

УДК 621.317

М.М. Дорожовець^{1,2}, А. Ковальчик²¹Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра “Інформаційно-вимірювальна техніка”²Ряшівська політехніка, кафедра “Метрологія та вимірювальні системи”, Польща

ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ОДНОІТЕРАЦІЙНОГО АЛГОРИТМУ ВІДТВОРЕННЯ ПРОВІДНОСТІ БАГАТОЕЛЕМЕНТНИХ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

©Дорожовець М.М., Ковальчик А., 2002

Метод підвищення точності ґрунтується на модифікації якобіана системи нелінійних рівнянь після виконання першої ітерації. Модифікація здійснюється відповідно до попередньо обчислених матриць других похідних системи і отриманих на першій ітерації розв’язків. Показано, що точність відтворення провідностей (опорів) елементів перетворювача на наступній ітерації зростає в декілька разів і залежить від ступеня зміни параметрів елементів між почерговими вимірюваннями, а також від кількості елементів.

The method of accuracy increasing based on updating of the non linear equations jacobian after the first iteration. The updating is carried out according to previously calculated matrixes of the second derivative of the given equations and received results after the first iteration. Is shown, that the accuracy of the conductance (resistance) elements reconstruction on next iteration grows in a few times and depends on degree of the element parameters changes between subsequent measurements and from amount of elements.

1. Вступ. Багатоелементні резистивні перетворювачі використовуються для вимірювань просторового розподілу фізичних величин, наприклад, температури [1 – 3]. Для зменшення кількості вимірювальних провідників (при застосуванні чотирипровідної схеми вимірювань) доцільно застосовувати багатоелементні перетворювачі у вигляді сітки з виводами лише від зовнішніх вузлів і недоступними внутрішніми вузлами [1 – 3]. Зокрема, у [3] запропоновано 42-елементний резистивний перетворювач температури (рис. 1) з 6-ма зовнішніми електродами, для під’єднання якого до вимірювальної схеми необхідні лише $6 \times 4 = 24$ провідники, замість $42 \times 4 = 168$ при використанні 42 окремих чутливих елементів. Оскільки окремі елементи є недоступними для безпосереднього вимірювання, то їх значення можуть бути відтворені із застосуванням томографічної методики [3]. Можуть бути використані прямі або непрямі вимірювання зовнішніх між-електродних величин.

Загалом залежність результатів вимірювань G_j від параметрів елементів (наприклад, провідностей елементів $g_1, g_2, \dots, g_b, \dots, g_{ne}$) описуються нелінійними функціями

$$G_j = F_j(g_1, g_2, \dots, g_b, \dots, g_{ne}), \quad (1)$$

які утворюють систему нелінійних рівнянь, що у матричному записі має вигляд

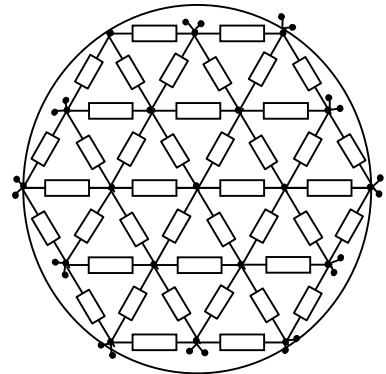


Рис. 1. 42-елементний перетворювач

$$G=F(g), \quad (2)$$

де \mathbf{g} – вектор невідомих, розмір якого дорівнює кількості елементів перетворювача n_e .

Кількість рівнянь системи (2) визначається кількістю незалежних результатів вимірювань.

Для відтворення параметрів елементів зазвичай використовуються методи ньютонівського типу або градієнтні методи. З урахуванням мультиплікативних властивостей нелінійних функцій виду (1) [2] при змінах Δg_i значень параметрів чутливих елементів ($\Delta g_i = g_i^{(1)} - g_i^{(0)}$, де $g_i^{(0)}, g_i^{(1)}$ – початкове та спричинене зміною температури значення провідності i -го чутливого елемента) нелінійні рівняння (1) можуть бути лінеаризовані

$$G_j(g_1^{(1)}, \dots, g_i^{(1)}, \dots, g_{n_e}^{(1)}) \cong \sum_i J_{j,i}(g_1^{(0)}, \dots, g_i^{(0)}, \dots, g_{n_e}^{(0)}) g_i^{(1)}, \quad (3)$$

або у матричній формі

$$\mathbf{G}^{(1)} \approx \mathbf{J}^{(0)} \cdot \mathbf{g}^{(1)} \quad (4)$$

де $J_{j,i} \in j_i$ – компонентою матриці похідних $\partial F_j / \partial g_i$ (якобіана $\mathbf{J}^{(0)}$), розрахованих в точці початкових значень провідностей ($g_i^{(0)}, g_i^{(1)}$).

