**УДК: 624.131.51.9**

**Т.-Н.М. Ванькович, Я.А. Зінько, М.В. Боженко**
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра теоретичної механіки

# ПРО ДВІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ ВИПАДКОВІ КОЛИВНІ ПРОЦЕСИ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ



**Стохастичні диференціальні рівняння, які описують коливні процеси механічних систем з випадковими збуреннями, допускають дві інтерпретації: в сенсі Іто та Стратоновича.**

**В роботі досліджується зв’язок між цими двома інтерпретаціями і даються рекомендації, коли доцільно використовувати кожну з них.**

**Arbitrary differential equations that they describe the vibration processes of the mechanical system with occasional turbulences they allow two interpretations into the sense of Eto and Stratonovich.**

**The connection between these two interpretations is investigated in this article and the recommendations are given when each of can use reasonable.**

**Актуальність і постановка задачі.** Розвиток нової техніки вимагає глибшого аналізу причин, які викликають вібрацію. Для розуміння і пояснення багатьох фізичних ефектів, які виникають, наприклад, від дії на конструкцію профілю дороги чи аеродромного покриття, від дії випадкового вітрового навантаження тощо, класичні періодичні збурення не є основними, а методи класичної механіки, які ґрунтуються на поняттях детермінізму, не є достатніми [1]. Створення певної фізичної моделі для дослідження таких динамічних процесів привело до створення математичного апарату, який дає змогу найточніше описати і врахувати зовнішні впливи, а саме теорію випадкових процесів.

Серед прикладних задач теорії випадкових процесів велике місце займають задачі аналізу випадкових коливань, які описуються нелінійними стохастичними диференціальними рівняннями [2]. Ці задачі набувають все більшого значення, але їх розв’язання пов’язане із значними математичними труднощами.

Зупинимося на порівняльній характеристиці двох інтерпретацій стохастичних диференціальних рівнянь, які описують випадкові коливні процеси.

**Виклад основного матеріалу.** Нехай коливний процес деякої механічної системи описується системою стохастичних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,t) + \sum_{k=1}^{n} q_{ik}(x,t)\dot{\xi}_k(t), (i=\overline{1,n}) \tag{1}$$

де $f_i$ , $q_{ik}$ – детерміновані функції, які задовольняють умову Ліншіца; $\dot{\xi}_k(t)$ – нормальні «білі шуми» з відомими статистичними характеристиками

$$M\dot{\xi}_k(t)=0,\ \ M\dot{\xi}_k(t)\dot{\xi}_j(t)=\frac{N_k}{2}\delta_{kj}(h)\ \ (k,\, j=\overline{1,n}),$$

$\delta_{kj}(h)$ – дельта-функція Дірака; $M$ – математичне сподівання.

Крім запису стохастичних диференціальних рівнянь у формі (1), можна записати ще дві еквівалентні форми

$$dx_i = f_i(x,t)dt + \sum_{i=1}^{n} q_{ik}(x,t)d\xi_k(t), \tag{2}$$

$$x_i = x_i(t_o) + \int_{t_o}^{t} f_i(x,t)dt + \int_{t_o}^{t}\sum_{k=1}^{n} q_{ik}(x,t)d\xi_k(t), \tag{3}$$

$$(i = \overline{1,n}).$$

Тут $\xi_k(t)$ – вінерівський процес ( інтеграл від процесу типу «білого шуму»).

Розв’язком системи стохастичних диференціальних рівнянь є марківський процес $x(t) = \{x_1(t), x_2(t).., x_n(t)\}$ [3], умовна густота розподілу ймовірності якого $W(x_1,.., x_n, t, x_1^o, .., x_n^o)$ задовольняє рівняння Колмогорова –Фоккера – Планка

$$\frac{dW}{dt} + n\sum_{i=1} \frac{d}{dx_i}[A_i(x_1, .., x_n, t)W] = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{d^2}{dx_i dx_k}[B_{ik}(x_1, .., x_n)W],$$

де

$$A_i = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}M\{u_i - x_i\} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{\to\infty}^{\infty}...\int_{\to\infty}^{\infty}(u_i - x_i)P(x,t,u,t+\tau)du_1...du_n,$$

$$B_{ik} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}M\{(u_i - x_i)(u_k - x_k)\} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{\to\infty}^{\infty}...\int_{\to\infty}^{\infty}(u_i - x_i)(u_k - x_k)P(x,t,u,t+\tau)du_1...du_n,$$

$$u_i = x_i(t+\tau), (i = \overline{1,n})$$

$p(x_1,...,x_n,t,u_1,...,u_n,t+\tau)$ – густина ймовірності переходу.

