

ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ДИНАМІКИ, МІЦНОСТІ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОМИСЛОВОГО УСТАТКУВАННЯ

УДК 681.112

Л.В. Божкова, В.Г. Рябов, В.О. Малащенко*

Московський автомеханічний університет,
кафедра теоретичної механіки, Росія

*Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра деталей машин

ОПТИМІЗАЦІЯ МЕТОДУ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КІЛЬЦЕВОГО ШАРУ ДОВІЛЬНОЇ ТОВЩИНИ

© Божкова Л.В., Рябов В.Г., Малащенко В.О., 2002

У цій роботі розглянуто проблему інженерного розв’язання нелінійних контактних задач, яка уточнює аналітичні положення, що базуються на припущеннях: тиск у зоні контакту змінюється за законом косинуса, геометрична умова контакту задовольняється наближено тільки в трьох точках. Задачу розв’язано методами розкладання довільної функції за відомими функціями та ортогоналізації системи функцій, наведено результати розробленого уточнювального методу розв’язування цих задач у вигляді аналітичних залежностей і графіків, що є зручним для практичного використання.

In the article the problem of the solution of non-linear contact problems is considered. In the article the supposition is made, that the pressure in a zone of a contact changes under the law of a cosine. The outcomes of a designed updated method of the solution of such problems by the way of analytical relations and charts are induced.

У багатьох галузях машинобудування існують кінематичні пари, що включають в себе тверді тіла, які контактують з пружно-твердими циліндрами. Тому, розглянуто проблему інженерного розв’язання конструктивно-нелінійних контактних задач [1, 2], яка базується на припущеннях, що тиск у зоні контакту змінюється за законом косинуса та геометрична умова контакту задовольняється наближено тільки в трьох точках. Вирішене також питання контактної доторкання кільцевої оболонки і циліндра з врахуванням сил тертя та інші [3, 4, 5].

У цій роботі наведено результати розробленого уточнювального методу розв’язування подібних задач. Для розрахункової схеми (рис. 1) закон зміни контактної тиску запишемо у вигляді безмежного ряду

$$\bar{P}(\Theta) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} P_m \cos[m\pi(\Theta / \Theta_0)], & |\Theta| < \Theta_0 \\ 0, & |\Theta| > \Theta_0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\bar{P}(\Theta) = P(\Theta)/E$ і P_m – безрозмірні невідомі константи; $m = 0, 1, 2, \dots$

Функція (1) розкладається в ряд Фур'є на проміжку $-\pi \leq \Theta \leq \pi$.

$$\bar{P}(\Theta) = \bar{A}_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \cos n\Theta, \quad (2)$$

де

$$\bar{A}_0 = 2\Theta_0 P_0 / \pi; \quad \bar{A}_n = (2 \sin n\Theta_0 / \pi) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} P_m \left(n / (m^2 - n^2) \right); \quad (3)$$

$\bar{m} = m\pi/\Theta_0$ ($n = 1, 2, \dots$) – безрозмірні коефіцієнти.

Для малих деформацій зона доторкання також буде малою порівняно з радіусами елементів (рис. 1), тому геометричну умову контакту запишемо

$$\bar{\omega} = -\bar{\delta} + r\Theta^2 / 2, \quad |\Theta| < \Theta_0, \quad (4)$$

де $r = 1 + r_2/r_0$ – безрозмірна величина.

