УДК 62-523.8

А.Р. Сидор
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра АСУ

ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВІДМОВ ДЛЯ ЕЛЕМЕНТІВ ІЄРАРХІЧНИХ РОЗГАЛУЖЕНИХ СИСТЕМ

Елементи вищих рівнів ієрархічних розгалужених систем мають інтенсивність відмов, близьку до константи, тому відмови таких елементів описуються експоненційним законом. Закони відмов для елементів вихідного рівня вибираються у цій роботі на основі порівняння різних типів розподілу ймовірностей.

Elements of upper levels of hierarchical ramified systems have the hazard function close to a constant, therefore lifetime of such elements is circumscribed by the exponential distribution. Lifetime distribution functions for elements of the output level are chosen in this paper because of a comparison of different types of probability distribution.

Для кількісної оцінки надійності роботи будь-якого виробу необхідно мати інформацію про поведінку цілої групи таких виробів. Залежність кількості працездатних елементів від часу $n(t)$ представляється двома способами: у вигляді гістограми або у вигляді лінійної апроксимації [1]. Найпростіша форма емпіричної функції надійності P*(t) одержується діленням $n(t)$ на N_0 — початкову кількість елементів. Діленням кількості елементів, які вийшли з ладу (відмовили) за інтервал часу Δt, на $N_0\,\Delta t$ дає емпіричну густину відмов $a(t)$. Остання функція залежить від того, в якому місці на осі часу розглядається інтервал Δt. Цього можна уникнути, якщо N_0 замінити на значення функції $n(t)$ у початковій точці часового інтервалу, який розглядається. Це призводить до емпіричної функції азарту $\lambda^*(t)$. Формула для емпіричної функції надійності $P^*(t)$ трохи змінюється для загального випадку, коли інтервали $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ несталі. Четверта емпірична функція визначається як $Q^*(t) = 1\text{-}P^*(t)$ і називається емпіричною функцією ненадійності [2]. Емпірична функція надійності $P^*(t)$ є реалізацією для окремої групи компонентів імовірності безвідмовної роботи $P(t)$. Так само емпірична густина відмов $a^*(t)$, емпірична функція азарту $\lambda^*(t)$, емпірична функція ненадійності $Q^*(t)$ є відповідно реалізаціями густини функції відмов $a(t)$, інтенсивності відмов $\lambda(t)$, імовірності відмови $Q(t)$.

Для кількісної оцінки надійності функціонування неремонтованих виробів використовують характеристики та поняття, трактування яких запозичено з теорії ймовірностей. Це випливає з того, що відмови мають випадковий характер та описуються ймовірнісними залежностями. Характеристики надійності мають двояке трактування: емпіричне, на основі статистичних досліджень, і теоретичне, на основі теорії ймовірностей. Теоретичне трактування характеристик надійності дало змогу трансформуватися теорії надійності в науку зі своїм апаратом досліджень.

Імовірність безвідмовної роботи $P(t)$, — один з основних показників надійності — є ймовірністю того, що час τ безвідмовної роботи виробу буде більшим від заданого часу t.

Імовірність відмов $Q(t)$ є ймовірністю того, що час τ безвідмовної роботи елемента чи системи буде меншим від заданого часу t [3].

Для оцінки тенденції зміни ймовірності відмов $Q(t)$ служить густина функції відмов (частота відмов) $a(t)$, яка є густиною розподілу часу наробітку до відмови та визначається як похідна від імовірності відмов [4].

Часто як показник надійності приймають інтенсивність відмов $\lambda(t)$, яка може бути означена як відношення густини функції відмов до ймовірності безвідмовної роботи. Інтенсивність відмов можна трактувати як кількість відмов неремонтованого виробу з партії виробів за одиницю часу після даного моменту часу за умови, що до цього моменту відмова не виникла.

Якщо відома будь-яка з чотирьох функцій $P(t)$, $Q(t)$, $a(t)$, $\lambda(t)$, то можна визначити три інші.

Для одержання розподілу відмов існують два способи. Один з них полягає в обробці експериментальних даних при випробуваннях на надійність масових виробів або в результаті спостереження за роботою різного обладнання в реальних умовах. Інший зводиться до постулювання на основі фізичних міркувань якогось закону розподілу відмов, який з певним ступенем наближення відображає справжній стан речей. Найчастіше обидва способи використовуються спільно.

