УДК 539.3

О.М. Римар, Б.С.Штангрет
Львівський інститут пожежної безпеки

ДОТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО КОНТАКТУ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ

Одержано формули для визначення дотичних напружень у загальному випадку еліптичної площадки контакту точного розв’язку задачі Герца.

Tangential strain has been determined to the general case for an elliptical zone contact precise solution Hertzian problem.

Оптимізацію геометричних параметрів деталей машин та споруд, які працюють в умовах контактного навантаження, можна успішно здійснити, якщо відомі всі параметри напруженого стану. У роботі [1] запропоновано уточнене розв’язання задачі Герца, система переміщень якого задовольняє граничні умови на безмежності та всі необхідні умови теорії пружності. Цей розв’язок, на відміну від відомого, показує наявність дотичних напружень τ_{xz}, τ_{yz} для точок площадки контакту.

Формули для визначення дотичних напружень цього розв’язку мають загальний вигляд [2]:

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{2\pi} xy \left\{ n_{\sigma 2} \frac{z\sqrt{t}}{\sqrt{(a^2+t)^3 (b^2+t)^3}\left[\frac{tx^2}{(a^2+t)^2} + \frac{ty^2}{(b^2+t)^2} + \frac{z^2}{t}\right]} + \frac{n_{\sigma 1}}{2} I_6 \right\}, \tag{1}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3P}{2\pi} y \left\{ n_{\sigma 2} \frac{z^2}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)^3}\, t\left[\frac{tx^2}{(a^2+t)^2} + \frac{ty^2}{(b^2+t)^2} + \frac{z^2}{t}\right]} + \frac{n_\tau I_7}{4} \right\}, \tag{2}$$

$$\tau_{zx} = -\frac{3P}{2\pi} x \left\{ n_{\sigma 2} \frac{z^2}{\sqrt{(a^2+t)^3 (b^2+t)\cdot t}\left[\frac{tx^2}{(a^2+t)^2} + \frac{ty^2}{(b^2+t)^2} + \frac{z^2}{t}\right]} + \frac{n_\tau I_8}{4} \right\}, \tag{3}$$

де P – зусилля стискання; ν – коефіцієнт Пуассона; a, b – півосі еліпса площадки контакту,

$$I_6 = \int_t^\infty \frac{ds}{(a^2+s)(b^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)\left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s}\right)}}, \tag{4}$$

$$I_7=\int\limits_t^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\left(a^2+s\right)\left(b^2+s\right)^3 s}}, \tag{5}$$

$$I_8=\int\limits_t^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\left(a^2+s\right)^3\left(b^2+s\right)s}}, \tag{6}$$

$$n_{\sigma 1}=\frac{4\nu-1}{1+2\nu},\quad n_{\sigma 2}=\frac{1}{1+2\nu},\quad n_{\tau}=n_{\sigma 1}+n_{\sigma 2}.$$

а параметр t є найбільшим коренем рівняння

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}+\frac{z^2}{t}-1=0. \tag{7}$$

Формули для знаходження параметра t наведені нами в роботі [3].

Знайдемо формули для визначення дотичних напружень довільної точки тіла в загальному випадку еліптичної площадки контакту.

Розв'язання інтегралів

$$I_7=\frac{2}{ab^2}\int\limits_{\varphi}^{\pi/2}\frac{\cos^2\psi\cdot d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=\frac{2}{ab^2}\left\{\frac{\left[E(k)-E(\varphi,k)\right]-k'^2\left[K(k)-F(\varphi,k)\right]}{k^2}\right\}=$$
$$=\frac{2}{ab^2}\left\{B(k)-B(\varphi,k)\right\}, \tag{8}$$

$$I_8=\frac{2}{a^3}\int\limits_{\varphi}^{\pi/2}\frac{\cos^2\psi\cdot d\psi}{\sqrt{\left(1-k^2\sin^2\psi\right)^3}}=$$
$$=\frac{2k'}{a^2b}\left\{\frac{\left[K(k)-F(\varphi,k)\right]-\left[E(k)-E(\varphi,k)\right]}{k^2}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right\}= \tag{9}$$
$$=\frac{2k'}{a^2b}\left\{D(k)-D(\varphi,k)-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right\},$$