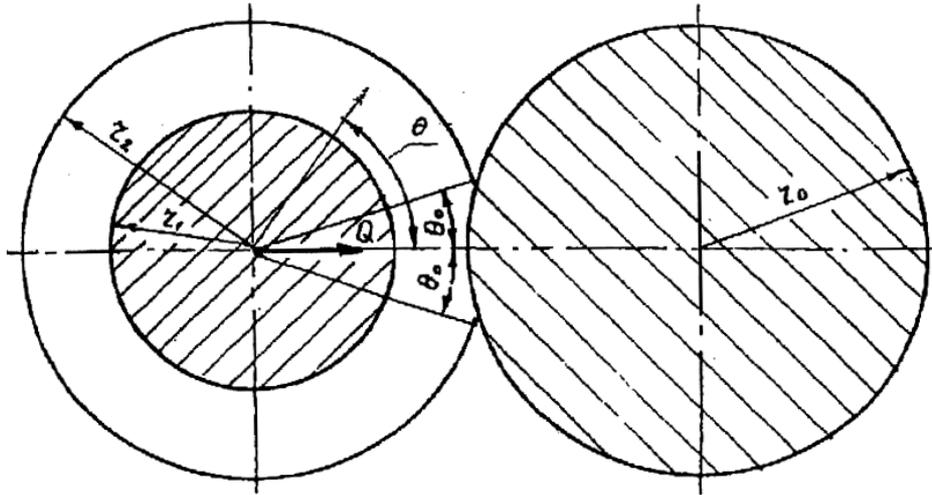


Рис. 1. Схеми контактної взаємодії кільцевого шару твердого циліндра з пружним твердим циліндром

За результатами [1] і з урахуванням (1)–(3) маємо

$$\bar{\omega} = -\bar{\delta} + r\Theta^2 / 2 = (2/\pi) \left[P_0 \alpha_0 \Theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} P_m \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \sin n\Theta_0 \cos n\Theta) / (\bar{m}^2 - n^2) \right], \quad (5)$$

де $\bar{\delta}$ – параметр, що характеризує наближення тіл і визначається із (5), якщо $\Theta = 0$.

$$\bar{\delta} = -(2/\pi) \left[P_0 \alpha_0 \Theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} P_m \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \sin n\Theta_0) / (\bar{m}^2 - n^2) \right], \quad (6)$$

де β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) прямує до постійної величини $\beta = 2(1 - \nu^2)$; ν – коефіцієнт Пуассона.

З урахуванням (6) із рівняння (5) одержимо

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m \varphi_m(\Theta) = r\Theta^2 / 2, \quad (7)$$

$$\varphi_0(\Theta) = (1/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \gamma / n^2); \quad \varphi_m(\Theta) = ((-1)^{m+1} / \pi) \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \gamma / (\bar{m}^2 - n^2));$$

$$\gamma = \sin n(\Theta_0 - \Theta) + \sin n(\Theta_0 + \Theta) - 2 \sin n\Theta_0; \quad m = 1, 2, \dots$$

Враховуючи умову (7), можна покращити збіжність рядів, що входять до останніх виразів, тобто,

$$\varphi_0(\Theta) = (\beta/\pi) \left[\int_{\Theta_0}^{\Theta} \ln(2 \sin((\Theta_0 - \Theta)/2)) d\Theta - \int_{-\Theta_0}^{\Theta} \ln(2 \sin((\Theta_0 + \Theta)/2)) d\Theta - 2 \int_0^{\Theta} \ln(2 \sin(\Theta/2)) d\Theta \right] + (1/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \beta) \gamma/n^2. \quad (8)$$

Подібним методом можна також покращити збіжність ряду, що входить у вираз (6)

$$\bar{\delta} = - \left(\frac{2}{\pi} \right) \left[P_0 \alpha_0 \Theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} P_m \left((-1)^{m+1} \beta \delta_i (m\tilde{n}) / \tilde{m} + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \beta) \sin n \Theta_0 / (\tilde{m}^2 - n^2) \right) \right]. \quad (9)$$

Визначення невідомих констант P_m здійснюється двома методами, перший із яких полягає в розв'язуванні даної задачі розкладанням довільної функції за відомими функціями $\varphi_m(\Theta)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) за допомогою безмежних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Другий – шляхом ортогоналізації цієї системи функцій.

