УДК 621.391.26

Є. Кротюков
Одеський національний політехнічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АДАПТИВНИХ ПОСЛІДОВНИХ ПРОЦЕДУР

© Кротюков Є., 2006

Досліджено ефективність регуляризованої, модифікованої й усіченої адаптивних послідовних (вальдовських) процедур.

Research of efficiency of the regularized, modified and truncated adaptive consecutive Wald's procedures.

З огляду на відсутність апріорної інформації про сигнально-завадову обстановку в реальних умовах становить інтерес розвиток теорії статистичного синтезу в напрямку розробки методів подолання апріорної невизначеності.

Можливо виділити п'ять основних підходів до подолання апріорної невизначеності [1]: пошук незміщених рівномірно наймогутніших вирішальних правил; непараметричний підхід, заснований на знакових і рангових алгоритмах; квазінепараметричний метод, що використовує робастні (стійкі) алгоритми; адаптивний підхід з використанням навчальних вибірок; асимптотично оптимальні алгоритми. З перерахованих вище підходів підвищений інтерес становить застосування адаптивних алгоритмів обробки сигналів [2].

Відповідно до адаптивного байєсового підходу [2] замінимо у вирішальній статистиці невідому коваріаційну матрицю її оцінкою максимальної правдоподібності

$$\hat{l}_n(X_n) = S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}X_n - 0,5S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}S_n. \qquad (1)$$

При формуванні максимально правдоподібної оцінки $\hat{R}_n$ по m навчальних вибірках вхідної послідовності $X_{n\,i}$, де $i=\overline{1,m}$ й $m<n$ оцінка $\hat{R}_n$ вироджена і задача визначення $\hat{l}_n(X_n)$ некоректна [3]. Тому в умовах послідовного виявлення, коли тривалість процедури n заздалегідь не фіксується, використання $\hat{R}_n$ може призвести до виродженості і, як наслідок, до істотного збільшення помилок виявлення і зупинці процедури на кроці $n=m$.

Одним з методів подолання виродженості оцінок коваріаційних матриць є їх регуляризація [4]

$$\hat{R}_n^p = \hat{R}_n + \alpha^2 I_n,$$

де $\alpha^2>0$ – параметр регуляризації.

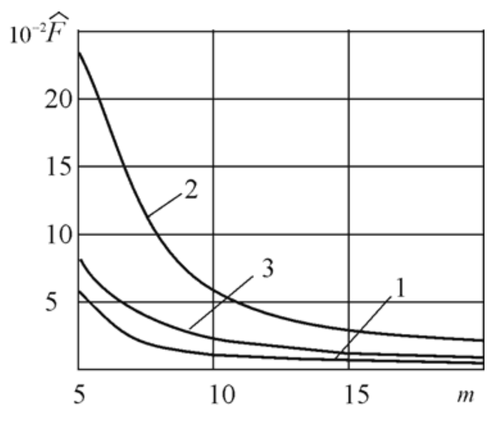
Відповідно до викладеного, розглянута адаптивна послідовна (вальдовська) процедура припускає формування на кожнім n-му кроці вирішальної статистики

$$\hat{l}_n(X_n) = S_n^{*T}\left(\hat{R}_n^p\right)^{-1}X_n - 0,5S_n^{*T}\left(\hat{R}_n^p\right)^{-1}S_n. \qquad (2)$$

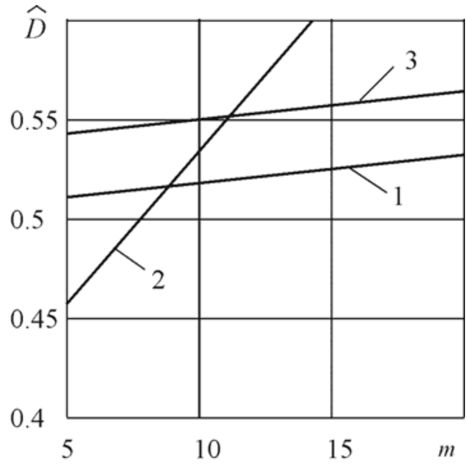
і порівняння її з порогами Вальда $\ln D/F$ і $\ln\left[(1-D)/(1-F)\right]$.