де k' – коефіцієнт стискання еліпса, $k'^2=1-k^2$; $K(k)$, $E(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду в формі Лежандра; $F(\varphi,k)$, $E(\varphi,k)$ – такі ж неповні інтеграли; $D(k)$, $B(k)$, $D(\varphi,k)$, $B(\varphi,k)$ – повні і неповні інтеграли [4],

$$\varphi=arctg\frac{\sqrt{t}}{b}. \tag{10}$$

Розглянемо інтеграл I_6 (4). Цей інтеграл після простих перетворень замінимо сумою двох інтегралів

$$I_6=\frac{1}{a^2k^2}\left(I_{23}-I_{21}\right), \tag{11}$$

де

$$I_{23}=\int_t^{\infty}\frac{ds}{\left(b^2+s\right)\sqrt{\left(a^2+s\right)\left(b^2+s\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}\right)}}, \tag{12}$$

$$I_{21}=\int_t^{\infty}\frac{ds}{\left(a^2+s\right)\sqrt{\left(a^2+s\right)\left(b^2+s\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}\right)}}. \tag{13}$$

Розв'язок інтегралів (12), (13) для $C>0$, $C_1<0$

$$I_{21}=\frac{1}{akx}\ln\frac{\left(1+\frac{kx}{a}\right)^2-k'^2\gamma^2}{\frac{2kx}{a}\sqrt{CV^2+BV+A}+\frac{k^2x^2}{a^2}(2V-1)+1-k'^2\gamma^2}, \tag{14}$$

$$I_{23}=\frac{1}{aky}\left\{\arcsin\frac{k'^2-\gamma^2+\frac{k^2y^2}{b^2}(1-2V_1)}{\sqrt{-\Delta_1}}-\arcsin\frac{k'^2-\gamma^2-\frac{k^2y^2}{b^2}}{\sqrt{-\Delta_1}}\right\}, \tag{15}$$

де

$$\gamma=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\ V=\sin^2\left(arctg\frac{\sqrt{t}k'}{b}\right),\ V_1=\sin^2\left(arctg\frac{\sqrt{t}}{b}\right),$$

$$C=\frac{k^2x^2}{a^2}, B=1-k'^2\gamma^2-\frac{k^2x^2}{a^2}, A=k'^2\gamma^2,$$

$$\left.\begin{aligned}&C_1=-\frac{k^2y^2}{b^2}, B_1=k'^2-\gamma^2+\frac{k^2y^2}{b^2}, A_1=\gamma^2,\\ &\Delta_1=4A_1C_1-B_1^2=-\left(\frac{4\gamma^2k^2y^2}{b^2}+\left(k'^2-\gamma^2+\frac{k^2y^2}{b^2}\right)^2\right)\end{aligned}\right\}.$$

Для $x = 0, y > 0$ коефіцієнти

$$C=0, B=1-k'^2\gamma^2, A=k'^2\gamma^2, \gamma^2=1-\frac{y^2}{b^2},$$

а інтеграл I_{21} (13) має розв'язок

$$\underset{\substack{x=0,\\ y>0}}{I_{21}}=\frac{2k'}{ab}\cdot\frac{1-\sqrt{\left(1-k'^2\gamma^2\right)V+k'^2\gamma^2}}{\left(1-k'^2\gamma^2\right)}, \tag{16}$$

при цьому інтеграл I_{23} (15) не змінюється.

Для *y = 0, x > 0* коефіцієнти

$$C_1 = 0,\quad B_1 = k'^2 - \gamma^2,\quad A_1 = \gamma^2,\quad \gamma^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

інтеграл I_{21} (14) залишається без змін, а інтеграл I_{23} (12) має розв'язок

$$\underset{\substack{y=0,\\ x>0}}{I_{23}} = \frac{2}{ab}\cdot\frac{k' - \sqrt{\left(k'^2 - \gamma^2\right)V_1 + \gamma^2}}{k'^2 - \gamma^2}. \tag{17}$$