За першим методом одержуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m C_{k,m} = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (10)$$

$$\text{де } C_{k,m} = \int_{-\Theta_0}^{\Theta} \varphi_m \psi_k(\Theta) d\Theta; \quad b_k = (r/2) \int_{-\Theta_0}^{\Theta} \Theta^2 \psi_k(\Theta) d\Theta.$$

Приймаючи $\psi_k(\Theta) = \cos(k\pi\Theta/\Theta_0)$ повною функцією на відрізку $(-\Theta_0, \Theta_0)$, запишемо постійні коефіцієнти співвідношеннями

$$C_{k,m} = \int_{-\Theta_0}^{\Theta} \varphi_m(\Theta) \cos(k\pi\Theta/\Theta_0) d\Theta; \quad b_k = (-1)^k (2r\Theta_0^3) / (k\pi)^2, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Для визначення основних характеристик зони доторкання запишемо умову статичної рівноваги в безрозмірних параметрах

$$Q_1 = \int_{-\Theta_0}^{\Theta} P_1(\Theta) d\Theta, \quad (11)$$

$$\text{де } Q_1 = [Q/(Er_2)]r', \quad P_1(\Theta) = [P(\Theta)/E]r', \quad r' = r_2/r_0.$$

Підставивши ці значення $Q_1, P_1(\Theta)$ в рівняння рівноваги (11), одержуємо

$$Q_1 = 2\bar{P}_0\Theta_0; \quad \bar{P}_0 = P_0/(1+r').$$

Достовірність закону розподілення контактної тиску (1) перевірено умовою його рівності нулю на межах доторкання елементів. Для цього було взято похідні по Θ співвідношень (8) і одержані рівняння, з врахуванням $\Theta \rightarrow \Theta_0$, апроксимовано такими виразами:

$$\varphi'_0(\Theta) = (\beta/\pi) \ln \beta_1; \quad \varphi'_m(\Theta) = (\beta/\pi) \cos(\tilde{m}\Theta) \ln \beta_1, \quad (12)$$

$$\text{де } \beta_1 = (\Theta_0 + \Theta)/(\Theta_0 - \Theta).$$

Продиференціювавши (7) з врахуванням (12), дістанемо

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m \cos(m\pi\Theta/\Theta_0) = (\pi r'/\beta)(\Theta/\ln \beta_1). \quad (13)$$

Порівняння одержаного рівняння (13) з (1) підтверджує що, коли $\Theta = |\Theta_0|$, контактний тиск дорівнює нулю, що підтверджує вірогідність цих випадків.

Зауважимо, що при $r_0 \rightarrow \infty$ одержаний розв'язок відповідає випадку контактної взаємодії пружного шару одного елемента з жорсткою плоскою основою іншого елемента, що частіше зустрічається в машинобудуванні.

Крім того загальна схема розрахунку запропонована уточнювальним методом розв'язування контактних конструктивно-нелінійних задач для пружного кільцевого шару з малими зонами дотику уможливорює побудову таких графіків: залежності між результуючою силою Q_1 , що представлена в безрозмірній формі та кутом Θ_0 ; залежності між параметром наближення елементів дотику та кутом Θ_0 .

Після чого за Q_1 або δ з відповідного графіка визначається величина кута контакту Θ_0 , за допомогою якого підраховуються значення констант $P_m (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$ і за рівнянням (1) описується аналітично конкретний закон розподілення радіального контактного тиску. Знаючи закони розподілення тиску, за відомими формулами можна описати напруження та деформований стан пружного кільцевого шару.

Кількісний аналіз основних чинників даного дотику тіл (рис. 1) проведено для безрозмірного параметра $\rho_1 = 0,97; 0,96; 0,95; 0,9$. Результати аналізу показані на рис. 2–7.

