5] формули для обчислення еквівалентних активного та індуктивного опорів пазу такого ротора придатні для розрахунків усталених режимів роботи, причому вплив насичення шляхів потоків розсіяння

враховується наближено. Відомі польові математичні моделі, наприклад [4], для розрахунку електромагнітних перехідних процесів у стрижні кліткового ротора з взаємним врахуванням витіснення струму та насичення шляхів потоків розсіяння є опрацьовані для однокліткового ротора. У цій роботі пропонується математична модель для розрахунку електромагнітних процесів у стрижнях паза двокліткового ротора. Модель опрацьована за допущень, які аналогічні до допущень, прийнятих у моделі паза однокліткового ротора [4]:

1. Електричне поле має лише складову, спрямовану вздовж довжини кожного з стрижнів.

2. Магнітне поле має лише складову, спрямовану в тангенціальному напрямі.

Запишемо рівняння електромагнітного стану нижнього стрижня.

За другим законом Кірхгофа й законом електромагнітної індукції для контуру $C_{H1}C_{H2}C_{H3}C_{H4}$ (рис. 1), у якому $C_{H1}C_{H2} = C_{H3}C_{H4} = 1$ м, маємо рівняння [4]

$$\rho_H v_0 (-j_{H1} + j_{H2}) - \int_{y_{H1}}^{y_{H2}} \frac{dH_H}{dt} dy = 0, \quad (1)$$

де ρ_H – питомий опір матеріалу нижнього стрижня; v_0 – питомий магнітний опір пустоти; j_{H1} , j_{H2} – густина струму в нижньому стрижні на висоті y_{H1} , y_{H2} відповідно; H_H – напруженість магнітного поля нижнього стрижня на висоті y_H .

За законом повного струму для контуру $A_{H1}A_{H2}A_{H3}A_{H4}$ інтегрування (рис. 1) маємо рівняння [4]

$$-b_{H1}H_{H1} + b_{H2}H_{H2} - \int_{y_{H1}}^{y_{H2}} b_H j_H dy = 0, \quad (2)$$

де $b_H = b_H(y)$ – ширина нижнього стрижня як відома функція, яка на висоті y_{H1} та y_{H2} набуває значень b_{H1} та b_{H2} відповідно; $j_H = j_H(y)$ – густина струму в нижньому стрижні; H_{H1} , H_{H2} – напруженість магнітного поля нижнього стрижня на висоті y_{H1} , y_{H2} відповідно.

Для $y_H = 0$ маємо таку крайову умову для нижнього стрижня:

$$H_{H0} = 0. \quad (3)$$

Для $y_H = y_{H, пов}$ за другим законом Кірхгофа й законом електромагнітної індукції маємо рівняння, яке є другою крайовою умовою для нижнього стрижня

$$v_0 E_{ст} - \rho_H v_0 j_{H, пов} - v_0 \frac{d\Phi_{\Pi}}{dt} - v_0 \frac{d\Phi_K}{dt} - \int_{y_{H, пов} + h_{\Pi}}^{y_{B, пов}} \frac{dH_B}{dt} dy = 0, \quad (4)$$

де $E_{ст} = E_{ст}(t)$ – напруженість стороннього електричного поля як відома функція часу; $j_{H, пов}$ – густина струму на поверхні нижнього стрижня; H_B – напруженість магнітного поля верхнього стрижня на висоті y_B ; Φ_{Π} – магнітний потік, який проходить через перемичку між нижнім і верхнім стрижнями; Φ_K – магнітний потік, який проходить через коронки і шліці.

Для верхнього стрижня рівняння, записані за другим законом Кірхгофа й законом електромагнітної індукції для контуру $C_{B1}C_{B2}C_{B3}C_{B4}$ (рис. 1), а також за законом повного

струму для контуру $A_{B1}A_{B2}A_{B3}A_{B4}$ інтегрування, мають вигляд

$$\rho_B \nu_0 (-j_{B1} + j_{B2}) - \int_{y_{B1}}^{y_{B2}} \frac{dH_B}{dt} dy = 0; \quad -b_{B1}H_{B1} + b_{B2}H_{B2} - \int_{y_{B1}}^{y_{B2}} b_B j_B dy = 0, \quad (5)$$

де ρ_B – питомий опір матеріалу верхнього стрижня; $b_B = b_B(y)$ – ширина верхнього стрижня як відома функція, яка на висоті y_{B1} та y_{B2} набуває значень b_{B1} та b_{B2} відповідно; $j_B = j_B(y)$ – густина струму в верхньому стрижні, яка на висоті y_{B1} та y_{B2} набуває значень j_{B1} , j_{B2} відповідно; H_{B1} , H_{B2} – напруженість магнітного поля верхнього стрижня на висоті y_{B1} , y_{B2} відповідно.