Методом статистичного моделювання досліджені залежності ймовірностей помилкової тривоги $\hat{F}(m)$ (рис.1*а*) і правильного виявлення $\hat{D}(m)$ (рис.1*б*), реалізованих регуляризованою адаптивною послідовною процедурою, від обсягу навчальної вибірки m при виявленні сигналу $S_n^T=\left[1-1\ \ 1\ldots 1\right]$ на тлі некорельованних (крива 1) і корельованних завад, коефіцієнт кореляції $r=0,95$, з гауссовою (крива 2) і експонентною (крива 3) кореляційними функціями, відношенні завада/шум $50\ \partial Б$ і очікуваному вхідному відношенні сигнал/завада, що відповідає тривалості процедури Неймана-Пірсона $N=6$ для розрахункових імовірностей $F=10^{-2}$, $D=0,5$.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua



а



б

Рис. 1. Залежності ймовірностей помилкової тривоги $\hat{F}(m)$ *(а)*

і правильного виявлення $\hat{D}(m)$ *(б) від обсягу навчальної вибірки* m

З графіків видно, що при малих m, особливо в умовах завад з гауссовою кореляційною функцією, адаптивна послідовна процедура характеризується істотним збільшенням ймовірності помилкової тривоги $\hat{F}(m)$ і зменшенням ймовірності правильного виявлення $\hat{D}(m)$ порівняно з випадком відомих параметрів завад. Так, при $m=5$ в завадах з гауссовою кореляційною функцією $\overline{F}(m)$ перевищує потенційне значення в 40 разів, у експоненціально корельованних завадах у 10 разів і в некорельованних завадах у 8 разів.

З метою усунення цього недоліку розглянемо модифіковану адаптивну послідовну (вальдовську) процедуру, ймовірності характеристики вирішальний статистик $\bar{l}_n(X_n)$ якої, зокрема, середнє і дисперсія, за відсутності корисного сигналу збігаються або близькі до відповідних характеристик вирішальних статистик $l_n(X_n)$ у відомій завадовій обстановці. Для побудови модифікованої адаптивної процедури знайдемо середнє значення і дисперсію вирішальних статистик на кожнім n-му кроці, що залежать від розподілу вхідної вибірки X_n й оцінки коваріаційної матриці $\hat{R}_n$. Звідси середнє значення статистики $\bar{l}_n\left(X_n,\hat{R}_n/H_0\right)$ дорівнює

$$\bar{l}_n(H_0)=E_{\hat{R}_n,X_n}\left\{l_n\left(X_n,\hat{R}_n/H_0\right)\right\},$$

де $E\{\,.\,\}$ – символ усереднення.

У випадку незалежності X_n і $\hat{R}_n$ після усереднення по X_n одержимо

$$\bar{l}_n(H_0)=E_{\hat{R}_n}\left\{E_{X_n}\left\{l_n\left(X_n,\hat{R}_n/H_0\right)\right\}\right\}=-\frac{1}{2}E_{\hat{R}_n}\left\{S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}S_n\right\}.$$

Використовуючи методику, викладену в [5], можна показати, що

$$\bar{l}_n(H_0)=-\frac{1}{2}S_n^{*T}R_n^{-1}S_n\frac{m}{m-n}. \qquad (3)$$

Шукана дисперсія вирішальної статистики $l_n\left(X_n,\hat{R}_n/H_0\right)$ визначається співвідношенням

$$\sigma_{l_n}^2(H_0)=E_{\hat{R}_n,X_n}\left\{\left|l_n\left(X_n,\hat{R}_n/H_0\right)\right|^2\right\}-\left[E_{\hat{R}_n,X_n}\left\{l_n\left(X_n,\hat{R}_n/H_0\right)\right\}\right]^2,$$