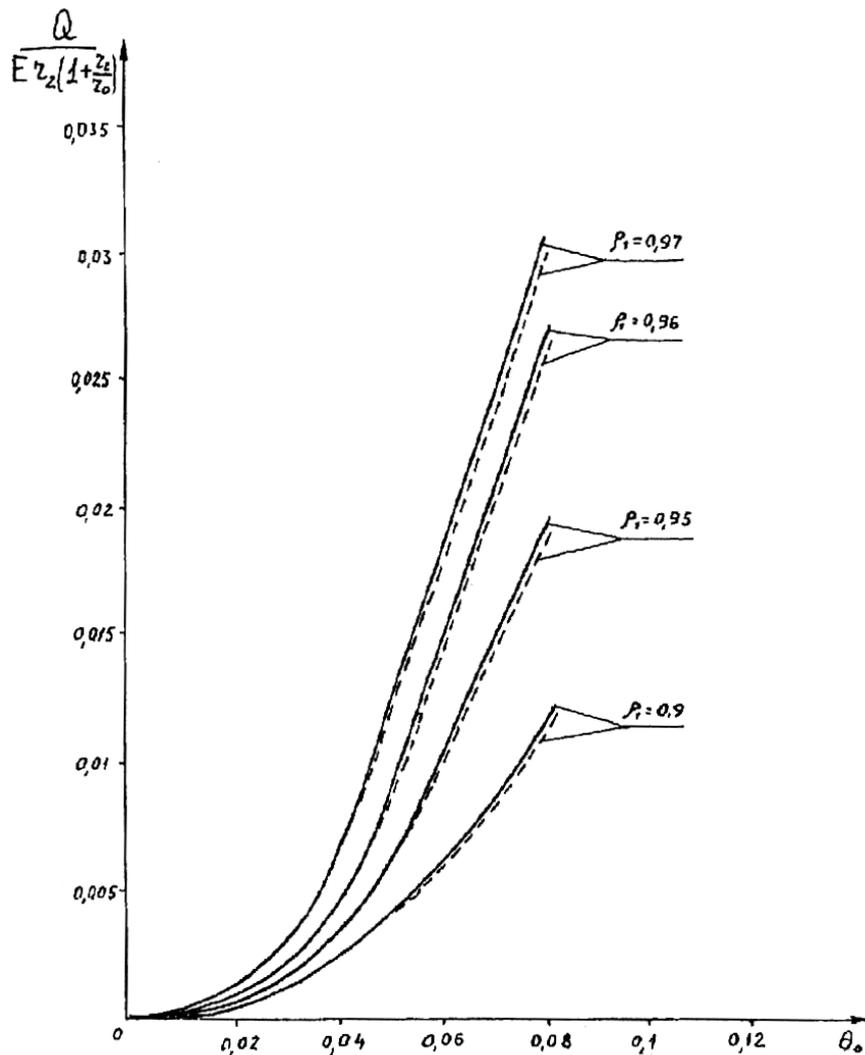


Рис. 2. Залежність кута Θ_0 від результуючого навантаження за уточнювальним методом розв'язання

