

УДК 621.313.333

І.Р. Гавдьо, Л.Й. Глухівський, В.С. Маляр

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедри ЕМА, ТЗЕ

**РОЗРАХУНОК УСТАЛЕНИХ РЕЖИМІВ  
І СТАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК АСИНХРОННИХ ДВИГУНІВ  
З ЕКРАНОВАНИМИ ПОЛЮСАМИ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ГАРМОНІЧНИМ МЕТОДОМ**

© Гавдьо І.Р., Глухівський Л.Й., Маляр В.С., 2002

**Розглянуто особливості застосування диференціального гармонічного методу до розрахунку усталених режимів асинхронних двигунів з екранованими полюсами. Показано способи розв’язання задач в умовах заданого постійного ковзання та заданого постійного моменту. Електромагнітні параметри обчислюються на основі представлення магнітної системи двигуна розгалуженою заступною схемою.**

**Peculiarities of using the differential harmonic method to calculation steady-states in shaded-pole induction motor have been considered. The way of problem solving when the slide or torque are given is shown. The electromagnetic parameters are calculated on the base of ramified equivalent circuit of motor magnetic circuit.**

Однофазні асинхронні двигуни з екранованими полюсами (АДЕП) завдяки простоті конструкції і надійності в експлуатації знаходять широке застосування в електроприводах невеликої потужності, які не вимагають великих пускових моментів. Наявність електричної та магнітної несиметрії і значного насичення окремих ділянок магнітопроводу зумовлює складність теоретичного дослідження АДЕП. У той же час розроблена кілька десятків років тому методика їх проектування [1], в основі якої є теорія двох обертових полів та метод симетричних складових, застосовується і сьогодні [2]. Проте вона не задовольняє сучасні вимоги. Масовий випуск АДЕП вимагає створення уточнених математичних моделей розрахунку, які б адекватно відображали реальні процеси і служили основою для оптимального їх проектування.

Запропонована в [3] розгалужена заступна схема магнітопроводу дає змогу з високою точністю враховувати насичення різних ділянок магнітопроводу АДЕП і на підставі її розрахунку визначати потокозчеплення та диференціальні індуктивності контурів. Як показано в [4], процеси в АДЕП доцільно розглядати у взаємно ортогональних осях  $d$ ,  $q$ , які жорстко зв’язані зі статором. Обмотка короткозамкненого ротора при цьому еквівалентується двома синусно розподіленими обмотками, а обмотки статора не перетворюються.

У зв’язку з електричною та магнітною несиметрією, яка наявна в АДЕП, в усталеному режимі процеси є несинусоїдними періодичними. Вони описуються нелінійною системою диференціальних рівнянь (ДР), якій відповідає в стаціонарному режимі періодичний розв’язок. Отримати останній можна числовим інтегруванням вихідної системи ДР до усталення процесу, проте такий спосіб розв’язування задачі неефективний з багатьох міркувань. Зокрема, він мало придатний до розв’язання оптимізаційних задач. Крім того, слід відзначити, що для забезпечення достатньої точності розрахунків необхідно представляти магнітопровід складною розгалуженою заступною схемою, яка дає змогу

обчислювати електромагнітні параметри з урахуванням насичення різних ділянок магнітопроводу. Високий порядок системи рівнянь, яка описує магнітопровід АДЕП, значно збільшує обсяг обчислень під час числового інтегрування системи ДР, оскільки на кожному кроці вона розв'язується ітераційним методом.

Ефективнішим шляхом визначення періодичного розв'язку є розгляд задачі його пошуку як крайової, а одним із методів її розв'язання є розроблений в [5] диференціальний гармонічний метод (ДГМ), за допомогою якого розв'язана низка важливих для практики задач. У статті розглядається застосування вказаного методу до розрахунку усталених режимів АДЕП. Тут можливі дві задачі: розрахунок режиму роботи при заданому постійному ковзанні і при заданому постійному моменті на валу двигуна. Спочатку розглянемо першу з них.