В загальному випадку для $C > 0,\ C_1 < 0,\ z = 0$ із формули (11), (14), (15)

$$\mathrm{I}_6 = \frac{1}{\mathrm{ab}}\frac{\mathrm{k}'}{\mathrm{k}^2}\left\{\frac{1}{\mathrm{aky}}\left[\arcsin\frac{\mathrm{k}'^2 - \gamma^2 + \frac{\mathrm{k}^2\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2}}{\sqrt{-\Delta_1}} - \arcsin\frac{\mathrm{k}'^2 - \gamma^2 - \frac{\mathrm{k}^2\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2}}{\sqrt{-\Delta_1}}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\mathrm{k}'}{\mathrm{bkx}}\ln\frac{\mathrm{a}\left(1 + \mathrm{k}'\gamma\right) + \mathrm{kx}}{\mathrm{a}\left(1 + \mathrm{k}'\gamma\right) - \mathrm{kx}}\right\}. \tag{18}$$

Одержані формули однозначно визначають дотичні напруження для довільної точки тіла в загальному випадку еліптичної площадки контакту. Підставляючи в основні формули (1), (2), (3) значення інтегралів (8), (9), (11), (14), (15), одержимо в підсумку для *z >0:*

$$\tau_{xy} = -p_0 n_{\sigma 2}\frac{xyabz\sqrt{t}}{\sqrt{\left(a^2+t\right)^3\left(b^2+t\right)^3}\left[\frac{tx^2}{\left(a^2+t\right)^2} + \frac{ty^2}{\left(b^2+t\right)^2} + \frac{z^2}{t}\right]} -$$
$$- p_0 n_{\sigma 1}\frac{k'}{2ak^3}\left\{x\left[\arcsin\frac{k'^2 - \gamma^2 + \frac{k^2y^2}{b^2}\left(1 - 2V_1\right)}{\sqrt{-\Delta_1}} - \arcsin\frac{k'^2 - \gamma^2 - \frac{k^2y^2}{b^2}}{\sqrt{-\Delta_1}}\right] - \right. \tag{19}$$
$$\left. - y\ln\frac{\left(1 + \frac{kx}{a}\right)^2 - k'^2\gamma^2}{\frac{2kx}{a}\sqrt{CV^2 + BV + A} + \frac{k^2x^2}{a^2}\left(2V - 1\right) + 1 - k'^2\gamma^2}\right\},$$

$$\tau_{yz} = -p_0 n_{\sigma 2}\frac{yabz^2}{\sqrt{\left(a^2+t\right)\left(b^2+t\right)^3}\,t\left[\frac{tx^2}{\left(a^2+t\right)^2} + \frac{ty^2}{\left(b^2+t\right)^2} + \frac{z^2}{t}\right]} -$$
$$- p_0 n_\tau \frac{y}{2b}\left[B(k) - B(\varphi, k)\right], \tag{20}$$

$$\tau_{zx} = -p_0 n_{\sigma 2} \frac{xabz^2}{\sqrt{\left(a^2+t\right)^3\left(b^2+t\right)\ t}\left[\frac{tx^2}{\left(a^2+t\right)^2} + \frac{ty^2}{\left(b^2+t\right)^2} + \frac{z^2}{t}\right]} -$$
$$- p_0 n_\tau \frac{x}{2a} k' \left[D(k) - D(\varphi, k) - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right], \tag{21}$$

де p_0 – тиск для точки (лінії) початкового контакту,

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi ab}.$$

При записі формули (21) враховано особливості перетворення інтегралів (14), (15) ($x > 0, y > 0$) у відповідні інтеграли (16), (17) ($x = 0, y = 0$). Легко показати, підставляючи формули (11), (15), (16) в (1) і формули (11), (14), (17) в (1), що відповідно для точок площин yoz і xoz напруження $\tau_{xy} = 0$. Такий же результат одержуємо для цих площин і з основної формули (19) для $x = 0, y > 0$ і $y = 0, x > 0$. Із формул (20), (21) ясно, що для точок площини xoz $\tau_{yz} = 0$, а для точок площини yoz $\tau_{zx}=0$.

Знайдемо напруження для точок еліптичної площадки контакту $z = 0, t = 0, \varphi = 0, V_1 = 0, V = 0$. Із формул (19), (20), (21) одержимо ($z = 0$):

$$\tau_{xy} = -p_0 n_{\sigma 1} \frac{k'}{2ak^3} \left\{ x \left[\arcsin \frac{k'^2 - \gamma^2 + \frac{k^2 y^2}{b^2}}{\sqrt{-\Delta_1}} - \arcsin \frac{k'^2 - \gamma^2 - \frac{k^2 y^2}{b^2}}{\sqrt{-\Delta_1}} \right] - \right.$$
$$\left. - y \ln \frac{a(1+k'\gamma)+kx}{a(1+k'\gamma)-kx} \right\}, \tag{22}$$

$$\tau_{yz} = -p_0 n_\tau \frac{y}{2b} B(k),$$

$$\tau_{zx} = -p_0 n_\tau \frac{x}{2a} k' D(k).$$

Очевидно, що для точок осей x, y $\tau_{xy} = 0$, для точок осі x $\tau_{yz} = 0$, а для точок осі y $\tau_{zx} = 0$.