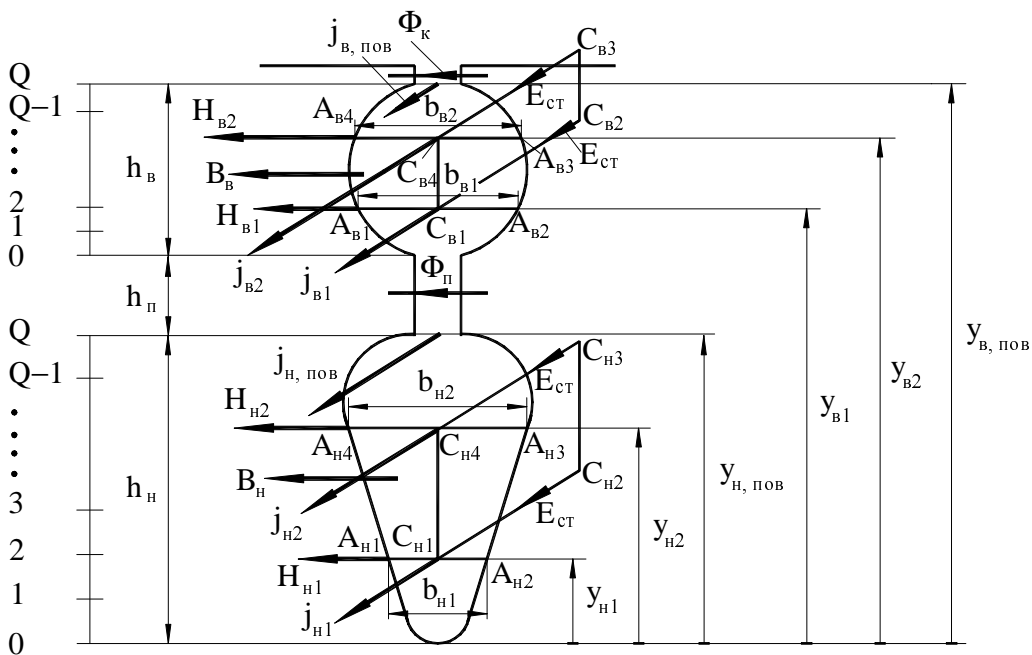


Рис. 1. До виведення рівнянь електромагнітного стану стрижнів

Для $y = y_{H, пов} + h_H$ за законом повного струму для контуру інтегрування, що охоплює нижній стрижень, маємо таку крайову умову для верхнього стрижня:

$$H_{B0} b_{B0} = i_H, \quad (6)$$

де i_H – струм нижнього стрижня.

Для $y = y_{B, пов}$ за другим законом Кірхгофа й законом електромагнітної індукції маємо рівняння другої крайової умови для верхнього стрижня [4]

$$E_{ст} - \rho_B j_{B, пов} - \frac{d\Phi_K}{dt} = 0, \quad (7)$$

де $j_{B, пов}$ – густина струму на поверхні верхнього стрижня.

Потік Φ_{II} залежить від струму i_H нижнього стрижня згідно з характеристикою

$$\Phi_{II} = \Phi_{II}(i_H) \quad (8)$$

намагнічування перемички, а потік Φ_K залежить від струму

$$i_{\text{паз}} = i_H + i_B, \quad (9)$$

паза, де i_B – струм верхнього стрижня, згідно з характеристикою

$$\Phi_K = \Phi_K(i_{\text{паз}}) \quad (10)$$

намагнічування коронок.

Струм нижнього та верхнього стрижнів обчислюють за формулами

$$i_H = \int_0^{y_{H, \text{пов}}} b_H j_H dy; \quad i_B = \int_{y_{H, \text{пов}} + h_{\Pi}}^{y_{B, \text{пов}}} b_B j_B dy. \quad (11)$$

Система рівнянь (1), (2), (5), (8)–(11) разом з крайовими умовами (3), (4), (6), (7) містить дев'ять невідомих j_H , j_B , N_H , N_B , i_H , i_B , $i_{\text{паз}}$, Φ_{Π} , Φ_K , серед яких перші чотири є функціями простору і часу, а решта – лише функціями часу.

Для визначення розподілу j_H , N_H , j_B , N_B вздовж висоти нижнього та верхнього стрижнів відповідно використовуємо метод колокації. Згідно з цим методом невідомі наближаємо многочленами Тейлора Q -го степеня та шукаємо їх значення у $Q + 1$ вузлах сітки, накладеної вздовж інтервалу зміни невідомої функції. Значення змінних у вузлах сітки назвемо дискретними [3].

Накладемо вздовж висоти h_H нижнього стрижня сітку з $Q + 1$ вузлами, а вздовж висоти h_B верхнього стрижня накладемо сітку зі стількома ж вузлами.

Записуючи на підставі методу колокації дискретний аналог вихідної системи рівнянь, невідомі функції замінюємо їх дискретними, інтегральні оператори $\int_{y_{H1}}^{y_{H2}} dy$ та $\int_{y_{B1}}^{y_{B2}} dy$ – їх

алгебричними аналогами [4]

$$\bar{I}_{H(1,2)} = \begin{bmatrix} y_{H2} - y_{H1} & \frac{y_{H2}^2 - y_{H1}^2}{2!} & \dots & \frac{y_{H2}^{Q+1} - y_{H1}^{Q+1}}{(Q+1)!} \end{bmatrix} T_H^{-1} = \begin{bmatrix} I_{H(1,2)0} & I_{H(1,2)1} & \dots & I_{H(1,2)Q} \end{bmatrix};$$

$$\bar{I}_{B(1,2)} = \begin{bmatrix} y_{B2} - y_{B1} & \frac{y_{B2}^2 - y_{B1}^2}{2!} & \dots & \frac{y_{B2}^{Q+1} - y_{B1}^{Q+1}}{(Q+1)!} \end{bmatrix} T_B^{-1} = \begin{bmatrix} I_{B(1,2)0} & I_{B(1,2)1} & \dots & I_{B(1,2)Q} \end{bmatrix},$$

а інтегральні оператори $\int_0^{y_{H, \text{пов}}} dy$ та $\int_{y_{H, \text{пов}} + h_{\Pi}}^{y_{B, \text{пов}}} dy$ – їх алгебричними аналогами

$$\bar{I}_{H(0,Q)} = \begin{bmatrix} h_H & \frac{h_H^2}{2!} & \dots & \frac{h_H^{Q+1}}{(Q+1)!} \end{bmatrix} T_H^{-1} = \begin{bmatrix} I_{H(0,Q)0} & I_{H(0,Q)1} & \dots & I_{H(0,Q)Q} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{B(0,Q)} &= \begin{bmatrix} y_{B, \text{пов}} - (y_{H, \text{пов}} + h_{\Pi}) & \frac{y_{B, \text{пов}}^2 - (y_{H, \text{пов}} + h_{\Pi})^2}{2!} & \dots & \frac{y_{B, \text{пов}}^{Q+1} - (y_{H, \text{пов}} + h_{\Pi})^{Q+1}}{(Q+1)!} \end{bmatrix} T_B^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} I_{B(0,Q)0} & I_{B(0,Q)1} & \dots & I_{B(0,Q)Q} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де T_H^{-1} , T_B^{-1} – обернені матриці Тейлора [2] для комплексів вузлів, накладених вздовж висоти нижнього та верхнього стрижнів відповідно.

Застосовуючи ці правила до рівнянь (1), (2), (4), (5), (11), отримуємо такі рівняння:

$$\begin{aligned} \rho_H v_0 (-j_{H0} + j_{H1}) - I_{H(0,1)0} \frac{dH_{H0}}{dt} - \dots - I_{H(0,1)Q} \frac{dH_{HQ}}{dt} &= 0; \\ \vdots & \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \rho_H v_0 (-j_{HQ-1} + j_{HQ}) - I_{H(Q-1,Q)0} \frac{dH_{H0}}{dt} - \dots - I_{H(Q-1,Q)Q} \frac{dH_{HQ}}{dt} &= 0; \\ -b_{H0}H_{H0} + b_{H1}H_{H1} - I_{H(0,1)0} b_{H0}j_{H0} - \dots - I_{H(0,1)Q} b_{HQ}j_{HQ} &= 0; \\ \vdots & \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} -b_{HQ-1}H_{HQ-1} + b_{HQ}H_{HQ} - I_{H(Q-1,Q)0} b_{H0}j_{H0} - \dots - I_{H(Q-1,Q)Q} b_{HQ}j_{HQ} &= 0; \\ v_0 E_{ст} - \rho_H v_0 j_{HQ} - v_0 \frac{d\Phi_{\Pi}}{dt} - v_0 \frac{d\Phi_{\kappa}}{dt} - (I_{B(0,Q)0} \frac{dH_{B0}}{dt} + \dots + I_{B(0,Q)Q} \frac{dH_{BQ}}{dt}) &= 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \rho_B v_0 (-j_{B0} + j_{B1}) - I_{B(0,1)0} \frac{dH_{B0}}{dt} - \dots - I_{B(0,1)Q} \frac{dH_{BQ}}{dt} &= 0; \\ \vdots & \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \rho_B v_0 (-j_{BQ-1} + j_{BQ}) - I_{B(Q-1,Q)0} \frac{dH_{B0}}{dt} - \dots - I_{B(Q-1,Q)Q} \frac{dH_{BQ}}{dt} &= 0; \\ -b_{B0}H_{B0} + b_{B1}H_{B1} - I_{B(0,1)0} b_{B0}j_{B0} - \dots - I_{B(0,1)Q} b_{BQ}j_{BQ} &= 0; \\ \vdots & \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} -b_{BQ-1}H_{BQ-1} + b_{BQ}H_{BQ} - I_{B(Q-1,Q)0} b_{B0}j_{B0} - \dots - I_{B(Q-1,Q)Q} b_{BQ}j_{BQ} &= 0; \\ i_H = I_{H(0,Q)0} b_{H0}j_{H0} + \dots + I_{H(0,Q)Q} b_{HQ}j_{HQ}; \quad i_B = I_{B(0,Q)0} b_{B0}j_{B0} + \dots + I_{B(0,Q)Q} b_{BQ}j_{BQ}. & \end{aligned} \quad (17)$$

Скалярним рівнянням (12), (14) відповідає векторне рівняння

$$K_{H1} \vec{j}_{HD} + K_{H2} \frac{d\vec{H}_{HD}}{dt} + v_0 E_{ст} \vec{L} - v_0 \frac{d\Phi_{\Pi}}{dt} \vec{L} - v_0 \frac{d\Phi_{\kappa}}{dt} \vec{L} - \vec{L} I_{B(0,Q)} \frac{d\vec{H}_{BD}}{dt} = 0; \quad (18)$$

рівнянням (3), (13) – векторне рівняння

$$K_{H3} \vec{H}_{HD} - K_{H4} \vec{j}_{HD} = 0; \quad (19)$$

рівнянням (15), (7) – векторне рівняння

$$K_{B1} \vec{j}_{BD} + K_{B2} \frac{d\vec{H}_{BD}}{dt} + v_0 E_{ст} \vec{L} - v_0 \frac{d\Phi_{\kappa}}{dt} \vec{L} = 0; \quad (20)$$

рівнянням (6), (16) – векторне рівняння

$$K_{B3} \vec{H}_{BD} - K_{B4} \vec{j}_{BD} = \vec{K} i_H, \quad (21)$$

а рівняння (17) запишемо у такому вигляді:

$$i_H = K_{H5} \vec{j}_{HD}; \quad i_B = K_{B5} \vec{j}_{BD}, \quad (22)$$

де $\vec{j}_{HD} = [j_{H0} \dots j_{HQ}]^T$, $\vec{j}_{BD} = [j_{B0} \dots j_{BQ}]^T$ – вектор-дискрет густини струму відповідно у нижньому та верхньому стрижнях; $\vec{H}_{HD} = [H_{H0} \dots H_{HQ}]^T$, $\vec{H}_{BD} = [H_{B0} \dots H_{BQ}]^T$ –

вектори дискрет напруженостей магнітного поля відповідно нижнього та верхнього стрижнів;

$$\mathbf{K}_{H1} = \rho_H v_0 \begin{bmatrix} -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_{H2} = \begin{bmatrix} -I_{H(0,1)0} & \dots & -I_{H(0,1)Q} \\ \vdots & & \vdots \\ -I_{H(Q-1,Q)0} & \dots & -I_{H(Q-1,Q)Q} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{H3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_{H0} & b_{H1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_{H1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -b_{HQ-1} & b_{HQ} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_{H4} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ I_{H(0,1)0} b_{H0} & \dots & I_{H(0,1)Q} b_{HQ} \\ \vdots & & \vdots \\ I_{H(Q-1,Q)0} b_{H0} & \dots & I_{H(Q-1,Q)Q} b_{HQ} \end{bmatrix}$$

– квадратні матриці розміру $(Q+1)$; $\mathbf{K}_{H5} = [I_{H(0,Q)0} b_{H0} \dots I_{H(0,Q)Q} b_{HQ}]$ – рядок розміру $(Q+1)$; $\vec{L} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$, $\vec{K} = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T$ – стовпці розміру $(Q+1)$.

Матриці \mathbf{K}_{B1} , \mathbf{K}_{B2} , \mathbf{K}_{B3} , \mathbf{K}_{B4} , \mathbf{K}_{B5} за своїм змістом аналогічні до матриць \mathbf{K}_{H1} , \mathbf{K}_{H2} , \mathbf{K}_{H3} , \mathbf{K}_{H4} , \mathbf{K}_{H5} .

З рівнянь (19) та (21) маємо

$$\vec{H}_{HD} = \mathbf{K}_{H3}^{-1} \mathbf{K}_{H4} \vec{J}_{HD}; \quad \vec{H}_{VD} = \mathbf{K}_{B3}^{-1} (\vec{K} i_H + \mathbf{K}_{B4} \vec{J}_{VD}). \quad (23)$$

Система алгебричних і диференціальних рівнянь (18), (20), (22), (9), (8), (10), (23) разом з початковою умовою

$$t = t_0; \quad \vec{J}_{HD} = \vec{J}_{HD0}; \quad \vec{J}_{VD} = \vec{J}_{VD0}$$

є математичним формулюванням задачі розрахунку електромагнітних перехідних процесів у стрижнях паза двокліткового ротора.