При сталій інтенсивності відмов, яку позначають λ $(\lambda > 0)$, одержується експоненційний закон розподілу відмов, для якого характерні найпростіші співвідношення:

$$P(t)=e^{-\lambda t},\quad Q(t)=1-e^{-\lambda t},\quad a(t)=\lambda e^{-\lambda t},\quad \lambda(t)=\lambda$$

За аналогією з процесами масового обслуговування можна говорити про найпростіший потік відмов з інтенсивністю λ. При цьому ймовірність появи за час t точно k відмов визначається розподілом Пуассона. При експоненційному законі середній час безвідмовної роботи дорівнює його математичному сподіванню $\frac{1}{\lambda}$. Тому, якщо закон розподілу мало відрізняється від експоненційного, то його можна розглядати як експоненційний із параметром λ, що дорівнює оберненій величині середнього часу безвідмовної роботи елемента (цей час визначається випробуванням достатньо великої кількості однорідних елементів). Експоненційний закон розподілу займає помітну позицію в задачах надійності [5]. Він буває придатним для опису характеристик складних систем навіть у випадку різних законів розподілу цих систем. Це пояснюється тим, що багато виробів проходять тренування безпосередньо після виготовлення в заводських умовах і до споживача вони надходять при стабільно низьких значеннях інтенсивностей відмов. Крім того, якщо для деяких елементів експоненційний закон може й не мати місця, то при заміні елементів, які відмовили, новими елементами може подіяти ефект перемішування, і відмови системи загалом підпорядковуватимуться експоненційному закону. Для експоненційного розподілу характерна властивість відсутності післядії. Компоненти, які відповідають цьому закону відмов, працюють так само, як і нові, поки не відмовлять. Верхні рівні ієрархічних розгалужених систем мають, як правило, експоненційний закон надійності елементів.

При дослідженні надійності часто працюють з процесами відновлення, які можна описати як пуассонівські процеси. Розглядається сукупність аналогічних елементів, придатних для виконання якоїсь функції. Елемент із цієї сукупності включається в роботу та функціонує, поки не відмовить. Тоді його зразу заміняють іншим елементом із сукупності, який працюватиме до своєї відмови й негайної заміни наступним елементом.

Відмови відбуваються у випадкові моменти часу, а їх потік можна розглядати як найпростіший вхідний потік однорідних подій (вимог). Для такого потоку ймовірність надходження тієї чи іншої кількості вимог протягом інтервалу часу залежить тільки від довжини цього інтервалу та не залежить від його розміщення на осі часу, причому вимоги надходять поодинці та незалежно одна від однієї. Імовірність n вимог за час t описується виразом

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

що відповідає розподілу Пуассона з параметром λt. Математичне сподівання розподілу Пуассона дорівнює його параметру, тому величина λt визначає середню кількість вимог, які надходять за час t. Звідси ясно, що λ — це середня кількість вимог за одиницю часу, або інтенсивність пуассонівського процесу. Пуассонівський процес надходження повідомлень пов'язаний з експоненційним розподілом. Інтервали між надходженнями повідомлень пуассонівського процесу з інтенсивністю λ розподілені експоненційно з параметром, що дорівнює тому самому значенню [2].

Для з'ясування, чи якийсь процес надходження повідомлень з відновленням є пуассонівським чи ні, можна використати один з кількох критеріїв погодженості. Відповідно до класичного χ^2 критерію погодженості процес спостерігають протягом багатьох періодів сталої тривалості, і кількість надходжень повідомлень для кожного періоду становить одне спостереження. Якщо процес спостерігають протягом n періодів, то відповідні спостережувані кількості перевіряються за χ^2 критерієм, чи є вони пуассонівськими [2]. Цей критерій має два недоліки: періоди спостереження повинні мати однакову тривалість; для того, щоб мати прийнятну кількість ступенів вільності, потрібна велика кількість спостережень. Перевагою критерію є відносна простота одержання даних.