Електромагнітні процеси в АДЕП, який працює з ковзанням  $s$ , описуються системою ДР, яка з урахуванням перетворення короткозамкненої обмотки ротора до осей  $d$ ,  $q$  у векторній формі має вигляд

$$\frac{d\vec{\Psi}}{dt} + \Omega\vec{\Psi} + R\vec{I} = \vec{U}, \quad (1)$$

де  $\vec{\Psi} = (\psi_f, \psi_k, \psi_d, \psi_q)^T$ ,  $\vec{I} = (i_f, i_k, i_d, i_q)^T$  – вектори потокозчеплень та струмів обмотки збудження, короткозамкненого витка розщепленого полюса та еквівалентних контурів  $d$  і  $q$  ротора (тут і надалі верхній індекс “ $T$ ” означає транспонування);  $R = \text{diag}(r_f, r_k, r_d, r_q)$  – діагональна матриця активних опорів контурів АДЕП;  $\vec{U} = (U_{fm} \sin \omega_1 t, 0, 0, 0)^T$  – вектор прикладених до контурів напруг, в якому  $U_{fm}$  – амплітуда, а  $\omega_1$  – циклічна частота напруги живлення обмотки збудження;

$$\Omega = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & -\omega_2 \\ \hline & & \omega_2 & \\ \hline \end{array}$$

$\omega_2 = (1-s)\omega_1$  – кутова швидкість обертання ротора, виражена в електричних радіанах за секунду.

В усталеному режимі вектори  $\vec{\Psi}, \vec{I}$ , які входять до ДР (1), є періодичними функціями часу, а враховуючи, що  $\vec{\Psi} = \vec{\Psi}(\vec{I})$ , розв'язком ДР (1) буде  $T$ -періодична залежність  $\vec{I}(t) = \vec{I}(t+T)$ . Для її знаходження відповідно до [5] кожному компоненту векторів  $\vec{\Psi}, \vec{I}$  апроксимуємо усіченим тригонометричним рядом вигляду

$$x(t) = \sum_{v=1,3,\dots}^m (x_c \cos v\omega_1 t + x_s \sin v\omega_1 t),$$

який з урахуванням симетрії кривих складається з непарних гармонік ( $x = \psi, i$ ). У результаті замість нелінійного ДР (1) будемо розглядати так зване [5] його гармонічне відображення

$$D_r \vec{\Psi}_r + R_r \vec{I}_r = \vec{U}_r, \quad (2)$$

де  $D_\Gamma = \text{diag}(D_1, \dots, D_v, \dots, D_m)$  – блоково-діагональна матриця, в якій

$$D_v = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & v\omega_1 & & & & & & \\ \hline -v\omega_1 & & & & & & & \\ \hline & & & v\omega_1 & & & & \\ \hline & & -v\omega_1 & & & & & \\ \hline & & & & & v\omega_1 & -\omega_2 & \\ \hline & & & & -v\omega_1 & & & -\omega_2 \\ \hline & & & & \omega_2 & & & v\omega_1 \\ \hline & & & & & \omega_2 & -v\omega_1 & \\ \hline \end{array}$$

$\bar{\Psi}_\Gamma = (\bar{\Psi}_1, \dots, \bar{\Psi}_v, \dots, \bar{\Psi}_m)^\Gamma$  – вектор, складений з векторів амплітуд косинусних і синусних складових гармонік вектора  $\bar{\Psi}$ , в якому

$$\bar{\Psi}_v = (\Psi_{fcv}, \Psi_{fsv}, \Psi_{kcv}, \Psi_{ksv}, \Psi_{dcv}, \Psi_{dsv}, \Psi_{qcv}, \Psi_{qsv})^\Gamma;$$

$\bar{I}_\Gamma = (\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_v, \dots, \bar{I}_m)^\Gamma$  – вектор, складений з векторів амплітуд косинусних і синусних складових гармонік вектора  $\bar{I}$ , в якому

$$\bar{I}_v = (I_{fcv}, I_{fsv}, I_{kcv}, I_{ksv}, I_{dcv}, I_{dsv}, I_{qcv}, I_{qsv})^\Gamma;$$

$R_\Gamma = \text{diag}(R, \dots, R)$  – блоково-діагональна матриця, яка складається з  $m$  однакових блоків  $R = \text{diag}(r_f, r_f, r_k, r_k, r_d, r_d, r_q, r_q)$ ;  $\bar{U}_\Gamma = (0, U_{fm}, 0, \dots, 0)^\Gamma$  –  $(4 \times v)$ -мірний вектор косинусних і синусних складових амплітуд прикладених напруг.