яке при незалежних X_n і $\hat{R}_n$ перетвориться до вигляду

$$\sigma_{l_n}^2(H_0)=E_{\hat{R}_n}\left\{S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}R_n\hat{R}_n^{-1}S_n\right\}+0,25E_{\hat{R}_n}\left\{S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}S_n\right\}-0,25\left[E_{\hat{R}_n}\left\{S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}S_n\right\}\right]^2.$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Обчисливши середнє значення кожного доданка

$$E_{\hat{R}_n}\left\{S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}R_n\hat{R}_n^{-1}S_n\right\}=S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}S_n\frac{m^3}{(m-n-1)(m-n)(m-n+1)};$$

$$E_{\hat{R}_n}\left\{\left[S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}S_n\right]^2\right\}=\left(S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}S_n\right)^2\frac{m^2}{(m-n-1)(m-n)};$$

$$\left[E_{\hat{R}_n}\left\{S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}S_n\right\}\right]^2=\left(S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}S_n\right)^2\frac{m^2}{(m-n)^2},$$

приходимо до такого вираження для дисперсії вирішальних статистик:

$$\sigma_{l_n}^2(H_0)=S_n^{*T}R_n^{-1}S_n\frac{m^3}{(m-n-1)(m-n)(m-n+1)}+\frac{1}{4}\left(S_n^{*T}R_n^{-1}S_n\right)^2\frac{m^2}{(m-n)^2(m-n-1)}. \tag{4}$$

Легко показати, що аналогічні характеристики для відомої завадової обстановки задовольняють співвідношення

$$\overline{l_n}(H_0)=-\frac{1}{2}S_n^{*T}R_n^{-1}S_n. \tag{5}$$

$$\sigma_{l_n}^2(H_0)=S_n^{*T}R_n^{-1}S_n. \tag{6}$$

Порівняння (3), (5) і (4), (6) дає змогу зробити висновок про те, що модифікація вирішальної статистики (2) у вигляді

$$l_n^M\left(X_n,\hat{R}_n/H_\theta\right)=K_1(m,n)K_2(m,n)S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}X_n-\frac{1}{2}K_1^2(m,n)S_n^{*T}\hat{R}_n^{-1}S_n,$$

де $K_1(m,n)=\sqrt{(m-n)/m}$; $K_2(m,n)=\sqrt{(m-n-1)(m-n+1)/m^2}$, дає змогу забезпечити рівність середніх значень і близькість дисперсій вирішальних статистик в умовах відомої і невідомої завадової обстановки. При цьому дисперсія $l_n^M\left(X_n,\hat{R}_n/H_\theta\right)$ дорівнює

$$\sigma_{l_n^N}^2(H_\theta)=S_n^{*T}R_n^{-1}S_n+0,25\left(S_n^{*T}R_n^{-1}S_n\right)^2\left[(m-n)/(m-n-1)-1\right].$$

Для усунення ефекту виродженості оцінок коваріаційних матриць використовуємо регуляризовані оцінки, а для забезпечення визначеності модифікуючих множників на кроках процедури $n>m-1$ і $n>m-2$ зафіксуємо їхні значення $K_1(m,m-1)$ і $K_2(m,m-2)$

$$l_n^M\left(X_n,\hat{R}_n^p/H_\theta\right)=K_1(m,n)K_2(m,n)S_n^{*T}\left(\hat{R}_n^p\right)^{-1}X_n-\frac{1}{2}K_1^2(m,n)S_n^{*T}\left(\hat{R}_n^p\right)^{-1}S_n \tag{7}$$

де

$$K_1(m,n)=\begin{cases}\sqrt{(m-n)/m}, & при\quad n<m;\\ \sqrt{1/m}, & при\quad n\ge m,\end{cases}\qquad K_2(m,n)=\begin{cases}\sqrt{(m-n-1)(m-n+1)}/m, & при\quad n<m-1;\\ \sqrt{3/m}, & при\quad n\ge m-1,\end{cases}$$

Скориставшись (7), для обсягу навчальної вибірки $m=5$ розраховані реалізовані модифікованою адаптивною послідовною процедурою ймовірності помилкової тривоги $\hat{F}$ і правильного виявлення $\hat{D}$ (таблиця). Там само зображені $\hat{F}$ і $\hat{D}$ для регуляризованої адаптивної послідовної процедури.