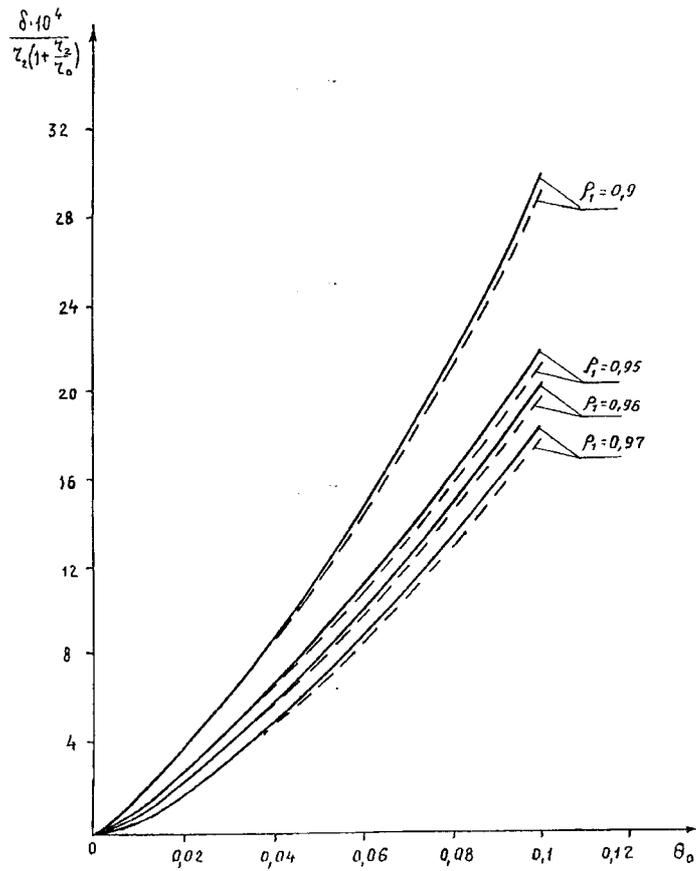


Рис. 3. Залежність кута Θ_0 від параметра δ за уточнювальним методом розв'язання

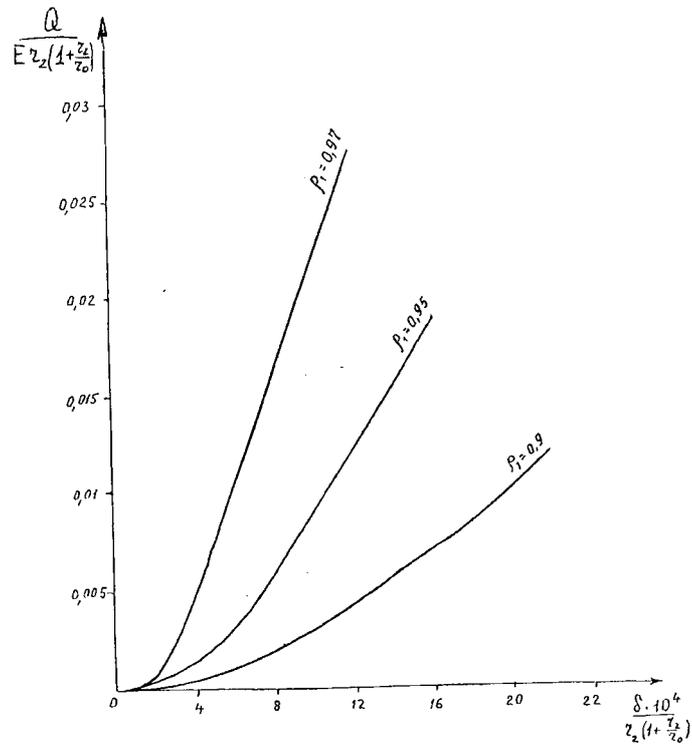


Рис. 4. Залежність параметра δ від результуючого навантаження за уточнювальним методом розв'язання