До системи (2) алгебричних рівнянь входять два невідомі вектори –  $\bar{\Psi}_\Gamma$  та  $\bar{I}_\Gamma$ , які внаслідок насичення магнітопроводу АДЕП зв'язані нелінійною залежністю  $\bar{\Psi}_\Gamma = \bar{\Psi}_\Gamma(\bar{I}_\Gamma)$ . Отже, система (2), як і вихідна система (1) ДР, нелінійна. Ефективним методом розв'язання таких систем є ітераційний метод Ньютона. Для отримання початкового наближення кореня рівняння (2) – вектора  $\bar{I}_\Gamma$ , яке б забезпечувало збіжність ітераційного процесу, домножимо вектор  $\bar{U}_\Gamma$  збурюючої дії на  $\varepsilon$  та продиференціюємо отриману параметризовану систему за цим аргументом. У результаті отримаємо

$$(D_\Gamma S_{\Psi_\Gamma} + R_\Gamma) \frac{d\bar{I}_\Gamma}{d\varepsilon} = \bar{U}_\Gamma, \quad (3)$$

де  $S_{\Psi_\Gamma} = d\bar{\Psi}_\Gamma / d\bar{I}_\Gamma$  – матриця диференціальних гармонічних параметрів [5].

Інтегруючи систему (3) ДР одним із числових методів в межах від  $\varepsilon = 0$  до  $\varepsilon = 1$  при нульових початкових умовах, отримаємо наближене значення вектора  $\bar{I}_\Gamma$ , яке уточнюємо ітераційним методом Ньютона, згідно з яким  $(l+1)$ -ше наближення визначаємо за формулами

$$\bar{I}_{\Gamma(l+1)}^* = \bar{I}_{\Gamma(l)}^* - \Delta \bar{I}_{\Gamma(l)}^*, \quad (4a)$$

$$(D_\Gamma S_{\Psi_\Gamma(l)} + R_\Gamma) \Delta \bar{I}_{\Gamma(l)} = \bar{H}_{(l)}, \quad (4b)$$

де  $\bar{H}_{(l)}$  – вектор нев'язок системи (2).

Значення матриці  $S_{\Psi_r}$  необхідно обчислювати на кожному кроці числового інтегрування системи (3). ДР та ітераційного уточнення методом Ньютона. Для цього необхідно на часовому періоді  $T$  нанести сітку вузлів і здійснити перехід від вектора  $\bar{I}_r$  амплітуд до вектора  $\bar{I}_B$  вузлових значень струмів контурів. Використовуючи останній, відповідно до математичної моделі АДЕП необхідно обчислити для кожного з вузлів значення поточозчеплень контурів та матриць диференціальних індуктивностей, з яких формуємо повні матриці сіткових диференціальних параметрів. Останні є блоково-діагональні, оскільки зв'язок між вузловими векторами поточозчеплень та струмів існує лише в одних і тих же вузлах. Постійні матриці та формули, які дають змогу перейти від матриць сіткових диференціальних параметрів до матриць гармонічних диференціальних параметрів, наведені в [5].

Виконавши розрахунки для сукупності значень ковзання від  $s = 1$  до  $s = 0$ , отримаємо механічну характеристику АДЕП з урахуванням насичення його магнітопроводу.

Розглянемо особливості розрахунку диференціальним гармонічним методом стаціонарного режиму АДЕП в умовах заданого постійного моменту  $M_B$  на валу. Для цього рівняння (1) доповнимо рівнянням руху ротора

$$\frac{ds}{dt} + c_1(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) - c_2 M_B = 0, \quad (5)$$

де  $c_1 = 3p^2/2\omega_1 j$ ;  $c_2 = p/\omega_1 j$ ;  $p$  – кількість пар полюсів;  $j$  – момент інерції.