Щоб визначити коефіцієнти зносу $A_i$ і дифузії $B_{ik}$ процесу $x(t)$, який задовольняє рівняння (2), можна розглянути ці рівняння як границю в середньоквадратичному при $h \to 0$ розв’язку різницевих рівнянь

$$x_i(t+h) - x_i(t) = f_i(t, x(t))h + \sum_{k=1}^{n} q_{ik}(t,x)[\xi_k(t+h) - \xi_k(t)], \tag{4}$$

$$(i = \overline{1,n}).$$

Диференціальні рівняння (2), які отримуються в результаті граничного переходу при $h \to 0$ з явної різницевої схеми (4), є стохастичними диференціальними рівняннями Іто. Розв’язок $x(t)$ системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто (2) є дифузійним марківським процесом з коефіцієнтом зносу $A_i$ і дифузії $B_{ij}$ вигляду

$$A_i(x,t) = f_1(x,t);\ B_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} N_k q_{ik}(x,t)q_{jk}(x,t). \tag{5}$$

Якщо процес $\xi(t)$ має стохастичний диференціал

$$d\xi = \alpha(t)dt + \beta(t)d\xi(t),$$

де $\alpha(t) = (\alpha_1(t),...,\alpha_m(t), \beta(t) = (\beta_{jk}(t);\ j = 1,\overline{m};\ k = \overline{1,n})$, $\xi(t) - h$ – вимірний вінерівський процес і $q(t,x) = q(t, x_1,...x_n)$ неперервно-диференційована за $t$ і двічі неперервно-диференційована за $x_j$ функція, тоді

$$d_q(t,\zeta(t)) = \left[q_t'(t,\zeta(t)) + \sum_{k=1}^{n} q_{x_k}'(t,\zeta(t))\alpha_k(t) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} q_{x_j x_k}''(t,\zeta(t))\cdot\sum_{i=1}^{n}\beta_{ki}(t)\beta_{ji}(t)\right]dt + \\ + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} q_{x_k}'(t,\zeta(t))\beta_{x_i}(t)d\xi_i(t). \tag{6}$$

Формула (6) називається формулою Іто і є формулою диференціювання складних випадкових функцій.

Для звичайних гладких функцій $\zeta(t)$ третій доданок у квадратних дужках формули (6) відсутній. Тому стохастичні диференціали в сенсі Іто не можна при заміні змінних перетворювати за звичайними правилами, справедливими для гладких функцій.

Стохастичні диференціальні рівняння (2) допускають і іншу інтерпретацію, запропоновану Р.Л. Стратоновичем [2]. А саме, їх можна розглядати як результат граничного переходу при $h \to 0$ в неявній різницевій схемі

$$x_i(t+h) - x_i(t) = f_i(t, x(t))h + \sum_{k=1}^{n} q_{ik}\left( t, \frac{1}{2}[x,(t+h) - x(t)]\right) \times [\xi_k(t+h) - \xi_k(t)]. \quad (7)$$

При такій інтерпретації рівняння (2) називають стохастичними диференціальними рівняннями в сенсі Стратоновича.

Неявна різницева схема (7) при виконанні умови неперервності і диференційованості функцій $q_{ik}$ за $x$ еквівалентна явній схемі

$$\begin{aligned} x_i(t+h) - x_i(t) = f_i(t, x(t))h + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{y} \frac{1}{2}\frac{dq_{ik}}{dx_j}(t, x(t))h \\ + \sum_{k=1}^{n} q_{ik}(t, x(t))[\xi_k(t+h) - \xi_k(t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Співвідношення (8) можна також розглядати як різницеве представлення стохастичного диференціального рівняння Іто.

$$dx_i = \left[ f_i(x,t) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} N_k \frac{dq_{ik}}{dx_j}(t,x)\, q_{ik}(x,t) \right] dt + \sum_{k=1}^{n} q_{ik}(x,t)\, d\xi_k \;,$$

і отже, коефіцієнти зносу і дифузій марківського процесу $x(t)$ визначаються за формулами

$$A_i(x,t) = f_i(x,t) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} N_k q_{jn}(x,t) \frac{dq_{ik}(x,t)}{dx_j}$$

$$B_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} N_k q_{ik}(x,t)\, q_{ik}(x,t)\,. \quad (9)$$

Порівнюючи формули (6) і (9), зауважуємо, що від того, в якому сенсі інтерпретується стохастичне диференціальне рівняння, залежить коефіцієнт $A_i$ .

Однією з найважливіших властивостей стохастичних диференціалів в сенсі Стратоновича є те, що з ними можна поводитися за звичайними правилами гладких функцій (маються на увазі правила заміни змінних тощо).

**Висновок.** Обидва способи інтерпретації стохастичних диференціальних рівнянь – в сенсі Іто і в сенсі Стратоновича – в математичному відношенні є правильними. Більше того, як показано в роботі, існує зв’язок між стохастичними диференціалами Іто і Стратоновича. Тому при розв’язуванні конкретної практичної задачі необхідно вибирати ту інтерпретацію, яка дає найточніше описання руху механічної системи з реальними випадковими збуреннями.

*1. Ларин В.В. Статистические задачи вибразащиты. – К.: Наукова думка, 1974. – 127 с. 2. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 368 с. 3. Случайные колебания / Под ред. С. Кренделла. – М.: Мир, 1967. – 356 с.*