ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.643 № 643, (2009) с. 87–93

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 87–93

ПЛОСКА ЗВ'ЯЗАНА ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОМЕХАНІКИ ДЛЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ З ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИМИ ГРАНИЦЯМИ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОЇ НЕОДНОРІДНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ

О. Гачкевич[a], Р. Мусій[b], Г. Стасюк[b]

[a] *ІППММ НАНУ, м. Львів*
[b] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 10 березня 2009 р.)

Використано кубічну апроксимацію розподілів ключових функцій – дотичної компоненти вектора напруженості магнітного поля, температури і компонент тензора динамічних напружень за товщинною координатою та інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа. Побудовано розв'язок плоскої зв'язаної задачі термомеханіки для електропровідного шару з плоскопаралельними границями за довільної неоднорідної нестаціонарної електромагнітної дії.

Ключові слова: шар, плоска зв'язана задача термомеханіки, неоднорідна нестаціонарна електромагнітна дія, кубічна апроксимація

2000 MSC: 74B05

УДК: 539.3

Вступ

Елементи сучасних конструкцій зазнають дії ударних теплових і механічних навантажень, інтенсивного рентгенівського випромінювання і внутрішніх нестаціонарних тепловиділень, зумовлених імпульсними електромагнітними діями [1]. Внаслідок цього в них виникають взаємозв'язані електромагнітні, теплові і механічні поля, які приводять до появи напружень, що можуть досягати критичних значень, аж до втрати несучої здатності конструкції. Відомі роботи [2, 3, 4, 5, 6], в яких досліджувався вплив ударних механічних і теплових дій на зв'язаність полів деформації і температури та величину динамічних напружень, що виникають у тілах канонічної форми. Проте вплив імпульсних електромагнітних полів, зокрема з модуляцією амплітуди, на процеси зв'язаності полів деформації і температури в літературі недостатньо вивчений. Тому є актуальним вивчення закономірностей взаємозв'язаних електромагнітних, теплових і механічних процесів в електропровідному шарі, зумовлених дією імпульсних електромагнітних полів.

I. Формулювання задачі

У статті сформульовано і побудовано розв'язок плоскої зв'язаної динамічної задачі термопружності для електропровідного шару з плоскопаралельними границями за дії імпульсного електромагнітного поля. Шар постійної товщини $2h$ віднесений до декартової системи координат $Oxyz$, площина xOy якої збігається зі серединною площиною шару. Основи шару $z = \pm h$ перебувають в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем і вільні від силового навантаження. Матеріал шару ізотропний неферомагнітний, а його фізико-механічні характеристики приймають сталими. Електромагнітне поле задане значеннями відмінної від нуля дотичної компоненти $H_y(x,z,t)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H} = \{0; H_y; 0\}$ на основах шару, тобто

$$H_y^{\pm}(x,t) = H_y(x, \pm h, t) \qquad (1)$$

Тут $H_y^{\pm}(x,t)$ задані функції, t – час.

Дія імпульсного ЕМП зумовлює виникнення в шарі нестаціонарних джоулевих тепловиділень $Q = \frac{1}{\sigma}\left(rot\vec{H}\right)^2$ та пондеромоторних сил $\vec{F} = \mu rot\vec{H} \times \vec{H}$, які створюють нестаціонарні температурне поле $T(x,z,t)$ та поле напружень $\sigma_{ik}(x,z,t)$ $(i,k = x,y,z)$. Тут σ коефіцієнт електропровідності, μ магнітна проникливість матеріалу шару. У загальному випадку ці поля є взаємозв'язаними. Отже, розрахункова схема задачі складається з двох етапів. На першому етапі на основі співвідношень Максвелла з рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) H_y - \sigma\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

за граничних умов (1) та початкової умови $H_y(x,z,0) = 0$, що відповідає відсутності поля в початковий момент час$t = 0$, визначаємо компоненту $H_y(x,z,t)$ вектора $\vec{H}$ та відповідні їй питомі густини джоулевих тепловиділень

$$Q = \frac{1}{\sigma}\left(\left(\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)^2\right)$$

і пондеромоторних сил

$$\vec{F} = \left\{F_x = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial x}H_y; 0; F_z = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial z}H_y\right\}$$

