

## МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ ПРОЕКТУВАННЯ

УДК 621.396.6.001.63

**М.В. Лобур**

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра САПР

### **УЗАГАЛЬНЕНИЙ АНАЛІЗ РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ І МЕХАНІЧНИХ ОСЦИЛЯТОРНИХ МОДЕЛЯХ ЯК БАЗОВИХ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ МІКРОЕЛЕКТРОННИХ КОМПОНЕНТ ВБУДОВАНИХ СИСТЕМ**

© Лобур М.В., 2003

**З позицій ізоморфізму вимушених механічних і електромагнітних коливань узагальнені релаксаційні процеси в динамічних станах коливних осциляторів як базові моделі для математичного проектування мікроелектронних компонент вбудованих систем. Проведений роздільний аналіз для активної і дисипативної складової обміну енергіями між взаємодіючими коливної системи в резонансній області.**

**From a position of isomorphism of the compelled mechanical and electromagnetic fluctuations relaxation processes in dynamic conditions oscillatory as base models for mathematical designing microelectronic components of the built – in systems are generalized. The divided analysis for active and dissipative component of an energy exchange between cooperating components of oscillatory system in resonant area is carried out.**

Сучасне покоління швидкодіючих інтегральних схем (ШІС) і вбудованих в них систем (ВС) – це високого рівня інтеграція механічних елементів, компонентів, давачів, вимикачів та електронних пристроїв на спільній підкладці, котрі продукуються під час процесу мікротехнології ШІС вимагають використання сучасних методів аналізу і моделювання процесів, які в них відбуваються. Як показує аналіз тенденцій розвитку ВС, актуальною є необхідність моделювання їх в єдиному програмному комплексі разом із схмотехнічним вирішенням.

Важливою ділянкою ВС є пристрої для фільтрації сигналів. Відомо, що в їх основу покладені осциляторні моделі і важливу роль в розвитку коливань відіграють процеси релаксації енергії. Їх аналіз сприяє не лише універсалізації і досконалості, але й адекватності вибору моделей симуляції компонентів ВС.

У запропонованій роботі методом ізоморфізму аналізуються коливні процеси в електромагнітних і механічних осциляторах з врахуванням каналів релаксації енергії, що надзвичайно актуально під час проектування і виготовлення мікрорезонаторних комплексів для обробки сигналів.

Зазначимо, що ідею про аналогію між коливаннями механічного і електричного осциляторів висловив ще в 1873 році Максвелл, висунувши гіпотезу про ізоморфність

електричного контура механічній коливній системі, де в основу електромеханічної аналогії було покладено відповідність між силою електричного струму та швидкістю руху коливної точки. Електромеханічна аналогія схем вимушених електромагнітних та механічних коливань зображена на рис. 1 [1—3].

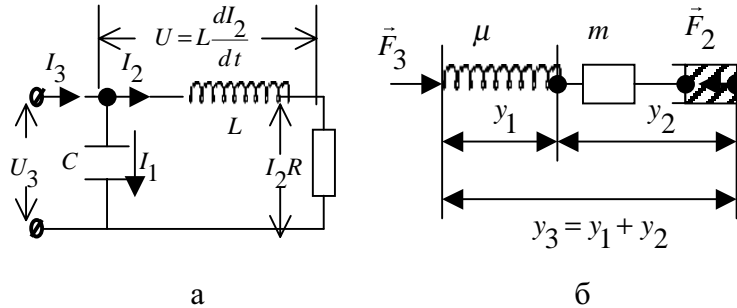


Рис. 1

Виходячи із неї та із законів Ньютона і Ома переконаємось, що величини

$$|Z_m| = \frac{F}{dy/dt} \quad \text{і} \quad |Z_m| = \frac{U}{dq/dt} \quad (1)$$

відіграють роль механічного та електричного імпедансів кіл. У механічному колі він визначає ту силу, яку треба надати, щоб його швидкість змінити на одиницю, тоді як в RLC-контурі електричний імпеданс дорівнює напрузі, яка збуджує в ньому електричний струм силою в один ампер. Тому за умови синусоїдності вимушені коливання описуються узагальненим диференціальним рівнянням

$$\alpha \frac{d^2 \zeta(\Omega, t)}{dt^2} + \beta \frac{d\zeta(\Omega, t)}{dt} + \lambda \zeta(\Omega, t) = A_0 \cos \Omega t, \quad (2)$$

з пробним розв'язком  $\zeta(\Omega, t) = \tilde{\Lambda}(\Omega) \cdot \exp(i\Omega t)$ , де  $\Omega$  — частота вимушуючої дії амплітуди  $A_0$ .

Рівняння для амплітуди  $\tilde{\Lambda}(\Omega)$  зручно виразити у комплексній формі як,

$$\tilde{\Lambda}(\Omega) = -i \frac{A_0}{\alpha} \frac{1}{\Omega \cdot \tilde{Z}}, \quad (3)$$

тоді із (2) одержимо, що комплексні імпеданси дорівнюють

$$\tilde{Z} = \beta + i \left( \Omega \alpha - \frac{\lambda}{\Omega} \right) = \begin{cases} R + i \left( \Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right) \\ r + i \left( \Omega m - \frac{\mu}{\Omega} \right) \end{cases}. \quad (4)$$

Пересвідчуємось, що коли частота зовнішньої дії  $\Omega^2 \alpha \gg \lambda$ , то швидкість зміни динамічних координат в контурі відставатиме за фазою від темпу дії зовнішнього джерела. У випадку  $\Omega^2 \alpha \ll \lambda$  швидкість зміщення та сила струму відставатимуть від фази зовнішньої дії. Лише за умови, що між ними фазовий зсув  $\text{tg } \phi = \frac{\text{Im } \tilde{Z}}{\text{Re } \tilde{Z}}$  відсутній, амплітуда сигналу  $\zeta(\Omega, t)$

різко зростатиме і настає резонанс швидкості руху механічного коливного контура та сили електричного струму у електромагнітному контурі.

У випадку механічного контура загальне зміщення осцилятора від положення рівноваги дорівнює  $y_3 = y_1 + y_2$ , звідки одержуємо відомий у фізиці закон складання швидкостей  $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ . Тут  $v_1 = \mu \frac{dF_3}{dt}$  — швидкість руху кінця пружини, на який ззовні діє осцилююча сила  $F_3$ . Вона збуджує силу інерції  $F_1 = m \frac{d^2 y_1}{dt^2}$ , а сила опору рухові (або демферна сила)  $F_2 = r v_2 = r \frac{dy_2}{dt}$  визначається швидкістю руху інерційної маси в середовищі опору.

Через реактанси амплітудне значення швидкості вимушених коливань осцилятора виражається так:

$$v_{3m} = \frac{F_{3m}}{\sqrt{r^2 + \left(\Omega m - \frac{\mu}{\Omega}\right)^2}} \quad (5)$$

і за умови  $\Omega m = \frac{\mu}{\Omega}$  є найбільшою. Суть цього явища полягає у тому, що під час дії зовнішньої синусоїдної сили  $F_3 = F_{3m} \cos \Omega t$  швидкість зміни координати  $y_1$  зсунута за фазою  $v_1 = v_{1m} \cos(\Omega t - \phi_{10})$ . За умови, що  $r = 0$ ;  $m = 0$  найбільше її значення дорівнює  $v_{1m} = \frac{F_{3m} \Omega}{\mu}$ . Фаза вимушених коливань визначається із рівності  $\operatorname{tg} \phi_{10} = -\infty$ , звідки

$$\phi_{10} = \left(2m + \frac{3}{2}\right)\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Аналогічно швидкість зміни іншої координати  $y_2$  дорівнює  $v_2 = v_{2m} \cos(\Omega t - \phi_{20})$  і її найбільше значення відповідає умові  $r = 0$  і  $\mu = 0$  (відсутня пружина):  $v_{2m} = \frac{F_{3m}}{m\Omega}$ . Для неї фаза коливань дорівнює:  $\operatorname{tg} \phi_{20} = +\infty$ , звідки

$$\phi_{20} = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Порівнюючи між собою вирази (6) і (7) одержуємо, що за умови резонансу між швидкостями коливань протилежних кінців інерційного вантажу із масою  $m$  встановлюється різниця фаз  $\phi_{01} - \phi_{02} = \pi$ , тобто коливаються вони у протифазі і амплітуда

$$v_{3m} = |v_{1m} - v_{2m}| = F_{3m} \left| \frac{\Omega}{\mu} - \frac{1}{m\Omega} \right|.$$

Ця електромеханічна аналогія між коливними процесами у системах дозволяє сформулювати узагальнений вираз для закону Джоуля-Ленца — як енергетичних втрат осцилятора, яких він зазнає під час вимушених коливань в дисипативному середовищі, усереднених протягом деякого періоду тривалості  $T$ . З цією метою запишемо складові дисипативної функції Релея  $Q(\Omega, \beta, t)$ , яка описує енергообмін між осцилятором і

середовищем опору та активної функції  $A(\Omega, \beta, t)$ , що описує енергообмін між осцилятором та джерелом зовнішньої дії так:

$$Q(\Omega, \beta, t) = -\frac{1}{2} \beta \left( \frac{y}{q} \right)_m^2 \Omega^2 \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2\Omega} \sin[2(\Omega t - \phi)] \\ t + \frac{1}{2\Omega} \sin[2(\Omega t - \phi)] \end{pmatrix},$$

$$A(\Omega, \beta, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} F \\ E \end{pmatrix}_0 \left( \frac{y}{q} \right)_m \Omega \begin{pmatrix} t \sin \phi + \frac{1}{2\Omega} \cos(2\Omega t - \phi) \\ t \sin \phi - \frac{1}{2\Omega} \cos(2\Omega t - \phi) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Переконаємось, що ці залежності дзеркально симетричні відносно часової осі. Тому динамічний баланс енергій у коливній системі визначатиметься співвідношенням між ними.

Легко також зауважити, що неосцилюючі складові в цих виразах перед дужками

$$-\frac{1}{2} \beta \left( \frac{y}{q} \right)_m^2 \Omega^2 \quad \text{та} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} F \\ E \end{pmatrix}_0 \left( \frac{y}{q} \right)_m \Omega \quad (9)$$

це потужності дисипативних втрат енергії типу Джоуля-Ленца в коливних контурах. Механізм їх прояву в коливних системах наочно ілюстрований на рис. 2, де введене прийняте позначення  $2\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ . Як видно із цього рисунка, зовнішнє джерело компенсує втрати енергії в колі так, щоб підтримати в ньому вимушені коливання (рис. 3,а); на цьому рисунку знак дисипативної частини енергії вибраний протилежним, щоб відповідні графіки накласти один на один і часова вісь скерована вертикально вгору). Ця компенсація особливо чітко проявляється в резонансній області спектру частот сигналу (рис. 3, б).