Зауважимо, що у (4) відсутній адитивний член, який є при лінійному наближенні нелінійних рівнянь загального виду.

Використовуючи вектор результатів вимірювань \mathbf{G}^m , вектор нових значень провідностей $\mathbf{g}^{(1)}$ чутливих елементів на першій ітерації обчислюють за виразом

$$\mathbf{g}^{(1)} = (\mathbf{J}^{(0)T} \mathbf{J}^{(0)} + \mu_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^{(0)T} \mathbf{G}^m, \quad (5)$$

де \mathbf{I} – одинична діагональна матриця; μ_0 – параметр згладжування (регуляризації) (T – символ транспонування).

2. Методика підвищення точності відтворення провідності елементів. Розв'язки (5) є достатньо точними лише за невеликих відхилень провідностей від початкових значень $\mathbf{g}^{(0)}$. Для прикладу розглянемо просту 10-елементну апроксимацію ($n_e=10$) (рис. 2), для якої можливо отримати також максимум $m_r=10$ незалежних результатів вимірювань. При рівномірному початковому наближенні провідності елементів (не має значення, якого рівня) і при 50% зміні провідностей максимальна похибка відтворення цих провідностей досягає рівня відсотка (рис. 5, а; рис. 6, а). При більшій кількості апроксимаційних елементів ця похибка стає ще більшою.

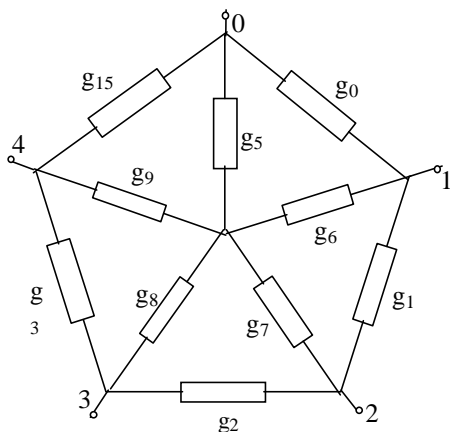


Рис. 2. 10-елементний перетворювач

Для підвищення точності розв'язання (5) необхідно перерахувати якобіан $\mathbf{J}^{(1)}$ для нового значення провідності $\mathbf{g}^{(1)}$. Однак безпосереднє знаходження якобіана вимагає значних обчислювальних затрат, які пов'язані з необхідністю n_e -разового повного (для всіх ракурсів зондування об'єкта) розв'язування прямої задачі. Пряма задача розв'язується числовим методом з використанням тієї чи іншої апроксимації і розмір матриць, які її описують, залежить від кількості вузлів чи контурів апроксимаційної схеми. При $m_r=n_e(n_e-1(3))/2$ ракурсах зондування загальна кількість розв'язувань становить $K=n_e \cdot m_r$. Зокрема, при $n_e=100$ і $n_{el}=16$ прямою задачу необхідно розв'язувати 12000 разів.

Розв'язки (5) можна покращити, уточнивши якобіан та використовуючи значення других похідних функцій (1). Для кожної j -ї функції існує квадратна симетрична матриця $\mathbf{h}_j^{(0)}$, розмір якої дорівнює кількості апроксимаційних елементів, а її члени становлять $h_{j;i,k}^{(0)} = \partial^2 F_j(g_1^{(0)}, \dots, g_i^{(0)}, \dots, g_{ne}^{(0)}) / \partial g_i \partial g_k$. Використовуючи ці матриці, нове наближення j -го рядка якобіана може бути знайдене за виразом

$$\mathbf{J}_j^{(1)} = \mathbf{J}_j^{(0)} + \mathbf{h}_j^{(0)} (\mathbf{g}^{(1)} - \mathbf{g}^{(0)}) \cdot mn = \mathbf{J}_j^{(0)} + \mathbf{h}_j^{(0)} \mathbf{g}^{(1)} \cdot mn, \quad (6)$$

де враховано, що для нелінійних мультиплікативних функцій [2] в точці визначення функції, якобіана і других похідних справедливо: $\mathbf{h}_j^{(0)} \mathbf{g}^{(0)} = 0$; mn – масштабний коефіцієнт, що залежить від ступеня $v^{(1)}$ неоднорідності відношень відповідних результатів вимірювань (зумовлених змінами провідностей елементів) між почерговими циклами.