Повну систему ДР електромеханічної рівноваги, яка складається з рівнянь (1) та (5), можна представити одним векторним рівнянням

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + \bar{z} = 0, \quad (6)$$

де  $\bar{y} = (\bar{\Psi}, s)^T = \bar{y}(\bar{x}, t)$ ;  $\bar{x} = (\bar{i}, s)$ ;  $\bar{z} = \bar{z}(\bar{y}, \bar{x}, t)$

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_f i_f - U_{fm} \sin \omega_1 t \\ r_k i_k \\ -(1-s) \omega_1 \Psi_q + r i_d \\ (1-s) \omega_1 \Psi_d + r i_q \\ c_1 (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) - c_2 M_B \end{bmatrix}$$

Рівняння (6) має додаткову невідому – ковзання  $s$  ротора. Представимо його усіченим тригонометричним рядом

$$s = s_0 + \sum_{v=1}^m (s_{cv} \cos v\omega_1 t + s_{sv} \sin v\omega_1 t), \quad (7)$$

з амплітуд гармонік якого утворимо вектор  $\bar{S}_r$ . З урахуванням (7) гармонічним відображенням рівняння (6) буде нелінійна система скінченних рівнянь

$$\omega_1 D_r \bar{Y}_r + \bar{Z}_r = 0; \quad \bar{C}_s \bar{X}_r - S_0 = 0, \quad (8a, б)$$

де  $\bar{Y}_r = (\bar{\Psi}_r, \bar{S}_r)^T$ ;  $\bar{Z}_r = (\bar{Z}_{1r}, \dots, \bar{Z}_{5r})$ ;  $\bar{C}_s = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  – вектор-рядок, в якому одиниця знаходиться на тому місці, де у векторі  $\bar{X}_r$  знаходиться елемент  $s_0$  (перша компонента вектора  $\bar{S}_r$ ).

Запишемо систему (8) у вигляді одного векторного рівняння

$$\bar{Q}(\bar{X}_a) = 0, \quad (9)$$

де  $\bar{X}_a = (\bar{X}_r, s_0)$ .

Його розв'язок знаходимо згідно з таким алгоритмом.

Задаємось довільним значенням вектора  $\bar{X}_a^{(0)}$  і, підставивши його в рівняння (9), обчислюємо вектор нев'язок

$$\bar{H}^{(0)} = \bar{Q}(\bar{X}_a^{(0)})$$

Утворимо нову систему скінченних рівнянь у вигляді

$$\bar{Q}(\bar{X}_a) = (1 - \varepsilon)\bar{H}^{(0)}, \quad (10)$$

та продиференціюємо його по  $\varepsilon$ .

Зміні параметра  $\varepsilon$  від нуля до одиниці відповідає зменшення нев'язок від  $\bar{H}^{(0)}$  до нуля. При цьому вектор  $\bar{X}_a$  є функцією параметра  $\varepsilon$ . Отже, наближене значення розв'язку  $\bar{X}_a$  можна знайти, проінтегрувавши по  $\varepsilon$  рівняння

$$W_a \frac{d\bar{X}_a}{d\varepsilon} = -\bar{H}^{(0)}, \quad (10)$$

в якому

$$W_a = \begin{array}{|c|c|} \hline \omega_l D_r S_{Y_r} + S_{Z_r} & \omega_l D_r \bar{Y}_r \\ \hline \bar{C}_s & -1 \\ \hline \end{array}$$

Отримане при  $\varepsilon = 1$  значення вектора  $\bar{X}_a$ , як правило, знаходиться в околі збіжності ітераційного процесу, який здійснюємо за методом Ньютона.

Проведені розрахунки усталених режимів для АДЕП з номінальними значеннями  $U_n = 220$  В;  $P_{2n} = 1,6$  Вт. Встановлено, що достатньо враховувати 9-ту гармоніку невідомих величин та розбивати півперіод на 20 вузлів. На рис. 1–2 зображені часові залежності струмів на періоді при  $s = 0,2$ , а графік зміни електромагнітного моменту при тому ж ковзанні показаний на рис. 3. Розрахункова статична механічна характеристика показана на рис. 4.