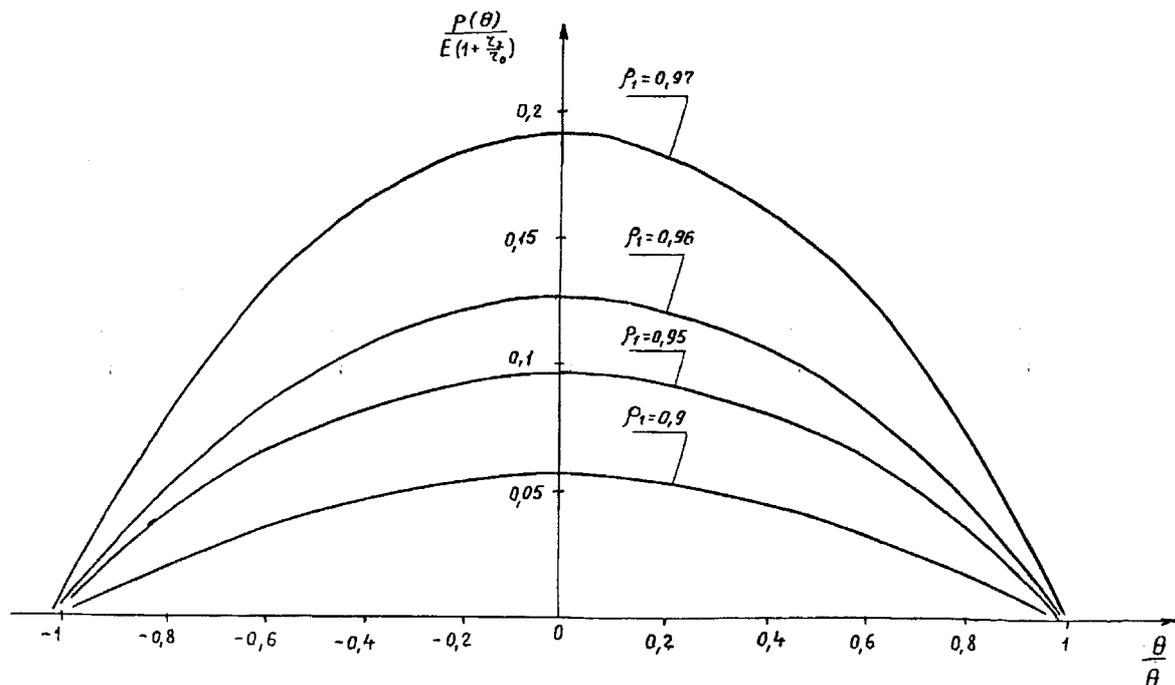


Рис. 5. Закон зміни контактного тиску за уточнювальним методом розв'язання

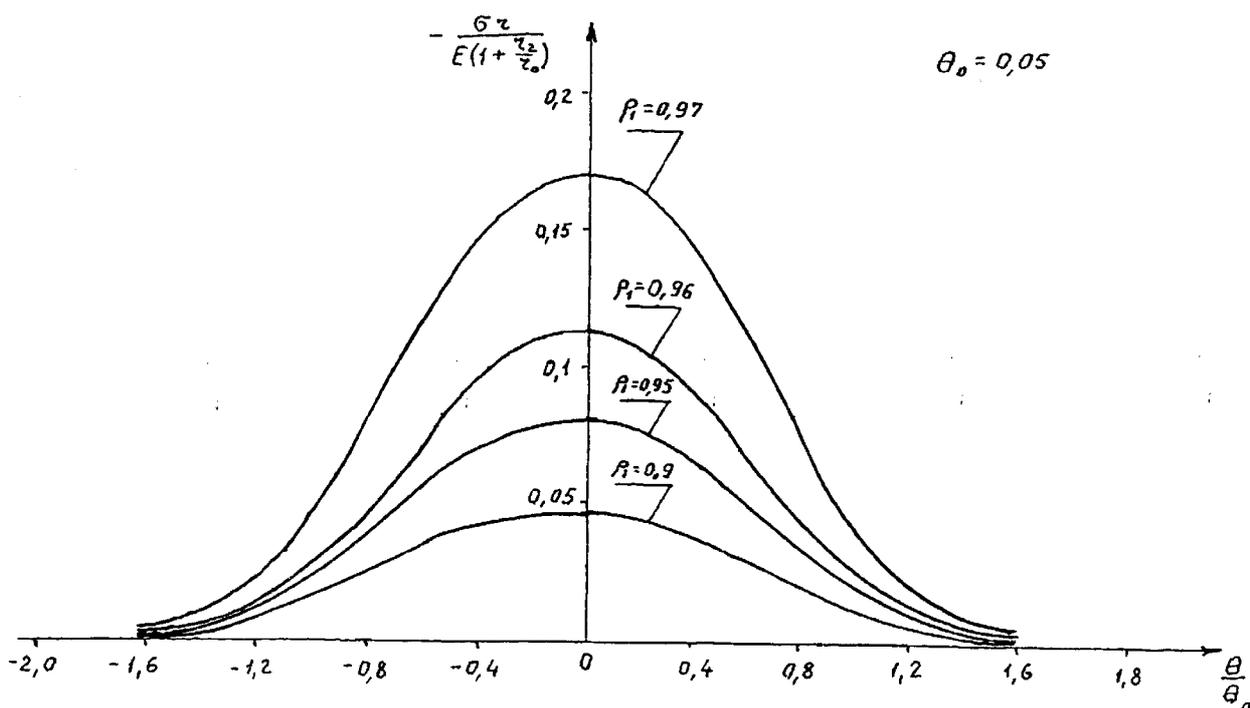


Рис. 6. Радіальні напруження на межі поверхні твердого циліндра та пружного шару

На рис. 2, 3 пунктирними лініями зображені результати, що одержані за першим методом розв'язання функціонального рівняння, тобто за допомогою безмежних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Ця система розв'язана методом послідовних наближень з нульовими початковими значеннями. Графіки, що показані суцільними лініями (рис. 2, 3), відповідають результатам, які отримано за методом ортогоналізації систем функцій $\varphi_m(\theta)$. На рис. 4 зображено залежність величини наближення елементів, що доторкаються, від результуючого навантаження в безрозмірних значеннях.