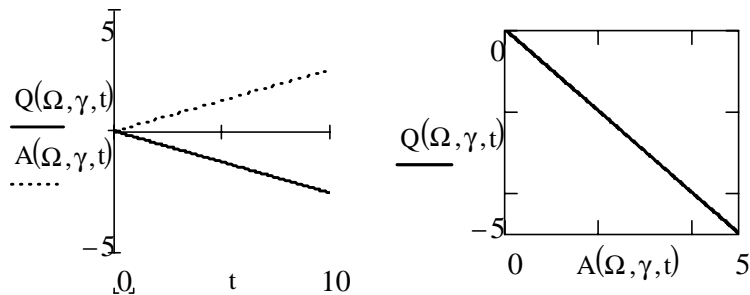


Рис. 2

Для порівняння на рис. 4 подані також дисперсії інших складових функцій релаксації  $Q(\Omega, \beta, t)$  та  $A(\Omega, \beta, t)$ . На резонансній частоті обидві криві проходять через нульове значення, що й забезпечує синфазність швидкості зміни динамічного параметра коливного контура та імпульса дії на нього з боку зовнішнього джерела. З точки зору електромеханічної аналогії між коливними процесами у електромагнітному та механічному контурах зауважимо таке. Суть цього процесу у системах із зосередженими параметрами полягає у періодичному взаємоперетворенні потенціальної енергії в кінетичну і магнітної  $U = L \frac{d^2 q}{dt^2}$  в електричну. Оскільки з позицій їх осцилограм ці фізичні величини зсунуті за фазами на  $\pi/2$ , то це означає, що пружність зв'язку із станом

рівноваги та інерційність осцилятора є реактивними елементами, аналогічно ємності та індуктивності в електромагнітному контурі.

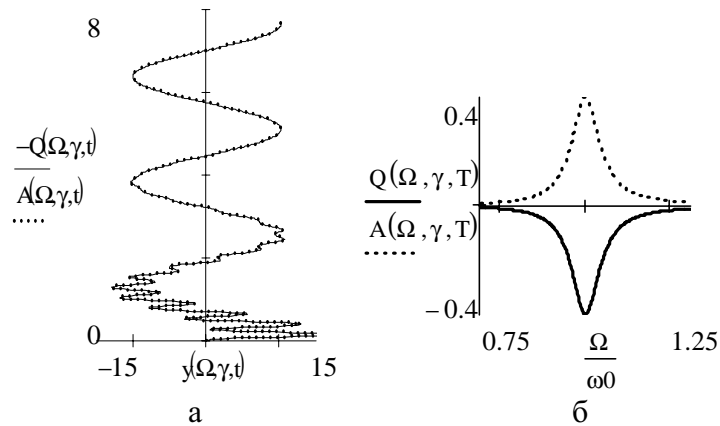


Рис. 3

Зазначимо, що у даній роботі не деталізувалась модуляція сигналу внаслідок інтерференційних процесів між коливними станами. Як показано в [4], досить ефективною для цих цілей є маятникова модель. Це тема іншої роботи.

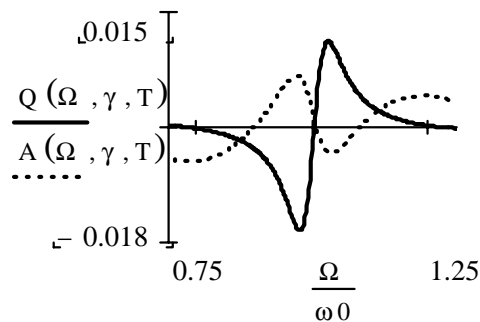


Рис. 4

Основний висновок роботи можна сформулювати так. Комплексний аналіз з позицій ізоморфізму між вимушеними коливаннями в механічних і електричних колах з врахуванням реальних процесів дисипації енергії дозволяє розробити узагальнену осциляторну модель для математичного проектування компонентів в схемотехнічних програмах аналізу.

1. Информатика. — М.: Педагогика-пресс, 1994. — 349 с. 2. Пейн Г. Физика колебаний и волн. — М.: Мир, 1979. — 389 с. 3. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа "маятник". — Алма-Ата: Наука, 1984. — 254 с. 4. Кособуцький П.С., Лобур М.В., Кособуцький Я.П. Моделивання плоских коливань математичного маятника координатним методом. Актуальні проблеми викладання та навчання фізики у вищих освітніх закладах. // Матеріали міжн. наук.-метод. конф. — Львів, 7-9 жовтня. — Львів: Ліга-Прес, 2002 р. 81-85.