в шарі. На другому етапі знаходимо температуру $T(x,z,t)$ та напруження $\sigma_{ik}(x,z,t)$ $(i,k = x,y,z)$ із системи рівнянь зв'язаної плоскої динамічної задачі термопружності в напруженнях в декартових координатах [7]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T - \frac{1}{\kappa}\left(1 + 2\varepsilon_*\frac{1-\nu-\nu^2}{1+\nu}\right)\frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}Q + \frac{\alpha T_0(1+\nu)}{\lambda}\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) -$$

$$-\frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\sigma_{xz} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\sigma_{xz}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial t^2} = \alpha\rho(1+\nu)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} -$$

$$-\frac{\partial^2\sigma_{xz}}{\partial x\partial z} - \frac{\nu}{c_3^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial F_x}{\partial x},$$

$$\sigma_{zz} = \Psi - \sigma_{xx},$$

$$\sigma_{yy} = \nu\Psi - \alpha E T. \tag{3}$$

Тут: $\Psi{=}\sigma_{xx}{+}\sigma_{zz}$, $c_1{=}\sqrt{(1{-}\nu)E/(\rho(1{+}\nu)(1{-}2\nu))}$ – швидкість пружної хвилі розширення, $c_2 = \sqrt{E/(2\rho(1+\nu))}$ – швидкість пружної хвилі формозміни, $c_3^2 = 2c_2^2$, α, ν –коефіцієнти лінійного розширення і Пуассона, E – модуль Юнга, ρ – густина, ε_* – параметр, що характеризує зв'язаність полів деформації і температури.

Початкові при $t = 0$ умови на ключові функції запишемо

$$T = \Psi = \sigma_{xx} = \sigma_{xz} = 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -2\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{4}$$

Крайові умови на ключові функції за вільних від навантаження поверхонь $z = \pm h$ ($\sigma_{zz}^{\pm} = 0$, $\sigma_{xz}^{\pm} = 0$) мають вигляд

$$\frac{\partial T^{\pm}}{\partial z} \pm h_*^{\pm}\left(T^{\pm} - T_c\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Psi^{\pm}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2\Psi^{\pm}}{\partial t^2} = \alpha\rho(1+\nu)\frac{\partial^2 T^{\pm}}{\partial t^2} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)^{\pm} - \frac{\partial F_x^{\pm}}{\partial x},$$

$$\sigma_{xz}^{\pm} = 0, \quad \sigma_{xx}^{\pm} = \Psi^{\pm}, \tag{5}$$

де $T^{\pm} = T(x,\pm h,t)$, $\sigma_{ij}^{\pm} = \sigma_{ij}(x,\pm h,t)$, $i,j = x,z)$, $c_4^2 = 2/(1-\nu)c_2^2$, $h_*^{\pm}$ – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm h$.

II. Побудова розв'язку

A Зведення до задачі з однорідними граничними умовами

Для розглядуваного шару з плоскопаралельними границями подамо функції $H_y(x,z,t)$ та $\Psi(x,z,t)$ у вигляді [7]

$$H_y(x,z,t) = H_{y\circ}(x,z,t) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(H_y^+(x,t) + H_y^-(x,t) + \frac{z}{h}\left(H_y^+(x,t) - H_y^-(x,t)\right)\right)$$

$$\Psi(x,z,t) = \Psi_\circ(x,z,t) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Psi^+(x,t) + \Psi^-(x,t) + \frac{z}{h}\left(\Psi^+(x,t) - \Psi^-(x,t)\right)\right), \tag{6}$$

де функціям $H_{y\circ}(x,z,t)$ та $\Psi_\circ(x,z,t)$ вже відповідають однорідні крайові умови першого роду $H_{y\circ}(x,\pm h,t) = 0$ та $\Psi_\circ(x,\pm h,t) = 0$. Підставляючи подання (6) в рівняння (2) та рівняння системи (3), отримуємо на функції $H_{y\circ}(x,z,t)$, $\Psi_\circ(x,z,t)$, $\sigma_{xz}(x,z,t)$ та $\Psi^{\pm}(x,z,t)$ рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)H_y^\circ - \sigma\mu\frac{\partial H_y^\circ}{\partial t} = f(x,z,t), \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T - \frac{1}{\kappa_{**}}\frac{\partial T}{\partial t} - \varepsilon_* a_*\frac{\partial\Psi^\circ}{\partial t} -$$