Закон зміни контактної тиску для $\Theta_0 = 0,05^\circ$ показаний на рис. 5. Характер зміни радіальних і колових напружень на межі поверхні твердого циліндра та пружного шару для $\Theta_0 = 0,05^\circ$ зображений відповідно на рис. 6, 7.

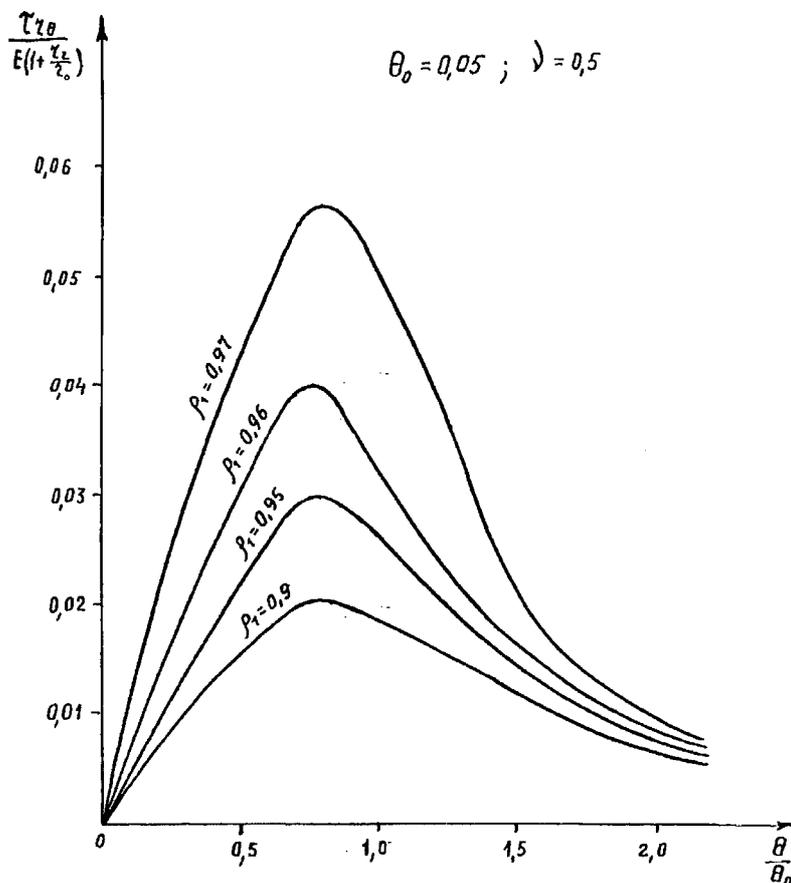


Рис. 7. Дотичні напруження на межі поверхні твердого циліндра та пружного шару

Одержаний аналітичний розв'язок даної контактної задачі та наведені графіки результатів кількісного аналізу можна застосовувати в інженерній практиці на стадії проектування та експлуатації кінематичних пар сучасних технічних засобів.

1. Божкова Л.В., Чебанюк А.М., *Взаимодействие кольца, жестко насаженного на абсолютно твердое цилиндрическое тело, с жестким основанием* // Изв. вузов. – 1977. – № 8. – С. 16–22. 2. Божкова Л.В., Рябов В.Г. *Контактная задача для кольцевого слоя произвольной толщины с учетом сил трения в зоне контакта* // Тез. докл. Югославский конгресс по теоретической и прикладной механике. СФРЮ. – 1990. 3. Божкова Л.В., Малащенко В.О., Рябов В.Г. *Про контактне дотикання кільцевої оболонки і циліндра з врахуванням сил тертя* // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1991. – № 259. С. 51–55. 4. Малащенко В.О., Божкова Л.В., Рябов В.Г., Матяш І.Ф. *До питання про точність позиціонування робототехнічних засобів* // Тез. доп. I Міжнар. симпозіуму українських інженерів-механіків у Львові. – 1993. – С. 218–220. 5. Малащенко В.О., Божкова Л.В., Рябов В.Г. *Контактна задача для тришарового пружного покриття твердого тіла* // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. – 2000. – № 394. – С. 84–89.