

УДК 517.958:539.3

В.М. Макар, О.М. Матвійків

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра САПР

## Н-АДАПТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ. ЧАСТИНА 1: АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНКИ ПОХИБКИ

© Макар В.М., Матвійків О.М., 2003

**Запропоновано алгоритм  $h$ -адаптивного моделювання статичних задач теорії пружності на основі методу скінченних елементів. Детально розглянуто перший етап  $h$ -адаптивного обчислювального процесу, а саме побудова апостеріорних оцінок похибки.**

**In the paper the  $h$ -adaptive finite element method for linear static problem of the theory of elasticity is presented. The first essential step of  $h$ -adaptive finite element simulation, namely a posteriori error estimating process, is described.**

**Вступ.** Потреба у створенні повністю автоматизованих схем розв’язування складних задач математичної фізики з високою точністю стимулювала посилення інтересу до питання побудови адаптивних схем підвищення точності розрахунків. При цьому втручання користувача в обчислювальний процес має бути зведене до мінімуму. Необідність у процедурах оцінки точності апроксимацій виникла з перших спроб практичного застосування методу скінченних елементів (МСЕ). Перші кроки у вирішенні цієї проблеми полягали у розв’язуванні “класичних” задач з відомими аналітичним розв’язками та порівнянні останніх з наближеними розв’язками МСЕ. Однак налагоджене таким чином програмне забезпечення, яке реалізує МСЕ, ще не гарантує прийнятність та точність отриманих числових розв’язків при розв’язуванні складних задач інженерної практики. Така ситуація зумовлена тим, що в реальних задачах неможливо а рїогї побудувати сітку, на якій локальна похибка дискретизації рівномірно розподілена по елементах, а глобальна похибка задовольняє наперед визначений критерій точності. Це призводить до виникнення підобластей, на яких локальна похибка є дуже великою. Для того, щоб визначити такі підобласті, було запропоновано апостеріорні оцінки похибки, які, використовуючи скінченноелементну апроксимацію, дозволяють оцінити локальну похибку дискретизації. Отриманий розподіл похибки можна використати для зміни (адаптації) параметрів дискретизації за МСЕ, а саме, діаметра скінченноелементної сітки ( $h$ -адаптивність), поліноміального порядку базисних функцій ( $p$ -адаптивність), або одночасно обох параметрів ( $hp$ -адаптивність). Цією роботою автори мають намір розпочати цілий цикл статей, присвячених різним аспектам  $h$ -адаптивного моделювання складних задач математичної фізики на основі МСЕ. У даній роботі, яка є першою частиною цього циклу, розглядається питання побудови апостеріорних оцінок похибки на прикладі задачі теорії пружності анізотропного тіла.

### 1. Постановка задачі

Розглянемо двовимірну лінійну задачу теорії пружності, яка описується системою еліптичних диференціальних рівнянь в часткових похідних другого порядку [1]

$$\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

та граничними умовами

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \text{ на } \Gamma_u, \quad \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} n_j = p_i \text{ на } \Gamma_p \quad i=1,2, \quad (2)$$

де  $\Omega$  — обмежена область з неперервною за Ліпшицем границею  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_p = \emptyset$ ,  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x})$  — шуканий вектор переміщень у точці пружного тіла  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  — заданий вектор масових сил,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  — заданий вектор переміщень на частині границі  $\Gamma_u$ ,  $p_i$  — компоненти заданого вектора поверхневого навантаження на частині границі  $\Gamma_p$ ,  $n_j$  — компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до границі області  $\Gamma$ ,  $\sigma_{ij}$  — компоненти тензора напружень  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{D}$  — матриця пружних сталих закону Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

де  $\mathbf{S}$  — матриця диференціальних операторів, за допомогою якої компоненти тензора деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}$  виражаються через переміщення

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{u}. \quad (4)$$

Тобто, задача дослідження пружного стану тіла, що займає область  $\Omega$  і знаходиться під дією системи зовнішніх об'ємних  $\mathbf{f}$  та поверхневих  $\mathbf{p}$  сил, полягає у визначенні вектора переміщень  $\mathbf{u}$  і тензора напружень  $\boldsymbol{\sigma}$ , які задовольняють рівняння (1)—(4).