$$-\frac{\varepsilon_* a_*}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^+(x,t) + \Psi^-(x,t) + \frac{z}{h}\left(\Psi^+(x,t) - \Psi^-(x,t)\right)\right) = W_1,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi^\circ-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Psi^\circ}{\partial t^2}+\frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Psi^+(x,t)+\Psi^-(x,t)+\frac{z}{h}\left(\Psi^+(x,t)-\Psi^-(x,t)\right)\right)=W_2,$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\sigma_{xz}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\sigma_{xz}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\Psi^\circ}{\partial x\partial z}+\frac{1}{2h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi^+(x,t)-\Psi^-(x,t)\right)=W_3,$$
$$\frac{\partial^2\Psi^\pm}{\partial x^2}-\frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2\Psi^\pm}{\partial t^2}=\alpha\rho\left(1+\nu\right)\frac{\partial^2 T^\pm}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)^\pm-\frac{\partial F_x^\pm}{\partial x}, \tag{8}$$

де

$$f(x,z,t)=\frac{1}{2}\left(\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(H^+(x,t)\left(1+\frac{z}{h}\right)+H^-(x,t)\left(1-\frac{z}{h}\right)\right)$$
$$W_1=-\frac{1}{\lambda}Q,\quad W_2=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right),\quad W_3=-\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}+\frac{\partial F_z}{\partial x}\right),$$
$$\kappa_*=\frac{1}{\kappa}\left(1+2\varepsilon_*\frac{1-\nu-\nu^2}{1+\nu}\right),\quad a_*=\frac{(1-2\nu)^2}{\kappa\alpha E\left(1+\nu\right)}.$$

Рівняння (8) розв'язуємо за однорідних крайових $H_{y\circ}\left(x,\pm h,t\right)=0$, $\Psi_\circ\left(x,\pm h,t\right)=0$ та $\sigma_{xz}\left(x,\pm h,t\right)=0$ та за початкових (при $t=0$) умов

$$H_{y\circ}=-\frac{1}{2}\left(H_y^+(x,0)\left(1+\frac{z}{h}\right)+H_y^-(x,0)\left(1+\frac{z}{h}\right)\right)$$
$$\frac{\partial\Psi_\circ}{\partial t}=-2\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial t}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\Psi^+(x,0)\left(1+\frac{z}{h}\right)+\Psi^-(x,0)\left(1-\frac{z}{h}\right)\right),$$
$$T=\sigma_{xx}=\sigma_{xz}=0,$$
$$\Psi_\circ=-\frac{1}{2}\left(\Psi^+(x,0)\left(1+\frac{z}{h}\right)+\Psi^-(x,0)\left(1-\frac{z}{h}\right)\right),$$
$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial t}=0,\quad\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial t}=-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{9}$$

B Зведення до задачі на інтегральні характеристики

Для розв'язування системи рівнянь (7) і (8) стосовно ключових функцій

$$\Phi\left(x,z,t\right)=$$
$$=\left\{H_{y\circ}\left(x,z,t\right),T\left(x,z,t\right),\Psi_\circ\left(x,z,t\right),\sigma_{xz}\left(x,z,t\right)\right\}$$

використаємо кубічну апроксимацію їх розподілів за товщинною координатою z, тобто подаємо ці функції у вигляді

$$\Phi\left(x,z,t\right)=\sum_{i=0}^{3}a_i^\Phi\left(x,t\right)z^i. \tag{10}$$

Коефіцієнти $a_i^\Phi\left(x,t\right)$ апроксимаційних поліномів (10) визначаються через інтегральні за товщинною координатою z характеристики шуканих функцій

$$\Phi_s\left(x,t\right)=\int_{-h}^{h}\Phi\left(x,z,t\right)z^{s-1}dz,\quad s=1,\,2, \tag{11}$$

тобто подаються у вигляді

$$a_i\left(x,t\right)=a_{i1}^\Phi\Phi_1\left(x,t\right)+a_{i2}^\Phi\Phi_2\left(x,t\right). \tag{12}$$

Для отримання рівнянь на інтегральні характеристики $\Phi_s\left(x,t\right)$ шуканих ключових функцій $\Phi\left(x,z,t\right)$ відповідно до системи вихідних рівнянь (3), та однорідних граничних умов на поверхні $z=\pm h$, зінтегровуємо рівняння системи (8) відповідно до співдношень (11), і використовуємо при перетвореннях співвідношення (10) і (12). У результаті для шуканих функцій $H_{y\circ}\left(z,t\right)$, $T\left(z,t\right)$, $\sigma_{xz}\left(z,t\right)$, $\Psi_\circ\left(z,t\right)$, отримуємо подання

$$H_{y\circ}\left(z,t\right)=\frac{3}{4}H_{y\circ1}\left(x,t\right)\left(1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)+$$
$$+\frac{15}{4}H_{y\circ2}\left(x,t\right)\left(\frac{z}{h}-\left(\frac{z}{h}\right)^3\right)$$

$$T\left(x,z,t\right)=3\frac{h_*\left(h^2-z^2\right)-2h}{4h^2\left(h_*h-3\right)}T_1\left(x,t\right)+$$
$$+15\frac{h^2z\left(h_*h-3\right)+z^3\left(1-h_*h\right)}{4h^5\left(h_*h-6\right)}T_2\left(x,t\right), \tag{13}$$

$$\Psi_\circ\left(x,z,t\right)=\frac{3}{4}\Psi_{\circ1}\left(x,t\right)\left(1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)+$$
$$+\frac{15}{4}\Psi_{\circ2}\left(x,t\right)\left(\frac{z}{h}-\left(\frac{z}{h}\right)^3\right), \tag{14}$$

$$\sigma_{xz}\left(x,z,t\right)=\frac{3}{4}\sigma_{xz1}\left(x,t\right)\left(1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)+$$
$$+\frac{15}{4}\sigma_{xz2}\left(x,t\right)\left(\frac{z}{h}-\left(\frac{z}{h}\right)^3\right), \tag{15}$$

де $h_*^+=h_*^-\equiv h_*$.

Тоді інтегральні характеристики $H_{y\circ s}(x,t)$ функції $H_{y\circ}(x,z,t)$ визначаються зі системи рівнянь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{h^2}\right)H_{y\circ 1}=h\left(\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(H_y^+(x,t)+H_y^-(x,t)\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}+\frac{15}{h^2}\right)H_{y\circ 2}=\frac{h^2}{3}\left(\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(H_y^+(x,t)-H_y^-(x,t)\right), \tag{16}$$

а інтегральні характеристики $T_s(x,t)$, $\Psi_{\circ s}(x,t)$ і $\sigma_{xz\,s}(x,t)$ та граничні значення $\Psi^{\pm}(x,t)$ функції $\Psi(x,z,t)$ визначаються зі системи взаємозв'язаних рівнянь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\gamma_1-\frac{1}{\kappa_*}\frac{\partial}{\partial t}\right)T_1-\varepsilon_*a_*\frac{\partial\Psi_{\circ 1}}{\partial t}-\varepsilon_*a_*h\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^+(x,t)+\Psi^-(x,t)\right)=W_{11},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\gamma_2-\frac{1}{\kappa_*}\frac{\partial}{\partial t}\right)T_2-\varepsilon_*a_*\frac{\partial\Psi_{\circ 2}}{\partial t}-\varepsilon_*a_*\frac{h^2}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^+(x,t)-\Psi^-(x,t)\right)=W_{12},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{3}{h^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi_{\circ 1}+\frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\gamma_1-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)T_1+$$

$$+h\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Psi^+(x,t)+\Psi^-(x,t)\right)=W_{21},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{15}{h^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi_{\circ 2}+\frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\gamma_2-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)T_2+$$

$$+\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Psi^+(x,t)-\Psi^-(x,t)\right)=W_{22},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{3}{h^2}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma_{xz1}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi^+(x,t)-\Psi^-(x,t)\right)=W_{31}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{15}{h^2}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma_{xz2}+\frac{\partial\Psi_{\circ 1}}{\partial x}=W_{32}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi^+-\frac{\alpha\rho(1+\nu)}{2h^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\gamma_3T_1+\gamma_4T_2)-\frac{3}{2h}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xz1}-5\sigma_{xz2})=W_{41},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi^--\frac{\alpha\rho(1+\nu)}{2h^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\gamma_5T_1+\gamma_6T_2)-\frac{3}{2h}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xz1}+5\sigma_{xz2})=W_{42}. \tag{17}$$

Тут

$$f_1(x,t)=h\left(\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(H_y^+(x,t)+H_y^-(x,t)\right)$$

$$f_2(x,t)=\frac{h^2}{3}\left(\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(H_y^+(x,t)-H_y^-(x,t)\right)$$

$$W_{js}=\int\limits_{-h}^{h}W_jz^{s-1}dz,\quad j=\overline{1,\ 3},\quad s=\overline{1,\ 2},$$

$$W_{41}=-\left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{z=h},\quad W_{42}=-\left.\frac{\partial F_x}{\partial x}\right|_{z=-h}$$

$$\gamma_1=\frac{3h_*}{h(h_*h-3)},\quad \gamma_2=\frac{15(h_*h-1)}{h(h_*h-3)}$$

$$\gamma_3=-\frac{18}{h(h_*h-18)},\quad \gamma_4=\frac{15k}{h(h_*h-18)}$$

$$\gamma_5=\frac{3}{h_*h-18},\quad \gamma_6=-\frac{45}{h^2(h_*h-18)}.$$

Системи рівнянь (16) та (17), а також рівняння на напруження σ_{xx} системи (3) розв'язуємо за початкових (при $t=0$) умов

$$H_{y\circ 1}=-h\left(H_y^+(x,0)+H_y^-(x,0)\right)$$

$$H_{y\circ 2}=-\frac{h^3}{3}\left(H_y^+(x,0)-H_y^-(x,0)\right)$$

$$T=\sigma_{xx}=\sigma_{xz}=0,$$

$$\Psi_{\circ 1}=-h\left(\Psi_\circ^+(x,0)+\Psi_\circ^-(x,0)\right)$$

$$\Psi_{\circ 2}=-\frac{h^3}{3}\left(\Psi_\circ^+(x,0)-\Psi_\circ^-(x,0)\right)$$

$$\frac{\partial \Psi_{\circ 1}}{\partial t}=-2\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T_s}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}h\left(\Psi^{+}(x,0)+\Psi^{-}(x,0)\right),$$

$$\frac{\partial \Psi_{\circ 2}}{\partial t}=-2\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T_s}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{h^3}{3}\left(\Psi^{+}(x,0)-\Psi^{-}(x,0)\right),$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz\,s}}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial \sigma_{xx\,s}}{\partial t}=-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T_s}{\partial t}. \qquad (18)$$

C Застосування інтегральних перетворень

Для безмежного шару функції $H_{\circ s}(x,t)$, $T_s(x,t)$, $\Psi_{\circ s}(x,t)$ $\sigma_{xz\,s}(x,t)$, $\sigma_{xx\,s}(x,t)$ та $\Psi_s^{\pm}(x,t)$ є обмеженими при $t\to\infty$, тобто задовольняють умовам перетворення Фур'є-Лапласа. Для знаходження розв'язків систем рівнянь на інтегральні характеристики ключових функцій застосовуємо до кожного рівняння цих систем інтегральні перетворення Фур'є $\tilde{f}(\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\,e^{i\xi x}dx$ за просторовою змінною x та перетворення Лапласа $\bar{\tilde{f}}(\xi,p)=\int_0^{\infty}\tilde{f}(\xi,t)\,e^{-p\,t}dt$ за часовою змінною t.

В результаті для визначення трансформант інтегральних характеристик $H_{y\circ s}(z,t)$ компоненти $H_y(x,z,t)$ отримуємо систему алгебраїчних рівнянь на трансформанти перетворення

$$\left(\xi^2+\sigma\mu p+\frac{3}{h^2}\right)\bar{\tilde{H}}_{y\circ 1}=-\bar{\tilde{f}}_1(\xi,p),$$

$$\left(\xi^2+\sigma\mu p+\frac{15}{h^2}\right)\bar{\tilde{H}}_{y\circ 2}=-\bar{\tilde{f}}_2(\xi,p), \qquad (19)$$

Для визначення трансформант Фур'є-Лапласа інтегральних характеристик $T_s(x,t)$, $\Psi_{\circ s}(x,t)$, $\sigma_{xzs}(x,t)$ температури $T(x,z,t)$, компоненти $\sigma_{xz}(x,z,t)$ та функції $\Psi_{\circ}(x,z,t)$ тензора динамічних напружень та граничних значень $\Psi^{\pm}(x,t)$ функції $\Psi(x,z,t)$ отримуємо таку систему алгебраїчних рівнянь:

$$\left(\xi^2+\gamma_1+\frac{p}{\kappa_*}\right)\bar{\tilde{T}}_1+\varepsilon_* a_*\bar{\tilde{\Psi}}_{\circ 1}p+$$

$$+\varepsilon_* a_* hp\left(\bar{\tilde{\Psi}}^{+}(x,t)+\bar{\tilde{\Psi}}^{-}(x,t)\right)=-\bar{\tilde{W}}_{11},$$

$$\left(\xi^2+\frac{p}{\kappa_*}+\gamma_2\right)\bar{\tilde{T}}_2+\varepsilon_* a_*\bar{\tilde{\Psi}}_{\circ 2}p+$$

$$+\varepsilon_* a_*\frac{h^2}{3}p\left(\bar{\tilde{\Psi}}^{+}(x,t)-\bar{\tilde{\Psi}}^{-}(x,t)\right)=-\bar{\tilde{W}}_{12},$$

$$\frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\xi^2+\gamma_1+\frac{p^2}{c_2^2}\right)\bar{\tilde{T}}_1+\left(\xi^2+\frac{3}{h^2}+\frac{p^2}{c_1^2}\right)\bar{\tilde{\Psi}}_{\circ 1}+$$

$$+h\left(\xi^2+\frac{p^2}{c_1^2}\right)\left(\bar{\tilde{\Psi}}^{+}(x,t)+\bar{\tilde{\Psi}}^{-}(x,t)\right)=-\bar{\tilde{W}}_{21},$$

$$\frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\xi^2+\gamma_2+\frac{p^2}{c_2^2}\right)\bar{\tilde{T}}_2+\left(\xi^2+\frac{15}{h^2}+\frac{p^2}{c_1^2}\right)\bar{\tilde{\Psi}}_{\circ 2}+$$

$$+\frac{h^2}{3}\left(\xi^2+\frac{p^2}{c_1^2}\right)\left(\bar{\tilde{\Psi}}^{+}(x,t)-\bar{\tilde{\Psi}}^{-}(x,t)\right)=-\bar{\tilde{W}}_{22},$$

$$\left(\xi^2+\frac{3}{h^2}+\frac{p^2}{c_2^2}\right)\bar{\tilde{\sigma}}_{xz1}-i\xi\left(\bar{\tilde{\Psi}}^{+}(x,t)-\Psi^{-}(x,t)\right)=-\bar{\tilde{W}}_{31}$$

$$\left(\xi^2+\frac{15}{h^2}+\frac{p^2}{c_2^2}\right)\bar{\tilde{\sigma}}_{xz2}-i\xi\bar{\tilde{\Psi}}_{\circ 1}=-\bar{\tilde{W}}_{32}$$

$$\left(\xi^2+\frac{p^2}{c_4^2}\right)\bar{\tilde{\Psi}}^{+}+\frac{\alpha\rho(1+\nu)}{2h^2}p^2\left(\gamma_3\bar{\tilde{T}}_1+\gamma_4\bar{\tilde{T}}_2\right)+$$

$$+i\xi\left(\frac{3}{2h}\bar{\tilde{\sigma}}_{xz1}-\frac{15}{2h}\bar{\tilde{\sigma}}_{xz2}\right)=-\bar{\tilde{W}}_{41},$$

$$\left(\xi^2+\frac{p^2}{c_4^2}\right)\bar{\tilde{\Psi}}^{-}+\frac{\alpha\rho(1+\nu)}{2h^2}p^2\left(\gamma_5\bar{\tilde{T}}_1+\gamma_6\bar{\tilde{T}}_2\right)+$$

$$+i\xi\left(\frac{3}{2h}\bar{\tilde{\sigma}}_{xz1}+\frac{15}{2h}\bar{\tilde{\sigma}}_{xz2}\right)=-\bar{\tilde{W}}_{42}, \qquad (20)$$

Для визначення напружень σ_{xx} застосуємо перетворення Фур'є-Лапласа до четвертого рівняння системи (3)

$$\begin{aligned}\left(\xi^2+\frac{p^2}{c_3^2}\right)\bar{\tilde{\sigma}}_{xx}&=-\alpha\rho(1+\nu)\,p^2\bar{\tilde{T}}+\\ &+i\xi\frac{\partial\bar{\tilde{\sigma}}_{xz}}{\partial z}+p^2\frac{\nu}{c_3^2}\bar{\tilde{\Psi}}+i\xi\bar{\tilde{F}}_x,\end{aligned} \qquad (21)$$

Розв'язок системи (20) подаємо за правилом Крамера і, застосовуючи теорему розкладу і теорему про добуток зображень Лапласа, а також обернене перетворення Фур'є до отриманих розв'язків та рівнянь (19) і (21), записуємо вирази шуканих інтегральних характеристик

$$H_{y\circ s}(x,t)=-\frac{1}{\sigma\mu}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{t}\tilde{f}_s(\xi,\tau)e^{p_s(t-\tau)}e^{-i\xi x}d\tau d\xi,$$

$(s=1,\,2)$
функції $H_y(x,z,t)$, де

$$p_1=-\frac{h^2\xi^2+3}{h^2\sigma\mu},p_2=-\frac{h^2\xi^2+15}{h^2\sigma\mu};$$

та вирази інтегральних характеристик

$$T_s(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=3}^{8}\frac{1}{\Delta'(p_i)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}\bar{\bar{W}}_{jk}(\xi,p_i)\Delta_{s\ \ 2(j-1)+k}\ \ e^{p_i(t-\tau)}e^{-i\xi x}d\tau d\xi,$$

$$\Psi_{os}(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=3}^{8}\frac{1}{\Delta'(p_i)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}\bar{\bar{W}}_{jk}(\xi,p_i)\Delta_{s+2\ \ 2(j-1)+k}\ \ e^{p_i(t-\tau)}e^{-i\xi x}d\tau d\xi,$$

$$\sigma_{xzs}(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=3}^{8}\frac{1}{\Delta'(p_i)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}\bar{\bar{W}}_{jk}(\xi,p_i)\Delta_{s+4\ \ 2(j-1)+k}\ \ e^{p_i(t-\tau)}e^{-i\xi x}d\tau d\xi,$$

$$\Psi^{+}(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=3}^{8}\frac{1}{\Delta'(p_i)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}\bar{\bar{W}}_{jk}(\xi,p_i)\Delta_{7\ \ 2(j-1)+k}\ \ e^{p_i(t-\tau)}e^{-i\xi x}d\tau d\xi,$$

$$\Psi^{-}(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=3}^{8}\frac{1}{\Delta'(p_i)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}\bar{\bar{W}}_{jk}(\xi,p_i)\Delta_{8\ \ 2(j-1)+k}\ \ e^{p_i(t-\tau)}e^{-i\xi x}d\tau d\xi,$$

де $\Delta = \det \boldsymbol{L}$, Δ_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці $\boldsymbol{L} = \|l_{ij}\|$, $l_{11} = \xi^2 + \gamma_1 + \dfrac{p}{\kappa_*}$ $l_{13} = \varepsilon_* a_* p$, $l_{17} = l_{18} = \varepsilon_* a_* hp$, $l_{22} = \xi^2 + \dfrac{p}{\kappa_*} + \gamma_2$, $l_{24} = \varepsilon_* a_* p$, $l_{27} = \varepsilon_* a_* \dfrac{h^2}{3}p$, $l_{28} = -\varepsilon_* a_* \dfrac{h^2}{3}p$, $l_{31} = \dfrac{\alpha E}{1-\nu}\left(\xi^2 + \gamma_1 + \dfrac{p^2}{c_2^2}\right)$, $l_{33} = \xi^2 + \dfrac{3}{h^2} + \dfrac{p^2}{c_1^2}$, $l_{37} = l_{38} = h\left(\xi^2 + \dfrac{p^2}{c_1^2}\right)$, $l_{42} = \dfrac{\alpha E}{1-\nu}\left(\xi^2 + \gamma_2 + \dfrac{p^2}{c_2^2}\right)$, $l_{44}=\xi^2+\dfrac{15}{h^2}+\dfrac{p^2}{c_1^2}$, $l_{47}=\dfrac{h^2}{3}\left(\xi^2+\dfrac{p^2}{c_1^2}\right)$, $l_{48}=\dfrac{h^2}{3}\left(\xi^2+\dfrac{p^2}{c_1^2}\right)$, $l_{55} = \xi^2 + \dfrac{3}{h^2} + \dfrac{p^2}{c_2^2}$, $l_{57} = -i\xi$, $l_{58} = i\xi$, $l_{63} = -i\xi$, $l_{66} = \xi^2 + \dfrac{15}{h^2} + \dfrac{p^2}{c_2^2}$, $l_{71} = \dfrac{\alpha\rho(1+\nu)}{2h^2}p^2\gamma_3$, $l_{72} = \dfrac{\alpha\rho(1+\nu)}{2h^2}p^2\gamma_4$, $l_{75} = i\xi\dfrac{3}{2h}$, $l_{76} = -i\xi\dfrac{15}{2h}$, $l_{77}=\xi^2+\dfrac{p^2}{c_4^2}$, $l_{81}=\dfrac{\alpha\rho(1+\nu)}{2h^2}p^2\gamma_5$, $l_{82}=\dfrac{\alpha\rho(1+\nu)}{2h^2}p^2\gamma_6$, $l_{85} = i\xi\dfrac{3}{2h}$, $l_{86} = i\xi\dfrac{15}{2h}$, $l_{88} = \xi^2 + \dfrac{p^2}{c_4^2}$, p_i, $(i = \overline{3,10})$– корені рівняння $\det \boldsymbol{L} = 0$,

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2\pi c_3^2}\sum_{i=11}^{12}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}\left(\frac{i\xi}{p_i}\left(\frac{\partial\bar{\bar{\sigma}}_{xz}}{\partial z} + \bar{\bar{F}}_x\right) - \alpha\rho(1+\nu)\,p_i\bar{\bar{T}} + \frac{\nu}{c_3^2}p_i\bar{\bar{\Psi}}\right)e^{p_i(t-\tau)}e^{i\xi x}d\tau d\xi,$$

де $p_{11,\,12} = \pm i\xi c_3$.

III. Висновки

Запропоновано методику побудови розв'язків сформульованих для електропровідного шару з плоскопаралельними границями взаємозв'язаних задач Діріхле на ключові функції, за які вибрано дотичну компоненту вектора напруженості магнітного поля, температуру і компоненти тензора динамічних напружень. Методика ґрунтується на зведенні ключових функцій з достатньою гладкістю неоднорідних крайових функцій до однорідних крайових умов і використанні кубічної апроксимації за товщинною координатою. У результаті визначення ключових функцій зведено до знаходження їх інтегральних характеристик, на які отримано відповідні крайові задачі меншої розмірності. З використанням інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа записано вирази інтегральних характеристик ключових функцій за довільної неоднорідної нестаціонарної електромагнітної дії. Отримані вирази є основою для побудови розв'язків розглядуваної задачі термомеханіки за дії нестаціонарних ЕМП конкретних типів, зокрема імпульсних та за конкретного закону неоднорідної зміни ЕМП на основах шару.

Література

[1] Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Хименко Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Харьков: МОСТ., 2003. – 288 с.

[2] Гайдук С.И., Добрушкин В.А. Решение одной задачи из теории упругости связанной с механическим и тепловым ударами // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 9. – С. 1632–1645.

[3] Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связанные и динамические задачи термоупругости. – М.: Машиностроение, 1979. – 184 с.

[4] Зильберглейт А.С. Об одной динамической связанной задаче термоупругости для плоского слоя // Прикл. механика. – 1973. – Т. 9. – № 7. – С. 43–48.

[5] Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости. – К.: Наукова думка, 1982. – 260 с.

[6] Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – К.: Наук. думка. – 1976. – 282 с.

[7] Бурак Я.С., Гачкевич О.Р., Мусій Р.С. Термопружність неферомагнітних електропровідних тіл за умови дії імпульсних електромагнітних полів // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49. – № 1. – С. 75–84.

PLANE COUPLED DYNAMICAL THERMOMECHANICAL PROBLEM FOR ELECTROCONDUCTIVE PLATE UNDER NONHOMOGENEOUS NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC ACTION

O. Hachkevych[a], R. Musij[b], G. Stasiuk[b]

[a] *Pidstryhach IAPMM*
[b] *National University "Lvivska Politechnika"*
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The solution of key functions – the tangent component of magnetic field strength vector, temperature and dynamical stresses tensor components of plane coupled thermomechanical problem for electroconductive plate under nonhomogeneous non-stationary electromagnetic action is obtained. The cubic approximation for thickness variant, Fourier and Laplace integral transformations are used.

Keywords: plate, plane coupled thermomechanical problem, nonhomogeneous non-stationary electromagnetic action, cubic approximation

2000 MSC: 74B05

УДК: 539.3