Інший χ^2 критерій погодженості базується на інтервалах між надходженнями повідомлень. Процес спостерігають для одного або більше періодів часу, і фіксуються моменти надходжень повідомлень. Пізніше обчислюються інтервали між надходженнями повідомлень. Якщо дані одержуються з більш як одного періоду спостереження, то їх можна об'єднувати, ігноруючи неповний інтервал між надходженнями повідомлень у кінці одного й на початку наступного періоду. Обчислені на основі спостережень інтервали між надходженнями повідомлень потім перевіряються на експоненційність відповідно до χ^2 критерію погодженості. Хоча загальний час спостереження при цьому критерії може бути істотно меншим, ніж при попередньому, все ще потрібна велика кількість спостережень, щоб забезпечити прийнятну кількість ступенів вільності.

Важливою моделлю розподілу часу роботи до відмови є гамма-розподіл. Він задається двома додатними параметрами: параметром масштабу β і параметром форми розподілу α. Густина гамма-розподілу має вигляд

$$a(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}.$$

У теорії надійності цей розподіл використовується при цілих значеннях α. Зокрема, якщо відмова пристрою виникає тоді, коли відбудеться не менше α відмов його елементів, а відмови елементів підпорядковані експоненційному закону з параметром β, то густина функції відмов пристрою обчислюється за наведеною вище формулою густини гамма-розподілу, де β — інтенсивність відмов елементів пристрою, відмова якого викликається відмовою α елементів.

Гамма-розподіл має великий спектр форм. Окремим його випадком при $\alpha = 1$ є експоненційний розподіл. При зростанні α гамма-розподіл наближається до симетричного розподілу, а інтенсивність відмов має все більше виражений характер зростаючої функції часу.

Сума n незалежних випадкових величин, кожна з яких підпорядковується гамма-розподілу з параметрами α_i $(i = \overline{1,n})$, β, також має гамма-розподіл з параметрами $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, β.

У багатокомпонентних системах елементи можуть перебувати в різноманітних логічних зв'язках. Одним з найпоширеніших таких зв'язків нерезервованих систем є логічне послідовне з'єднання, при якому відмова хоча б одного елемента системи приводить до відмови системи загалом.

Для n послідовно з'єднаних елементів імовірність $P(t)$ безвідмовної роботи дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи всіх елементів:

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t).$$

Чим більша кількість елементів, з'єднаних логічно послідовно, тим імовірність безвідмовної роботи системи буде меншою. Функція інтенсивності відмов n послідовно з'єднаних елементів дорівнює сумі функцій інтенсивності відмов усіх елементів:

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t).$$

При логічному паралельному з'єднанні елементів система вийде з ладу тільки після відмови всіх елементів [1]. Середній час наробітку до відмови системи в цьому випадку дорівнює максимальному середньому часові наробітку до відмови елементів. Імовірність відмов n логічно паралельно з'єднаних елементів дорівнює добутку ймовірностей відмов усіх елементів

$$Q(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(t),$$

звідки для ймовірності безвідмовної роботи n логічно паралельно з'єднаних елементів одержимо

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P_i(t)\right).$$

Якщо відмови всіх елементів розподілені експоненційно з однією і тією ж інтенсивністю відмов λ, то функція інтенсивності відмов цих n паралельно з'єднаних елементів має вигляд

$$\lambda(t) = \frac{\lambda n \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-1}}{1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n}}.$$

При $n > 1$ ця функція $\lambda(t)$ залежить від t: при $t = 0$ вона дорівнює нулю, а при збільшенні t монотонно зростає до λ.

Розрахунки надійності на основі використання паралельно-послідовних структур відносно прості, що робить їх найбільш поширеними в інженерній практиці. Однак не завжди умову працездатності можна безпосередньо представити паралельно-послідовною структурою. Логіко-ймовірнісний метод дозволяє розраховувати ймовірність безвідмовної роботи для будь-якої логічної схеми з'єднань елементів, але при цьому вираз функції надійності може бути настільки громіздким, що з ним недоцільно працювати. Тому часто заміняють складну структуру еквівалентною паралельно-послідовною. До таких перетворень належать перетворення з еквівалентною заміною "трикутника" на "зірку" та навпаки, а також розклад складної структури за базовим елементом.