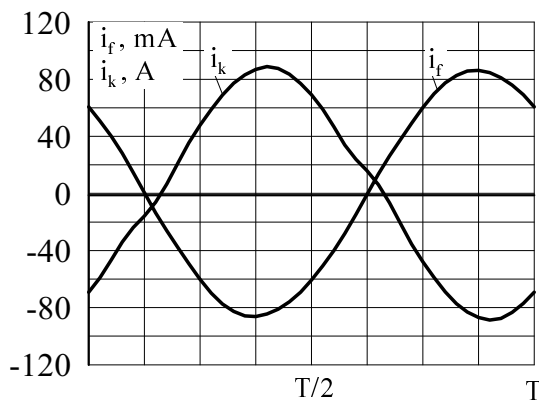


Рис. 1. Часові залежності струмів  $i_f$  та  $i_k$

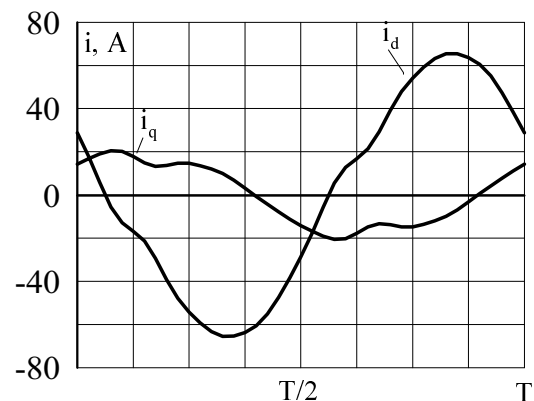


Рис. 2. Часові залежності струмів  $i_d$  та  $i_q$

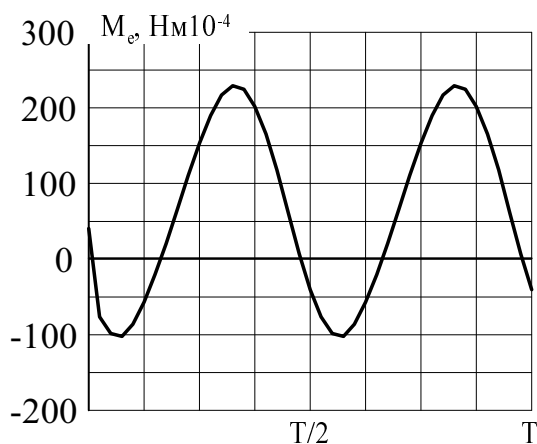


Рис. 3. Графік зміни електромагнітного моменту

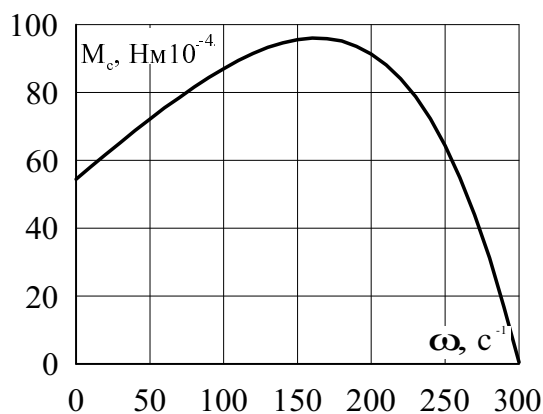


Рис. 4. Статична і механічна характеристики

Застосування ДГМ дає змогу здійснювати оптимізаційні розрахунки під час проектування АДЕП, досліджуючи вплив на його характеристики будь-яких параметрів, наприклад, розмірів і розташування короткозамкненого витка, магнітного шунта, нерівномірність повітряного проміжку тощо.

1. Ермолин Н.П. *Электрические машины малой мощности*. – М., 1967. – 503 с.
2. Юферов Ф.М. *Электрические машины автоматических устройств: Учеб. для вузов*. – М., 1988. – 479 с.
3. Глухівський Л.Й., Гречин Д.П., Гавдьо І.Р. *Числовий метод розрахунку магнітного поля і диференціальних параметрів асинхронного двигуна з екранованими полюсами при насиченні магнітопроводу*. – Львів, 1996. – Деп. в ДНТБ України 12.08.96, № 1706 – Ук.96.
4. Гавдьо І.Р. *Розрахунок перехідних процесів в асинхронних двигунах з екранованими полюсами* // *Вісн. НУ "Львівська політехніка"*. – 2001. – № 418. – С. 34–38.
5. Глухівский Л.И. *Расчет периодических процессов электротехнических устройств*. – Львов, 1984. – 162 с.