Нехай для вектора $\mathbf{g}^{(0)}$ початкового наближення провідностей вектор очікуваних значень результатів вимірювань набуває значень \mathbf{G}^0 , тоді параметр, який характеризує неоднорідність зміни результатів вимірювань при зміні провідностей елементів, можна оцінити за виразом

$$v^{(1)} = \frac{\max(G_i^m / G_i^0) - \min(G_i^m / G_i^0)}{2 \cdot G_i^m / G_i^0}. \quad (7)$$

Використовуючи (7), значення масштабного коефіцієнта у (6) було розраховано за виразом

$$mn = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{c \cdot v^{(1)}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1+c \cdot v^{(1)}}, \quad (8)$$

у якому значення коефіцієнта c вибирається залежно від кількості чутливих елементів на підставі експериментальних досліджень. Очевидно, що при масштабній, стрибкоподібній зміні провідностей всіх елементів отримуємо таку саму масштабну зміну результатів вимірювань, тобто у цьому випадку $v^{(1)}=0$, і тому значення масштабного коефіцієнта є найбільшим $mn=1/2$. Загалом зі збільшенням неоднорідності провідностей елементів масштабний коефіцієнт дещо зменшується.

Враховуючи (7) і (8), після уточнення за виразом (6) всіх рядків якобіана, за аналогією до (5) знайдемо уточнене наближення вектора провідностей елементів $\mathbf{g}^{(1+)}$ за виразом

$$\mathbf{g}^{(1+)} = (\mathbf{J}^{(1)T} \mathbf{J}^{(1)} + \mu_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^{(1)T} \mathbf{G}^m. \quad (9)$$

Очевидно, що початкове значення якобіана $\mathbf{J}^{(0)}$ та значення всіх матриць других похідних $\mathbf{h}_j^{(0)}$ розраховані заздалегідь і є готовими до виконання модифікації (6).

3. Результати експериментальних досліджень. Дослідження виконані для 10-елементного резистивного перетворювача з номінальними значеннями опорів 100 Ом (провідність 10 мСм). Початкові значення якобіана $\mathbf{J}^{(0)}$ та матриць других похідних $\mathbf{h}_j^{(0)}$ були розраховані при однакових значеннях провідностей елементів $g_0^{(0)} = g_1^{(0)} = \dots g_9^{(0)} = 1$ см.

Для встановлення впливу різних можливих змін провідностей елементів сформовано 31 варіант значень \mathbf{g}_x ; провідності всіх елементів отримували від 12,5% до 50% випадкові некорельовані прирости, а провідності внутрішніх елементів (з номерами від 5 до 9) мали додаткову зміну також від 12,5% до 37,5%. Для заданих варіантів провідностей були розраховані очікувані відповідні варіанти результатів вимірювань.

Останні використовувалися для відтворення провідностей $\mathbf{g}_{\text{rec}}=\mathbf{g}^{(1)}$ за виразом (5). Завдяки задовільній зумовленості гесіана регуляризацію не застосовували.

Відповідно до відтворених \mathbf{g}_{rec} та заданих \mathbf{g}_x значень провідностей був розрахований 31 варіант похибок відтворення провідностей за виразом

$$\mathbf{dg}=\mathbf{g}_{\text{rec}}-\mathbf{g}_x \quad (10)$$

і розраховані їх характеристики: середнє значення (sd), стандартне (середньоквадратичне) відхилення (svd), максимальне (mx) і мінімальне (mn) значення. Результати досліджень для 12.5 % випадкової та 37.5 % систематичної зміни провідностей елементів перетворювача у вигляді графіків наведено на рис. 3, а – б, а.

Як видно з наведених графіків, максимальна похибка відтворення провідностей елементів може досягати одного процента і більше.

Отримані результати відтворення (\mathbf{g}_{rec}) використовувалися для модифікації якобіана за виразом (6). Для розрахунку масштабного коефіцієнта m у (8) прийнято $c=5$. Далі, відповідно до (10), уточнено значення провідностей елементів $\mathbf{g}_{\text{rec1}}=\mathbf{g}^{(1+)}$. Аналогічно, як і раніше, були знайдені вектори похибок $\mathbf{dg1}=\mathbf{g}_{\text{rec1}}-\mathbf{g}_x$ та їх характеристики, які у вигляді графіків показані на рис. 3, б – 6, б.