З метою застосування МСЕ для чисельного розв'язання сформульованої задачі зробимо перехід до еквівалентної варіаційної постановки. Для цього введемо простір кінематично допустимих векторів переміщень :

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v}_i = 0 \text{ на } \Gamma_u, \mathbf{v}_i \in \mathbf{H}^1(\Omega), i=1,2 \right\}, \quad (5)$$

де  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  — простір Соболева, функцій, інтегрованих з квадратом в області  $\Omega$  разом з частковими похідними першого порядку. Домножимо скалярно рівняння рівноваги (1) на довільну функцію  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , результат проінтегруємо в області  $\Omega$ , використовуючи формулу Гріна, граничні умови (2) та співвідношення (3)—(4). Тоді отримаємо варіаційне рівняння наступного вигляду:

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (6)$$

Вигляд білінійної форми  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  та функціоналу  $\langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle$  можна знайти у роботах автора [2, 3]. Тепер можна сформулювати таку варіаційну задачу для визначення узагальненого розв'язку лінійної статичної задачі теорії пружності (1)—(4): знайти  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  таку, що задовольняє варіаційне рівняння (6).

## 2. Структура $h$ -адаптивного обчислювального процесу

Повністю автоматизована числова схема підвищення точності розрахунків на основі  $h$ -адаптивної версії МСЕ, метою якої є отримання розв'язку заданої точності, містить три етапи, які повинні здійснюватися циклічно (рис. 1):

- 1) отримання розв'язку на початковій сітці та **оцінка його точності за допомогою апостеріорної оцінки похибки**;
- 2) найбільш ефективно **прогнозування локального згущення сітки**, необхідного для досягнення заданої точності;
- 3) **згущення сітки**, отримання нового розв'язку і оцінка нової похибки з подальшим поверненням на другий крок, якщо нова похибка перевищує бажану.

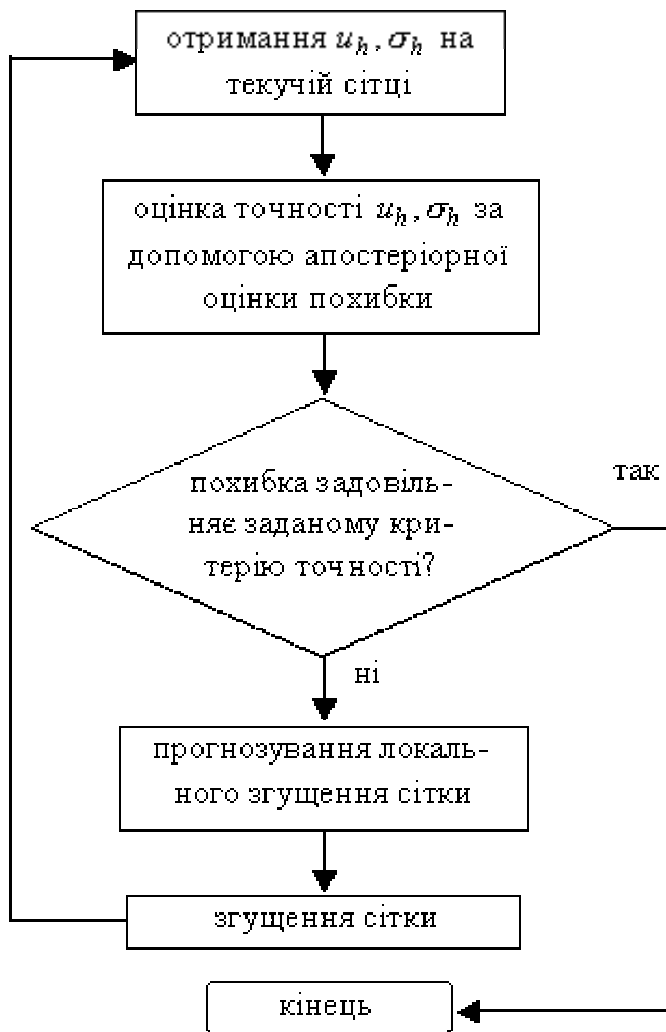


Рис. 1. Блок-схема повного  $h$ -адаптивного обчислювального процесу

нюється автоматично. Більше того, поставлена мета досягається шляхом побудови оптимальної в сенсі рівномірного розподілу локальної похибки дискретизації сітки, завдяки чому вдається отримати наближений розв'язок без великих локальних градієнтів. Розглянемо коротко основні моменти першого етапу запропонованого  $h$ -адаптивного обчислювального процесу.

При реалізації даного процесу на перший план виходять питання ефективності та економності. У зв'язку з цим дуже важливо гарантувати, щоб:

а) прогнозування локального згущення сітки було таким, щоб бажана точність досягалася найменшим числом кроків 2) і 3);

б) похибка оцінювалася точно на усіх етапах проведення обчислень;

в) втручання користувача в обчислювальний процес має бути зведене до мінімуму, тобто користувач задає лише вхідну інформацію, таку як геометрія області, крайові умови, прикладене навантаження, очікувану точність наближеного розв'язку та початкову скінченноелементну сітку на першому етапі цього процесу.

У результаті користувач повинен отримати числовий розв'язок вихідної задачі з заданою точністю, причому ітераційна процедура послідовного досягнення заданої точності апроксимації здійснюється автоматично.

### 3. Апостеріорні оцінки похибки

Багато апостеріорних оцінок похибки було представлено у літературі останнім часом. Запропоновані апостеріорні оцінки похибки можна розділити на три основних групи. До першої групи слід віднести оцінки типу “residual”, вперше запропонованої у роботі [5]. Суть оцінок даного типу зводиться до побудови певним чином функціоналів від нев’язки (residual), які повинні задовольняти так звані умови щільності (consistency conditions) [6], на основі яких і визначаються локальні місця найбільшого градієнта чисельного розв’язку при переході через спільну границю між суміжними скінченними елементами. У цих випадках потрібне згущення скінченноелементної сітки. Другу групу апостеріорних оцінок складають оцінки інтерполяційного типу. Роботу [7] можна вважати новаторською у цьому напрямку. Третю групу методів апостеріорної оцінки становлять методи оцінки постпроцесорного типу. Перша оцінка даного типу була запропонована у роботі [8]. Ця оцінка більше відома у літературі під назвою  $Z^2$ -оцінки [9,10,11]. Основна ідея оцінок даного типу полягає у тому, що поряд зі “стандартними” напруженнями, отриманими безпосередньо із скінченноелементної апроксимації компонентів вектора переміщень, обчислюються так звані “згладжені” (smoothed) напруження, які в певному сенсі є більш точними. Різниця між ними використовується для наближеного обчислення енергетичної норми похибки. У  $Z^2$ -оцінці, наприклад, для цього використовується так звана техніка відновлення (patch recovery technique) [12], а у роботі [13] пропонується обчислювати “згладжені” напруження за допомогою методу скінченних різниць. Найсуттєвішою перевагою оцінок постпроцесорного типу є їх універсальність, простота чисельної реалізації та впровадження їх в існуючі програмні комплекси реалізації МСЕ. Детальне порівняння відомих на той час апостеріорних оцінок похибки було проведено у роботі [6], автори якої дійшли висновку, що найефективнішою виявилася  $Z^2$ -оцінка. Тому в даній роботі в основу побудованих  $h$ -даптивних чисельних схем МСЕ покладено саме цю апостеріорну оцінку.

Розглянемо варіаційну задачу (6). Використовуючи скінченноелементну апроксимацію

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \mathbf{N}\tilde{\mathbf{U}}, \quad (7)$$

де  $\mathbf{N}$  — система фінітних базисних функцій МСЕ, за допомогою стандартної процедури Бубнова-Гальоркіна отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження вузлових значень компонентів вектора переміщень:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{R}, \quad (8)$$

де  $\mathbf{A}$  — матриця жорсткості,  $\mathbf{R}$  — вектор навантаження. Скінченноелементна апроксимація компонентів тензора напружень  $\sigma_h$  задається законом Гука (3).

Наближений розв’язок  $\mathbf{u}_h, \sigma_h$  відрізняється від точного  $\mathbf{u}, \sigma$ , і різниця між ними визначає похибку:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \quad (9a)$$

$$\mathbf{e}_\sigma = \sigma - \sigma_h. \quad (9b)$$

Очевидно, що з таким поточковим означенням похибки дуже важко працювати чисельно, і тому на практиці для вимірювання похибки використовуються різні норми. Найчастіше в скінченноелементному аналізі користуються енергетичною нормою похибки, яка у випадку задачі статичної теорії пружності має вигляд:

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\mathbf{e}_\sigma)^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{e}_\sigma) d\Omega}. \quad (10)$$

На практиці отримати точний розв'язок реальних інженерних задач вдається в дуже рідкісних випадках, тому оцінка величини похибки у будь-якій нормі неодмінно включає порівняння наближеного розв'язку  $\mathbf{u}_h$  з іншим розв'язком  $\mathbf{u}^*$ , який в певному сенсі є точнішим:

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}_h, \quad (11a)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h. \quad (11b)$$

Найпростіший, але дорогий у сенсі обчислювальних затрат і неефективний спосіб отримання  $\mathbf{u}^*$  — згущення сітки удвічі та проведення повторного розрахунку. Тоді замість (10) матимемо

$$\|\tilde{\mathbf{e}}\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{e}}_\sigma)^T \mathbf{D}^{-1}(\tilde{\mathbf{e}}_\sigma) d\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h)^T \mathbf{D}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega}. \quad (12)$$

Використовуючи той факт, що асимптотична швидкість збіжності скінченно-елементного розв'язку може бути записана як

$$\|\mathbf{e}\| = O(h^{\min(p,\lambda)}), \quad (13)$$

де  $p$  — порядок поліномів в базисних функціях  $\mathbf{N}$  і  $\lambda$  — порядок сингулярності (якщо вона присутня), можна показати, що показник ефективності оцінки похибки  $\theta$  визначений як

$$\theta = \frac{\|\tilde{\mathbf{e}}\|}{\|\mathbf{e}\|}, \quad (14)$$

задовольняє нерівність [4]:

$$\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\min(p,\lambda)}\right) \leq \theta \leq \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\min(p,\lambda)}\right). \quad (15)$$

Ефективність оцінки похибки значно погіршується, коли розв'язок є сингулярним. Саме тому у  $h$ -адаптивному процесі дуже важливим є питання побудови “оптимальної” сітки, тобто такої сітки, для якої розподіл похибки є рівномірним. Тоді, як відомо [5], сингулярна залежність розв'язку відсутня, тобто у (13) маємо  $\lambda = 0$ .

Якщо для отримання покращеного розв'язку  $\mathbf{u}^*$  використовується процес, який включає вищий порядок збіжності, тобто:

$$\|\mathbf{e}\| = O(h^{(p+\alpha,\lambda)}), \quad (16)$$

де  $\alpha > 0$ , то можна показати [4], що показник ефективності у випадку відсутності сингулярності обмежений як

$$1 - O(h^\alpha) \leq \theta \leq 1 + O(h^\alpha), \quad (17)$$

а коли сингулярність присутня, то:

$$1 - O(1) \leq \theta \leq 1 + O(1), \quad (18)$$

де  $O(1)$  представляє додатню константу, що не залежить від  $h$ . З (17) і (18) випливає потреба в оптимальній сітці, тому що показник ефективності  $\theta$  прямуватиме до одиниці тільки у випадкові відсутності сингулярності.

Розглянемо детальніше процедуру отримання покращеного розв'язку  $\sigma^*$  у  $Z^2$ -оцінці. Для цього припускається, що напруження  $\sigma^*$  інтерполуються за допомогою тієї ж системи базисних функцій, що і переміщення, тобто:

$$\sigma^* = \mathbf{N}\bar{\sigma}^*, \quad (19)$$

де  $\bar{\sigma}^*$  — вектор вузлових значень напружень і використовується рівняння проектування:

$$\int_{\Omega} \mathbf{P}^T (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega = 0. \quad (20)$$

Підставивши співвідношення (3—4) і (19) у рівняння (20), отримаємо:

$$\bar{\sigma}^* = \mathbf{A}^{-1} \left( \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{P} d\Omega \right) \bar{\mathbf{u}}, \quad (21)$$

де  $\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{P} d\Omega$ .

Відомо, що випадок, який відповідає середньоквадратичній апроксимації  $\sigma_h$ , тобто коли  $\mathbf{P} = \mathbf{N}$ , дає кращий порядок апроксимації [14], при якому, в позначеннях співвідношення (16)  $\alpha > 0$ . Отже, наближений розв'язок  $\sigma^*$  є більш точною апроксимацією узагальненого розв'язку, ніж  $\sigma_h$ , і його можна використати в оцінці похибки  $e_{\sigma}$ , тобто покласти:

$$e_{\sigma} \approx \tilde{e}_{\sigma} = \sigma^* - \sigma_h. \quad (22)$$

У загальному випадку точність обчислень визначається відносною похибкою, яка у термінах енергетичної норми має наступний вигляд:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|\mathbf{u}\|} \cdot 100\%, \quad (23)$$

причому відносна похибка  $\eta$  може бути як глобальною (обчисленою на всіх скінченних елементах області  $\Omega$ ), так і локальною (обчисленою на окремих скінченних елементах). У практичних задачах точний розв'язок  $\mathbf{u}$  невідомий, тому енергія деформації може бути оцінена як

$$\|\mathbf{u}\|^2 \approx \|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\tilde{e}\|^2, \quad (24)$$

де  $\|\mathbf{u}_h\|^2$  - енергія деформації скінченноелементної апроксимації, а  $\|\tilde{e}\|^2$  - похибка на біжучій сітці, тобто похибка для оцінки якої використовується покращений розв'язок  $\sigma^*$ . Отже, відносна процентна похибка  $\eta$  обчислюється так:

$$\eta = \sqrt{\frac{\|\tilde{e}\|^2}{\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\tilde{e}\|^2}}. \quad (25)$$

1. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
2. Григоренко А.Я., Дьяк И.И., Макар В.М. Решение пространственной динамической задачи теории упругости для анизотропных тел // Прикл. механика. — 1998. — Т. 34, № 5. — С. 24—31.
3. Дьяк И.И., Макар В.М. Дослідження просторової динамічної задачі теорії пружності для неоднорідних анизотропних тіл // Вісн. Львів. ун-ту. — 1996. — Вип. 44. — С. 50—57.
4. Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z. Adaptivity and mesh generation // Int. J. Numer.

*Meth. Eng.* — 1991. — V. 32. — P. 783-810. 5. Babuska I. and Rheinboldt W.C. Error estimates for adaptive finite element computations // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1978. — V. 15. — P. 736—754. 6. Babuska I., Strouboulis T., Upadhyay C., Gangaraj S., Copps K. Validation of a posteriori error estimators by numerical approach // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 1994. — V. 37. — P. 1073—1123. 7. Eriksson K., and Johnson C. An adaptive finite element method for linear elliptic problems // *Math. Comp.* — 1988. — V. 50. P. 361—383. 8. Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 1987. — V. 24. — p. 337—357. 9. Ainsworth M., Craig A.W., Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. Analysis of the  $Z^2$  a posteriori error estimator in the finite element method // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 1989. — V.28. — P. 2161—2174. 10. Fuenmayor J.F., Oliver J.L., Rodenas J.J. Extension of the  $Z^2$  error estimator to shape sensitivity analysis // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 1997. — V. 40. — p. 1413—1433. 11. Oliver J.L., Fuenmayor J.F. Analysis of the effectivity of the  $Z^2$  error estimator // *Optimization of structural systems and applications in Hernandez S. and Brebbia C.A. (eds). — Elsevier, London — 1993. — P. 309—324.* 12. Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 1992. — V. 33. — P. 1331—1364. 13. Dow J.O., Harwood S.A., Jones M.S., Stevenson I. Validation of a finite element error estimator // *AIAA Journal.* — 1991. — V. 29, № 10. — P. 1736—1742. 14. Hinton E. and Campbell J.S. Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 1974. — V. 8. — P. 461—480.