При заміні "трикутника" на "зірку" елементи "трикутника" позначають через *AB, BC, AC*, а елементи "зірки" - *A, B, C*, причому вершини "трикутника" та "зірки" V_1, V_2, V_3 залишаються без змін. Еквівалентність заміни означає, що ймовірність безвідмовної роботи системи з логічним з'єднанням "трикутник" є такою самою, як і системи з логічним з'єднанням "зірка". Формули еквівалентних перетворень мають вигляд

$$P_A(t) = \frac{E_4(t)}{E_1(t)}, \quad P_B(t) = \frac{E_4(t)}{E_2(t)}, \quad P_C(t) = \frac{E_4(t)}{E_3(t)},$$

де

$$E_1(t)=P_{BC}(t)+P_{AC}(t)P_{AB}(t)-P_{BC}(t)P_{AC}(t)P_{AB}(t),$$

$$E_2(t)=P_{AC}(t)+P_{BC}(t)P_{AB}(t)-P_{BC}(t)P_{AC}(t)P_{AB}(t),$$

$$E_3(t)=P_{AB}(t)+P_{BC}(t)P_{AC}(t)-P_{BC}(t)P_{AC}(t)P_{AB}(t),$$

$$E_4(t) = \sqrt{E_1(t)E_2(t)E_3(t)}\,.$$

Для здійснення зворотного переходу від "зірки" до "трикутника" точний аналітичний вираз отримати неможливо, тому користуються числовими ітераційними методами або наближеними формулами [2].

На противагу експоненційному закону відмов, для якого характерна відсутність післядії, нормальний закон може бути моделлю часу роботи до відмови для виробів, які не пройшли тренування на виробництві в початковий період експлуатації. Густина нормального розподілу має вигляд

$$a(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

де μ — математичне сподівання часу до відмови, σ — середньоквадратичне відхилення часу до відмови відносно μ. Зміна параметра не змінює форми густини розподілу, а приводить лише до зсуву кривої вздовж осі абсцис (вправо при зростанні μ та вліво при спаданні μ). При зростанні параметра σ зменшується максимальне значення густини розподілу. Характерною ознакою нормального розподілу є монотонне зростання функції інтенсивності відмов $\lambda(t)$. Нормальний розподіл широко застосовується в теорії надійності. Це пов'язано з тим, що якщо випадкова величина є сумою великої кількості взаємно незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму малий, то ця сумарна випадкова величина має закон розподілу, близький до нормального. Багато випадкових величин, наприклад, розподіл випадкових похибок вимірювань, мають нормальний закон розподілу.

Цей тип розподілу часто придатний для опису строків служби компонентів, тому представляє інтерес вивчення поведінки функції інтенсивності відмов $\lambda(t)$ для нормального розподілу. На жаль, ця функція не може бути виражена в скінченному вигляді, її можна побудувати тільки чисельно. Для обчислення її значень використовують табличний інтеграл Лапласа [6].

Бувають випадки явно несиметричних розподілів часу наробітку до відмови. Тоді за модель часто беруть логарифмічно нормальний (логнормальний) розподіл, який задається густиною розподілу відмов

$$a(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}},$$

де μ — математичне сподівання випадкової величини *ln t*; σ — середньоквадратичне відхилення величини *ln t* [2]. Цей тип розподілу застосовується, коли спостережуване значення випадкової величини становить випадкову частку явища, яке спостерігалося раніше.

Завданням дослідника є підбір такого закону розподілу, який би забезпечував адекватність моделі процесам відмови виробу. У той же час можливі ситуації, коли експериментальні залежності не відповідають жодному відомому закону розподілу протягом часу функціонування системи чи окремого елемента. Тоді часто користуються експериментальною кривою інтенсивності відмов $\lambda(t)$ для оперативного прийняття рішень з підвищення надійності. Така залежність дає змогу виявити деякі особливості й недоліки експлуатації технічних пристроїв, вказує на необхідність заходів щодо забезпечення потрібного рівня надійності. Типовою функцією інтенсивності відмов для терміну служби є *U*-подібна крива. Ця крива має три характерні ділянки: *A* — період припрацювання з високим рівнем інтенсивності відмов, коли ненадійні елементи або елементи з прихованими дефектами швидко відмовляють; *B* — період нормальної роботи, коли на інтенсивність відмов впливають різноманітні випадкові чинники, але сама інтенсивність відмов залишається сталою та мінімальною; *C* — період старіння, під час якого лавиноподібно зростає інтенсивність відмов у результаті зношування та старіння елементів. З точки зору забезпечення надійної роботи виробу його необхідно експлуатувати в період *B*. Для забезпечення більшої тривалості цього періоду потрібно скоротити період *A*. Цього досягають шляхом припрацювання та тренування пристроїв на заводі в умовах, близьких до експлуатаційних. Швидкість переходу з періоду *A* в період *B* може служити опосередкованим показником культури виробництва. Чим вища якість виготовлення й перевірки елементів, тим одноріднішою є продукція і тим швидше падає інтенсивність відмов, зумовлених виробничими причинами. При погіршенні якості виготовлення пристрою період *A* збільшується, і перехід до періоду *B* стає плавним. У період *A* відмови приблизно підпорядковуються гамма-розподілу або розподілу Вейбулла, у період *B* — експоненційному розподілу, а в період *C* — розподілу Релея або Вейбулла [2]. Насправді *U*-подібна крива є ідеалізацією, оскільки реальні компоненти рідко виявляють описаний тип поведінки функції інтенсивності відмов. Можлива поява одного або кількох локальних максимумів на графіку функції $\lambda(t)$, що вказує на необхідність перевірки конструкції, матеріалів, елементів і технології виготовлення для того, щоб з'ясувати причини збільшення інтенсивності відмов.