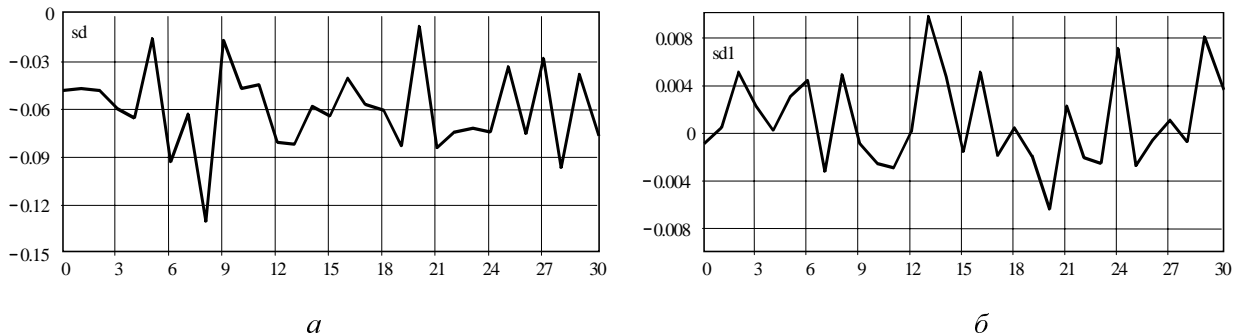


Рис.3. Значення середніх похибок: а) перша ітерація, б) з модифікацією

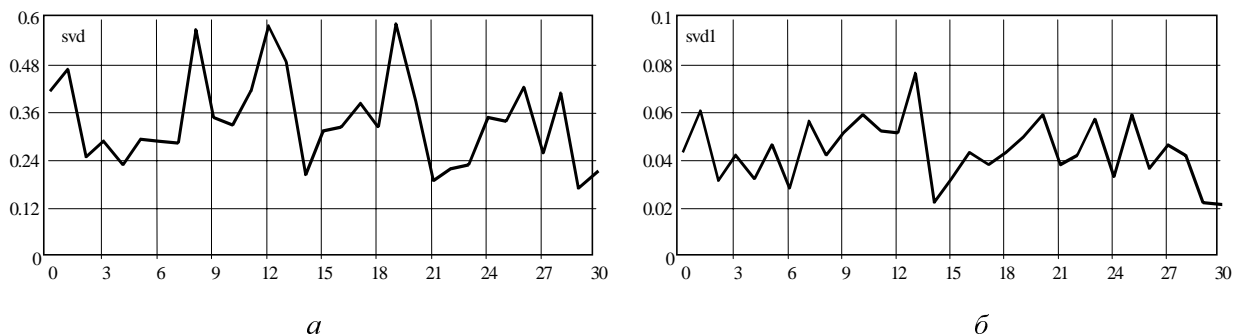


Рис.4. Стандартні відхилення похибок: а) перша ітерація, б) з модифікацією

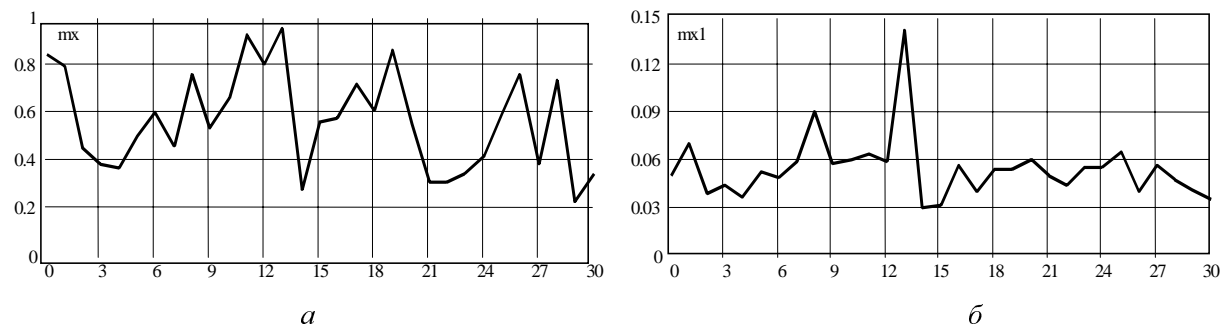


Рис.5. Значення максимальних похибок: а) перша ітерація, б) з модифікацією

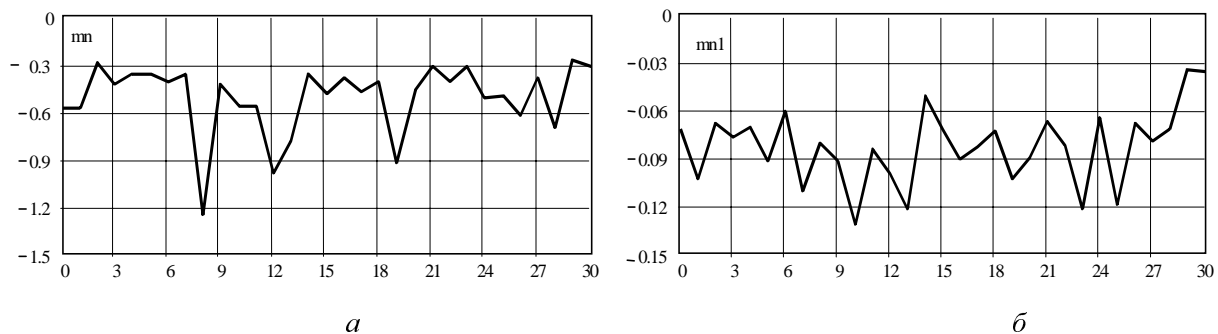


Рис.6. Значення мінімальних похибок: а) перша ітерація, б) з модифікацією

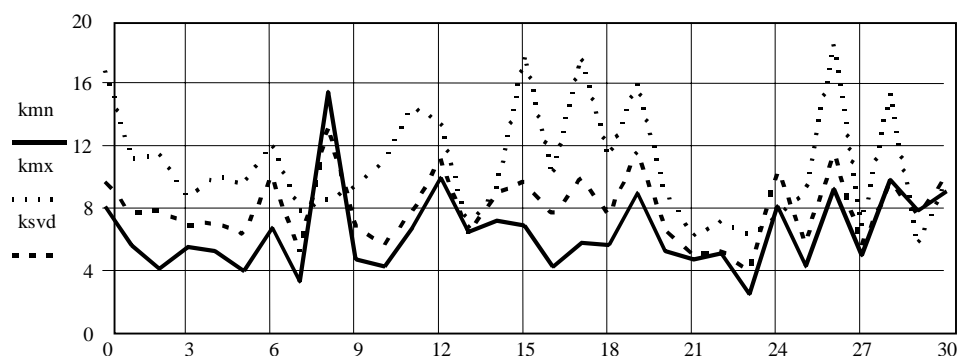


Рис.7. Ефективність корекції похибок відтворення провідностей

З аналізу вказаних рисунків видно істотне зменшення відповідних характеристик похибок відтворення провідності елементів. Для кількісного оцінювання такого зменшення, тобто для оцінювання ефективності методики, розраховано коефіцієнти як відношення відповідних характеристик похибок, отриманих до і після модифікації якобіана, які показані на рис. 7. Як бачимо, середньоквадратичне відхилення похибки відтворення зменшується приблизно у 6 – 10 разів, а максимальна похибка зменшується у 7 – 14 разів.

4. Висновок

Запропонована методика уточнення якобіана системи нелінійних рівнянь забезпечує порівняно високу ефективність розв'язування оберненої задачі резистивної томографії – точність відтворення провідностей окремих елементів збільшується 5 – 10 разів і більше без істотного збільшення часових затрат.

1. Dorozhovets M., Stadnyk B, Zavgorodny V., Kowalczyk A *Electrical Impedance Tomography System Based on Equipotential Electrodes. Proceedings of the XV Symposium Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits. Liege, Belgium, 1998. P. 269-271.*
2. Дорожжовець М. Дослідження властивостей нелінійних залежностей, які описують обернену задачу електричної томографії // *Вимірювальна техніка та метрологія. Львів, 2001. Вип. 58. С. 16-19.* Dorozhovets M., Kowalczyk A., Stadnyk B. *Measurement of a temperature non-uniformity using resistance tomography method. 8th International Symposium on Temperature and Thermal Measurements in Industry and Science: Tempmeko-2001. Abstracts. 19-21 June 2001, Berlin, Germany. P. 87.*