Формули (19), (20), (21) показують відсутність дотичних напружень для точок осі z, зокрема і для точки (лінії) початкового контакту, що відповідає прийнятій передумові до задачі щодо відсутності дотичних навантажень.

Зауважимо, що для часткового випадку задачі, тобто для колового контакту ($k' = 1, k = 0$), в формулах (19), (22) появляється невизначеність. Ця невизначеність є наслідком невизначеності інтеграла $I_6 = \frac{0}{0}$, де $\underset{C_1=0}{I_{23}} = \underset{C=0}{I_{21}}$ за формулами (17) і (16) відповідно, тому такий випадок буде досліджений окремо.

Висновки

1. Одержані формули дозволяють знайти дотичні напруження для довільної точки тіла в загальному випадку еліптичної площадки контакту $0 < k < 1$.

2. Запропонований розв’язок, на відміну від відомого, показує наявність дотичних напружень τ_{zx}, τ_{yz} для точок площадки контакту.

3. Застосування знайдених формул дозволяє уточнити кількісно та якісно напружений стан деталей машин та споруд, які працюють в умовах контактного навантаження.

1. Римар О.М. Система переміщень точного розв'язку просторової контактної задачі // Зб. наук. пр. – Львів, 2000. – Вип. 4. – С. 96–100. 2. Римар О.М. Загальний вигляд формул для дотичних напружень задачі Герца // Зб. наук. пр. – Львів, 2001. – Вип. 5. – С. 130–133. 3. Римар О.М. Визначення межі інтеграла ньютонового потенціала простого шару // Зб. наук. пр. – Львів, 2000. – Вип. 3. – С.103–105 4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М., 1967. – 300 с.

УДК 621.192

Ю.М. Слюсарчук, Р.А. Пельо
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра експлуатації та ремонту автомобільної техніки

ОБҐРУНТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ ДІАГНОСТУВАННЯ ДИЗЕЛЬНИХ АВТОМОБІЛЬНИХ ДВИГУНІВ

Розглянуто питання побудови оптимальних алгоритмів визначення працездатного стану дизельних автомобільних двигунів на підставі моделі логічного типу.

The problem of construction of optimum algorithms definition of an able-bodied condition of diesel automobile engines ground models of a logical type is reviewed.

Одним з чинників, що суттєво впливає на ефективність діагностування, є якість алгоритмів визначення технічного стану. Необхідність збільшення продуктивності праці на операціях діагностування, скорочення часу виявлення, пошуку та усунення несправностей, створення нових засобів діагностування викликає інтерес до розробки оптимальних алгоритмів діагностування, що дасть можливість за мінімальною кількістю діагностичних параметрів встановити технічний стан автомобіля з найменшими затратами.

Більшість об'єктів, які діагностуються в автомобілі характеризуються параметрами, що змінюються неперервно протягом експлуатації. При діагностуванні технічного стану таких об'єктів широко застосовуються "допускові" методи. На підставі цих методів висновок про технічний стан об'єкта приймається за результатами оцінок сигналів у контрольних точках – елементарних перевірок. Результати контролю параметрів оцінюють за принципом: "в межах норми або ні". Тому, для опису поведінки таких об'єктів використовують моделі логічного типу [1].

Така модель передбачає формальний опис станів об'єкта діагностування

$$r_{0j} = \psi_0(\pi_j), \quad r_{ij} = \psi_i(\pi_j), \quad (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}),$$

де r_{0j}, r_{ij} – результати елементарних перевірок за відсутності чи наявності i-го несправного стану, відповідно; π_j – елементарна перевірка; ψ_0 , ψ_i – передаточні функції об'єкта діагностування, що перебуває у справному або i- му несправному станах, відповідно; n – кількість можливих несправних станів об'єкта; m – кількість елементарних перевірок.