Коли потік відмов нестаціонарний, тобто густина потоку відмов змінюється з часом, інтенсивність відмов часто описується формулою

$$\lambda(t)=\lambda\beta t^{\beta-1},$$

що відповідає розподілу Вейбулла з додатними параметрами λ, β. Тут λ — параметр масштабу, який стискає чи розтягує криву, β — параметр форми розподілу. Перевагою розподілу Вейбулла є велика кількість форм, які можна отримати при різних значеннях параметрів розподілу. Окремим його випадком при $\beta = 1$ є експоненційний розподіл зі сталою інтенсивністю λ. При $\beta < 1$ інтенсивність відмов є монотонно спадною функцією, при $\beta > 1$ — монотонно зростаючою. Ця обставина дає можливість підбирати для дослідних даних параметри λ, β так, щоб розподіл найкраще відповідав цим даним. Розподіл Вейбулла існує для відмов пристрою, який складається з послідовно з'єднаних дубльованих елементів, для відмов, які виникають у результаті зношування і старіння [7, 8], та для інших подібних випадків.

Для опису параметрів надійності старіючих пристроїв добре підходить також розподіл Релея, який одержується з розподілу Вейбулла при $\beta = 2$, якщо ввести позначення $\lambda = \dfrac{1}{2\sigma^2}$.

При законі Вейбулла ймовірність безвідмовної роботи старіючого пристрою та ймовірність його відмови мають вигляд

$$P(t) = e^{-\lambda t^{\beta}},\ Q(t) = 1 - e^{-\lambda t^{\beta}},$$

де λ — параметр масштабу, β — параметр форми розподілу, який можна розглядати як коефіцієнт старіння. При законі Релея ймовірність безвідмовної роботи та ймовірність відмови мають вигляд

$$P(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},\ Q(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

де σ — параметр закону Релея, який є модою розподілу, тобто $t = \sigma$ є екстремумом густини функції відмов

$$a(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Закон Релея знайшов своє застосування при прогнозуванні відмов інформаційно-вимірювальних пристроїв на етапі інтенсивного спрацювання та старіння [4].

1. Лозинський О., Марущак Я., Костробій П. Розрахунок надійності електроприводів. — Львів, 1996. — 236 с. 2. Grosh D.L. A primer of reliability theory. — N.Y.: John Wiley & Sons, 1989. — 373 p. 3. ДСТУ 2860-94. Надійність техніки. Терміни та визначення. — Введ. 28.12.94. — К.: Держстандарт України, 1995. — 92с. 4. Обозовський С.С. Інформаційно-вимірювальна техніка. — К., 1993. — 424 с. 5. Mohammed Zayed Raqab. Optimal prediction-intervals for the exponential distribution, based on generalized order statistics//IEEE Transactions on Reliability. — N.Y., 2001. — Vol. 50, № 1. — P. 112—115 6. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. — К.: Техніка, 1975. — 766 с. 7. Jong-Wuu Wu, Tzong-Ru Tsai, Liang-Yuh Ouyang. Limited failure-censored life test for Weibull distribution // IEEE Transactions on Reliability. — N.Y., 2001. — Vol. 50, № 1. — P. 107—111. 8. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности / Пер. с англ. — М.: Советское радио, 1969. — 488 с.