До інтегрування цієї системи рівнянь застосуємо формулу диференціювання назад (ФДН) g -го порядку [6].

Алгебризувавши похідні у диференціальних рівняннях (18), (20) за ФДН g -го порядку, отримуємо алгебричні рівняння

$$\mathbf{K}_{H1} \vec{J}_{HD} + \mathbf{K}_{H2} (a_0 \vec{H}_{HD} + \sum_{j=1}^g a_j \vec{H}_{HDj}) + v_0 E_{CT} \vec{L} - v_0 (a_0 \Phi_{\Pi} + \sum_{j=1}^g a_j \Phi_{\Pi j}) \vec{L} -$$

$$- v_0 (a_0 \Phi_K + \sum_{j=1}^g a_j \Phi_{Kj}) \vec{L} - \vec{L} \vec{I}_{B(0,Q)} (a_0 \vec{H}_{VD} + \sum_{j=1}^g a_j \vec{H}_{VDj}) = 0; \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_{B1} \vec{J}_{VD} + \mathbf{K}_{B2} (a_0 \vec{H}_{VD} + \sum_{j=1}^g a_j \vec{H}_{VDj}) + v_0 E_{CT} \vec{L} - v_0 (a_0 \Phi_K + \sum_{j=1}^g a_j \Phi_{Kj}) \vec{L} = 0, \quad (25)$$

де \vec{J}_{HD} , \vec{J}_{VD} , \vec{H}_{HD} , \vec{H}_{VD} , Φ_{Π} , Φ_K – невідомі значення змінних у моменті t ; E_{CT} – відоме значення напруженості стороннього електричного поля у моменті t ; \vec{H}_{HDj} , \vec{H}_{VDj} , $\Phi_{\Pi j}$, Φ_{Kj} – обчислені на попередніх g кроках інтегрування значення змінних \vec{H}_{HD} , \vec{H}_{VD} , Φ_{Π} , Φ_K ; a_0 , a_j ($j = \overline{1, g}$) – коефіцієнти, що визначаються моментами часу t , t_1, \dots, t_g .

Отриману на кроці інтегрування нелінійну систему алгебричних рівнянь (24), (25), (22), (9), (8), (10), (23) розв'язуватимемо методом Ньютона.

Лінеаризована система рівнянь на i -й ітерації методу Ньютона має вигляд

$$\mathbf{K}_{\text{H1}} \Delta \vec{\mathbf{j}}_{\text{нд}}^{(i)} + a_0 \mathbf{K}_{\text{H2}} \Delta \vec{\mathbf{H}}_{\text{нд}}^{(i)} - a_0 \mathbf{v}_0 \Delta \Phi_{\text{п}}^{(i)} \vec{\mathbf{L}} - a_0 \mathbf{v}_0 \Delta \Phi_{\text{к}}^{(i)} \vec{\mathbf{L}} - a_0 \vec{\mathbf{L}}_{\text{в(0,Q)}} \Delta \vec{\mathbf{H}}_{\text{вд}}^{(i)} = -\vec{\mathbf{f}}_{\text{H}}^{(i-1)}; \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_{\text{B1}} \Delta \vec{\mathbf{j}}_{\text{вд}}^{(i)} + a_0 \mathbf{K}_{\text{B2}} \Delta \vec{\mathbf{H}}_{\text{вд}}^{(i)} - a_0 \mathbf{v}_0 \Delta \Phi_{\text{к}}^{(i)} \vec{\mathbf{L}} = -\vec{\mathbf{f}}_{\text{B}}^{(i-1)};$$

$$\Delta \mathbf{i}_{\text{H}}^{(i)} = \mathbf{K}_{\text{H5}} \Delta \vec{\mathbf{j}}_{\text{нд}}^{(i)}; \quad \Delta \mathbf{i}_{\text{B}}^{(i)} = \mathbf{K}_{\text{B5}} \Delta \vec{\mathbf{j}}_{\text{вд}}^{(i)};$$

$$\Delta \mathbf{i}_{\text{паз}}^{(i)} = \Delta \mathbf{i}_{\text{H}}^{(i)} + \Delta \mathbf{i}_{\text{B}}^{(i)};$$

$$\Delta \Phi_{\text{п}}^{(i)} = \Lambda_{\text{п}}^{(i-1)} \Delta \mathbf{i}_{\text{H}}^{(i)}; \quad \Delta \Phi_{\text{к}}^{(i)} = \Lambda_{\text{к}}^{(i-1)} \Delta \mathbf{i}_{\text{паз}}^{(i)};$$

$$\Delta \vec{\mathbf{H}}_{\text{нд}}^{(i)} = \mathbf{K}_{\text{H3}}^{-1} \mathbf{K}_{\text{H4}} \Delta \vec{\mathbf{j}}_{\text{нд}}^{(i)}; \quad \Delta \vec{\mathbf{H}}_{\text{вд}}^{(i)} = \mathbf{K}_{\text{B3}}^{-1} (\vec{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{i}_{\text{H}}^{(i)} + \mathbf{K}_{\text{B4}} \Delta \vec{\mathbf{j}}_{\text{вд}}^{(i)}),$$

де $\Delta \vec{\mathbf{j}}_{\text{нд}}^{(i)}$, $\Delta \vec{\mathbf{j}}_{\text{вд}}^{(i)}$, $\Delta \mathbf{i}_{\text{H}}^{(i)}$, $\Delta \mathbf{i}_{\text{B}}^{(i)}$, $\Delta \mathbf{i}_{\text{паз}}^{(i)}$, $\Delta \Phi_{\text{п}}^{(i)}$, $\Delta \Phi_{\text{к}}^{(i)}$, $\Delta \vec{\mathbf{H}}_{\text{нд}}^{(i)}$, $\Delta \vec{\mathbf{H}}_{\text{вд}}^{(i)}$ – поправки невідомих на i -й ітерації; $\vec{\mathbf{f}}_{\text{H}}^{(i-1)}$, $\vec{\mathbf{f}}_{\text{B}}^{(i-1)}$ – значення нев'язок

$$\vec{\mathbf{f}}_{\text{H}} = \mathbf{K}_{\text{H1}} \vec{\mathbf{j}}_{\text{нд}} + \mathbf{K}_{\text{H2}} (a_0 \vec{\mathbf{H}}_{\text{нд}} + \sum_{j=1}^g a_j \vec{\mathbf{H}}_{\text{нд}j}) + \mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\text{ст}} \vec{\mathbf{L}} - \mathbf{v}_0 (a_0 \Phi_{\text{п}} + \sum_{j=1}^g a_j \Phi_{\text{п}j}) \vec{\mathbf{L}} -$$

$$- \mathbf{v}_0 (a_0 \Phi_{\text{к}} + \sum_{j=1}^g a_j \Phi_{\text{к}j}) \vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}}_{\text{в(0,Q)}} (a_0 \vec{\mathbf{H}}_{\text{вд}} + \sum_{j=1}^g a_j \vec{\mathbf{H}}_{\text{вд}j});$$

$$\vec{\mathbf{f}}_{\text{B}} = \mathbf{K}_{\text{B1}} \vec{\mathbf{j}}_{\text{вд}} + \mathbf{K}_{\text{B2}} (a_0 \vec{\mathbf{H}}_{\text{вд}} + \sum_{j=1}^g a_j \vec{\mathbf{H}}_{\text{вд}j}) + \mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\text{ст}} \vec{\mathbf{L}} - \mathbf{v}_0 (a_0 \Phi_{\text{к}} + \sum_{j=1}^g a_j \Phi_{\text{к}j}) \vec{\mathbf{L}}$$

рівнянь (24), (25), обчислені за $(i-1)$ -м наближенням невідомих; $\Lambda_{\text{п}}^{(i-1)}$, $\Lambda_{\text{к}}^{(i-1)}$ – відповідно значення

$$\Lambda_{\text{п}} = \frac{d\Phi_{\text{п}}}{d\mathbf{i}_{\text{H}}}; \quad \Lambda_{\text{к}} = \frac{d\Phi_{\text{к}}}{d\mathbf{i}_{\text{паз}}}$$

магнітних провідностей перемички та коронок зубців, обчислені за $(i-1)$ -м наближенням невідомих.

Утворимо вектори первинних та вторинних невідомих

$$\vec{\mathbf{X}}_{\text{перв}} = [\vec{\mathbf{j}}_{\text{нд}} \quad \vec{\mathbf{j}}_{\text{вд}}]^T; \quad \vec{\mathbf{X}}_{\text{втор}} = [\mathbf{i}_{\text{H}} \quad \mathbf{i}_{\text{B}} \quad \mathbf{i}_{\text{паз}} \quad \Phi_{\text{п}} \quad \Phi_{\text{к}} \quad \vec{\mathbf{H}}_{\text{нд}} \quad \vec{\mathbf{H}}_{\text{вд}}]^T.$$

Система рівнянь (26) зводиться до вигляду

$$\mathbf{A}^{(i-1)} \Delta \vec{\mathbf{X}}_{\text{перв}}^{(i)} = -\vec{\mathbf{f}}^{(i-1)}, \quad (27)$$

де $\Delta \vec{\mathbf{X}}_{\text{перв}}^{(i)} = [\Delta \vec{\mathbf{j}}_{\text{нд}}^{(i)} \quad \Delta \vec{\mathbf{j}}_{\text{вд}}^{(i)}]^T$ – вектор поправок первинних невідомих; $\vec{\mathbf{f}}^{(i-1)}$, $\mathbf{A}^{(i-1)}$ –

значення вектора нев'язок $\vec{\mathbf{f}} = [\vec{\mathbf{f}}_{\text{H}} \quad \vec{\mathbf{f}}_{\text{B}}]^T$ та матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{H1}} + a_0 \mathbf{K}_{\text{H2}} \mathbf{K}_{\text{H3}}^{-1} \mathbf{K}_{\text{H4}} - a_0 \mathbf{v}_0 \vec{\mathbf{L}} (\Lambda_{\text{п}} + \Lambda_{\text{к}}) \mathbf{K}_{\text{H5}} - a_0 \vec{\mathbf{L}}_{\text{в(0,Q)}} \mathbf{K}_{\text{B3}}^{-1} \vec{\mathbf{K}} \mathbf{K}_{\text{H5}} \\ a_0 \mathbf{K}_{\text{B2}} \mathbf{K}_{\text{B3}}^{-1} \vec{\mathbf{K}} \mathbf{K}_{\text{H5}} - a_0 \mathbf{v}_0 \vec{\mathbf{L}} \Lambda_{\text{к}} \mathbf{K}_{\text{H5}} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} -a_0 v_0 \bar{L} \Lambda_K K_{B5} - a_0 \bar{L} \bar{I}_{B(0,Q)} K_{B3}^{-1} K_{B4} \\ K_{B1} + a_0 K_{B2} K_{B3}^{-1} K_{B4} - a_0 v_0 \bar{L} \Lambda_K K_{B5} \end{array} \right],$$

обчислені за $(i-1)$ -м наближенням невідомих;

На i -й ітерації розв'язування методом Ньютона нелінійної САР (24), (25), (22), (9), (8), (10), (23) необхідно виконати такі дії:

- за $(i-1)$ -м наближенням невідомих обчислити значення $A^{(i-1)}$ матриці A та значення $\bar{f}^{(i-1)}$ вектора \bar{f} нев'язок;

- розв'язати лінійну САР (27) числовим методом відносно вектора $\Delta \bar{X}_{\text{перв}}^{(i)}$;
- обчислити i -те наближення вектора первинних невідомих за формулою

$$\bar{X}_{\text{перв}}^{(i)} = \bar{X}_{\text{перв}}^{(i-1)} + \Delta \bar{X}_{\text{перв}}^{(i)};$$

- обчислити i -те наближення вторинних невідомих за формулами та залежностями (22), (9), (8), (10), (23).

За опрацьованою математичною моделлю складено комп'ютерну програму. На рис. 2–5 показані результати розрахунку електромагнітного перехідного процесу у стрижнях паза двокліткового ротора при $E_{\text{ст}} = 5 \sin(100\pi t)$ В/м, $\rho_H = 0,022$ Ом·мм, $\rho_B = 0,074$ Ом·мм. Конфігурація паза аналогічна до зображеної на рис. 1, а розміри паза такі: висота нижнього стрижня – 40 мм, діаметр верхнього та нижнього півкіл нижнього стрижня – 20 та 9 мм відповідно, висота верхнього стрижня – 20 мм, висота перемички – 5 мм, висота шліца – 1 мм, ширина перемички та шліца – 1 мм.

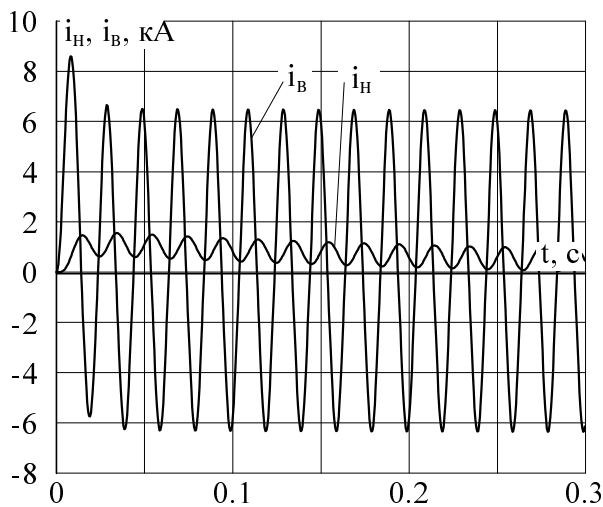


Рис. 2. Перебіги струмів i_H та i_B

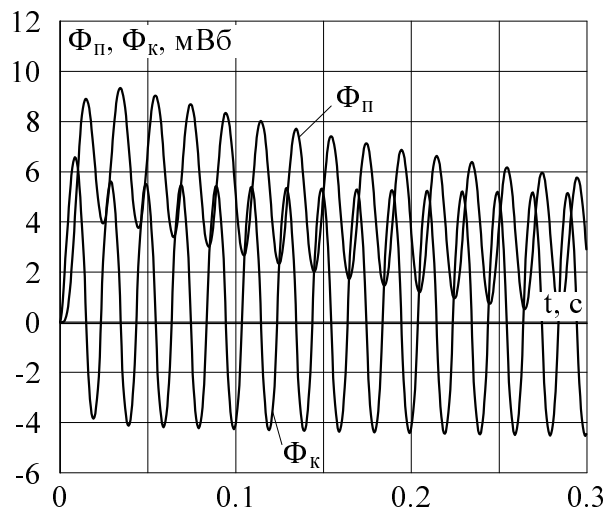


Рис. 3. Перебіги потоків Φ_{π} та Φ_k

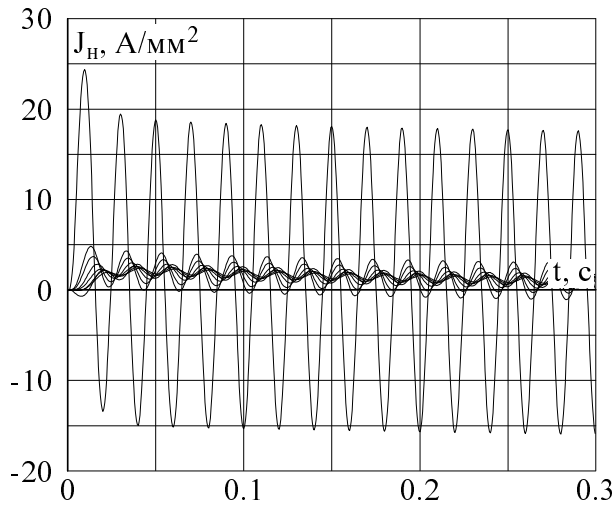


Рис. 4. Перебіги дискрет густини струму у нижньому стрижні

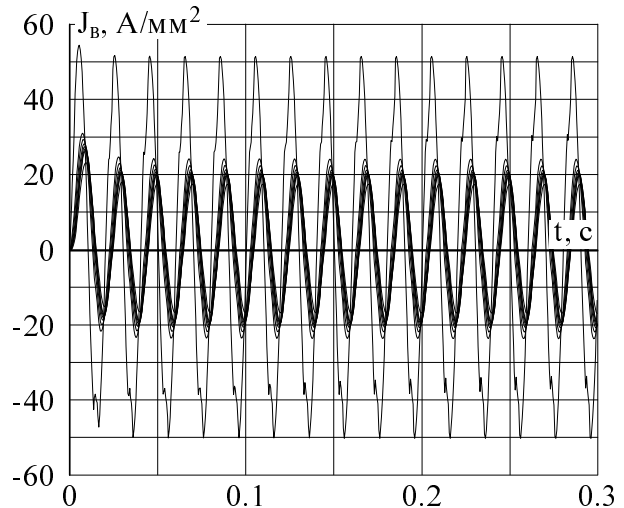


Рис. 5. Перебіги дискрет густини струму у верхньому стрижні

Опрацьована математична модель придатна для розрахунків перехідних процесів з урахуванням витіснення струму та насичення шляхів потоків розсіяння у стрижнях паза двокліткового ротора при довільній конфігурації поперечного перерізу стрижнів і її можна використати для оптимізації форми поперечного перерізу та геометрії стрижнів.

1. Домбровский В. В., Зайчик В. М. Асинхронные машины: Теория, расчет, элементы проектирования. – Л., 1990. – 368 с. 2. Фильц Р. В. Векторная базисная функция Тейлора и ее применение в задачах электродинамики // Изв. вузов. Электромеханика. – 1989. – № 9. – С. 5–10. 3. Фильц Р. В. Инвариантные интерполяционные формулы для производных высших порядков функций векторного аргумента // Математические методы и физико-механические поля. – 1987. – № 25. – С. 22–25. 4. Фильц Р. В., Макаручук О. В. Математичне моделювання електромагнітних процесів у стрижні короткозамкненої обмотки // Технічна електродинаміка. – 1995. – № 1. – С. 3–8. 5. Цуканов В. И., Геогиади В. Х. Расчет на ЭВМ коэффициентов вытеснения тока в стержне ротора электрических машин // Электротехника. – 1982. – № 12. – С. 52–55. 6. Чуа Л. О., Пен-Мин Лин. Машинный анализ электронных схем. – М., 1980. – 638 с.