	некорельована завад $r=0$		експонентна кореляційна функція $r=0.95$		гаусовська кореляційна функція $r=0.95$	
	регулярізована	модифікована	регулярізована	модифікована	регулярізована	модифікована
$\hat{F}$	$5.6\cdot10^{-2}$	$1.1\cdot10^{-2}$	$8.3\cdot10^{-2}$	$2.1\cdot10^{-2}$	$24\cdot10^{-2}$	$3.7\cdot10^{-2}$
$\hat{D}$	0.52	0.22	0.54	0.25	0.45	0.18

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Аналіз табличних даних показує, що модифікація вирішальної статистики призводить до істотного зменшення ймовірності помилкової тривоги $\hat{F}$ порівняно з регуляризованою оцінкою (у 4–6 разів) і значення реалізованої $\hat{F}$ вже при обсязі навчальної вибірки $m=5$ незначно відрізняється від розрахункового F. З таблиці також видно, що відсутність апріорних відомостей про кореляційну матрицю завади спричиняє зменшення ймовірності правильного виявлення $\hat{D}$, що відповідає втратам у граничному сигналі 2 – 3 дБ.

Основною причиною погіршення статистичних характеристик модифікованої адаптивної послідовної процедури є зміна розподілів вирішальних статистик, особливо істотне на кроках процедури n, що перевищують обсяг навчальної вибірки m, на яких різко зростає $l_n\left(X_n, \hat{R}_n^p\right)$. При цьому "заморожування" модифікуючих множників $K_1(m,n)$, $K_2(m,n)$ для $n \geq m-1$ не призводить до компенсації небажаних збільшень середніх значень і дисперсій вирішальних статистик.

Часткове усунення цих недоліків може бути досягнуте за рахунок застосування усіченої адаптивної послідовної процедури, крок усікання якої n_0 повинний вибиратися з умови $n_0 > N+1$. Аналіз (6) показує також, що вибір обсягу навчальної вибірки $m > n+1$ дозволяє виключити невизначеність модифікуючих множників $K_1(m,n)$ $K_2(m,n)$. Отже, використання усіченої адаптивної послідовної процедури з обсягом навчальної вибірки $m > n_0 + 1 > N+2$ усуває основну причину різкого погіршення ефективності адаптивних послідовних виявлячів. Наведене підтверджується результатами розрахунків для $N=6$, $n_0=7$ і $m=9$, які показали, що фактично реалізована ймовірність помилкової тривоги $\hat{F}$ перевищує розрахункове значення F не більше ніж у 2 рази, а ймовірність правильного виявлення $\hat{D}$ зменшується на (10 – 30)% в умовах завад з довільною кореляційною функцією, що відповідає втратам у граничному сигналі не більше 3 дБ.

У роботі показано, що застосування регуляризованих оцінок коваріаційних матриць загального вигляду в адаптивних послідовних (вальдовських) процедурах призводить до істотного зростання ймовірності помилкової тривоги і зменшенню ймовірності правильного виявлення. Запропоновано модифіковану адаптивну послідовну процедуру, яка забезпечує рівність середніх і близькість дисперсій вирішальних статистик в умовах відомої і невідомої завадової обстановки, що дає змогу одержати ймовірності помилкової тривоги і правильного виявлення, що незначно відрізняються від розрахункових уже при обсягах вибірки, порівняних із тривалістю процедури Неймана-Пірсона. Дослідження усіченого модифікованого виявляча, обсяг навчальної вибірки і крок усікання якого перевищують тривалість процедури Неймана-Пірсона, показали можливість реалізації ймовірності помилкової тривоги, що відрізняється від розрахункової не більше ніж у 2 рази, а ймовірність правильного виявлення зменшується на 10 – 30 %, що відповідає втратам у граничному сигналі не більше 3 дб.

1. Теория обнаружения сигналов / П.С. Акимов, П.А. Бакут, В.А. Богданович и др. / Под ред. П.А. Бакута. – М.: Радио и связь, 1984. – 440с. 2. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. – М.: Сов.радио, 1977. – 432с. 3. Рао С. Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука, 1968. – 548с. 4. Абрамович Ю.И. Регуляризованный метод адаптивной оптмизации фильтров по критерию максимального отношения сигнал/помеха // Радиотехника и электроника. – 1981. – Т.26, №3. – с543 – 551. 5. Reed I., Mallett Y., Brennan L. Rapid convergence rate in adaptive arrays // IEEE Trans. AES-10. – 1974, №6. – P.853 – 863.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua