ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
*V **"Фізико-математичні науки"**
Вип.643 № 643, (2009) с. 73–86

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 73–86

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РОЗПОДІЛАМИ У КОЕФІЦІЄНТАХ

О.О. Власій, В.В. Мазуренко

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
вул. Шевченка 57, 76025, Івано-Франківськ, Україна

(Отримано 14 жовтня 2008 р.)

Досліджено спектральні властивості задачі на власні значення для системи квазідиференціальних рівнянь з розподілами у коефіцієнтах. Встановлено необхідні й достатні умови існування розв'язків відповідної неоднорідної крайової задачі. Отримано зображення розв'язків в інтегральній (фредгольмовій) формі за допомогою конструктивно побудованої матричної функції Ґріна та у формі (Шмідта) абсолютно і рівномірно збіжного ряду за власними вектор-функціями.

Ключові слова: система квазідиференціальних рівнянь, квазіпохідна, розподіл, самоспряжена крайова задача, матрична функція Ґріна, формула Шмідта.

2000 MSC: 34B05;34B27;34A37

УДК: 517.927

Вступ

Дослідження різноманітних фізичних процесів, які враховують природну єдність дискретного і неперервного, приводять до необхідності створення адекватних математичних моделей [1, 2]. Багато з них описуються диференціальними і квазідиференціальними (к.-д.) рівняннями з узагальненими функціями в коефіцієнтах і правій частині [3, 4]. Крайові задачі для диференціальних рівнянь з розподілами в коефіцієнтах успішно вивчають математики та механіки віддавна. Істотний стимул для розвитку ця тематика отримала завдяки фундаментальним роботам М.Г. Крейна та І.С. Каца (див. [5, с. 648] і бібліографію там) стосовно диференціальних рівнянь другого порядку, що моделюють вільні коливання струни, маса якої допускає окрім неперервного, ще й точковий розподіл. До введення поняття δ-функції точкові сингулярності з'являлись в задачах у формі специфічних умов спряження для розв'язку і його похідних у точках, котрі з погляду сучасної теорії належать до сингулярного носія коефіцієнтів рівняння. Такі дослідження здебільшого мали частковий характер, бо стосувались рівнянь конкретного вигляду.

У роботах [6, 7] встановлено існування і єдиність розв'язку, а також вивчено спектральні властивості широкого класу коректних (під час дослідження яких не виникає проблеми множення функціоналів) крайових задач для к.-д. рівнянь довільного скінченного порядку. У статті [8] отримано аналог альтернативи Фредгольма для системи диференціальних рівнянь з мірами, а в роботах [9, 10] досліджено задачу на власні значення й побудовано матричну функцію Ґріна для системи к.-д. рівнянь четвертого порядку. Задачі на власні значення, що досліджувались в анонсованих (за винятком [7]) роботах, є задачами одночленного класу (див. [11, с. 69]). У цій статті, котра є розвитком роботи [7] на випадок систем к.-д. рівнянь вищих порядків, задачі на власні значення, що розглядатимуться, належать до багаточленного класу.

Статтю організовано так. У вступі відображено актуальність дослідження і зв'язок з попередніми роботами. У розділі I наведено умовні позначення, що використовуються в роботі. Розділ II присвячено постановці задачі і методиці дослідження. Важливою тут є лема 1, яка дає змогу у дослідженні застосовувати як базові результати роботи [8]. У розділі III наведено формулювання результатів дослідження, їх обгрунтуванню присвячено наступний розділ IV. У розділі V на конкретному прикладі проілюстровано метод знаходження спектра задачі на власні значення. Нарешті, в останньому розділі зроблено висновки з цього дослідження.

I. Позначення

Через $\mathbb{C}^{p\times q}$ позначаємо лінійний простір комплексних матриць розміру $p\times q$, а через $\overline{\mathcal{D}}_p(I)$, де I – інтервал дійсної осі, – простір неперервних вектор-функцій $I\to \mathrm{C}^p$ з компактним носієм, спряжений до якого є простором $\overline{\mathcal{D}}_p'(I)$ векторних розподілів.

Під $AC_p[a,b]$, $L_p[a,b]$ і $L_p^2[a,b]$ розуміємо простори матричних функцій $A\colon [a,b]\to \mathbb{C}^{p\times p}$ відповідно із абсолютно неперервними, інтегровними за Лебегом та інтегровними з квадратом модуля за Лебегом на відрізку $[a,b]$ елементами $a_{ij}(x)$, а під $BV_p^+[a,b]$ – простір матриць, елементи $a_{ij}(x)$ яких є неперервними справа на відрізку $[a,b]$ функціями обмеженої варіації. Відповідні простори вектор-функцій позначаємо з рискою вгорі.

Будемо використовувати також позначення: 0 – нульовий елемент (вектор або число), O_p і E_p – відповідно нульова і одинична матриці порядку p, (f,φ) – значення функціоналу f на функції $\varphi(x)$, $\|A\|$ – норма матриці $A\in\mathbb{C}^{p\times q}$, що визначається як сума модулів усіх її елементів a_{ij}, $\Delta A(x)=A(x)-A(x-0)$ – стрибок функції $A\in BV_p^+[a,b]$ у точці $x\in[a,b]$, ${}_a^bA(x)$ – повна варіація матриці-функції $A(x)$ на $[a,b]$, що дорівнює сумі повних варіацій усіх її елементів $a_{ij}(x)$, τ – символ транспонування, $*$ – операція спряження, δ_{ij} – символ Кронекера, $E(\cdot)$ – ціла частина дійсного числа (антьє), $\ell=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

II. Постановка задачі і метод дослідження

Розглядаємо диференціальне рівняння

$$\mathcal{M}[y]=\lambda\mathcal{N}[y],\qquad(1)$$

де $y\colon[a,b]\to\mathbb{C}^p$ – невідома вектор-функція дійсної змінної x, λ – скалярний комплексний параметр, $\mathcal{M}[y]$ і $\mathcal{N}[y]$ – лінійні однорідні к.-д. вирази порядків m і n $(m>n)$ відповідно з матричними коефіцієнтами:

$$\mathcal{M}[y]=(-1)^l\left\{\ell B(x)\Big[B(x)y^{(l)}\Big]^{(m-2l)}\right\}^{(l)}+\\+\sum_{i,j=0}^{l}(-1)^{l-j}\Big(B_{ij}(x)y^{(l-i)}\Big)^{(l-j)},\qquad(2)$$

$$\mathcal{N}[y]=\sum_{i,j=r}^{l}(-1)^{l-j}\Big(A_{ij}(x)y^{(l-i)}\Big)^{(l-j)},\qquad(3)$$

$m,l,r\in\mathbb{N}$, $r\le l\le E\big(\frac{m}{2}\big)$. До того ж при $m=2l$ вважаємо $B\equiv0$, так що, коли m – парне число, то

$$\mathcal{M}[y]=\sum_{i,j=0}^{l}(-1)^{l-j}\Big(B_{ij}(x)y^{(l-i)}\Big)^{(l-j)}.\qquad(4)$$

К.-д. рівняння вигляду (1) з достатньо гладкими, а також сумовними за Лебегом $(p\times p)$-матричними коефіцієнтами в різних аспектах досліджувались багатьма авторами. Зокрема, в [12] побудовано загальну теорію і проведено спектральний аналіз такого рівняння у випадку, коли $m=2l$, $p=1$, $B_{ij}\equiv0$ $(i\ne j)$, $\mathcal{N}[y]=y$. Випадок, коли m є довільним скінченним числом, $l=E(\frac{m}{2})$, $B_{ij}\equiv0$ $\big(i,j=\overline{0,l},\ i\ne j+\{0,\pm1\}\big)$ для $p=1$, $\mathcal{N}[y]=w(x)y$ розглянуто в [13], а для $p>1$, $\mathcal{N}[y]=y$ – в [14]. Скалярне к.-д. рівняння (1) з к.-д. виразами $\mathcal{M}[y]=y^{[m]}$, $\mathcal{N}[y]=y$, де

$$y^{[0]}=B_{00}(x)y,$$

$$y^{[i]}=\ell B_{ii}(x)\Big(y^{[i-1]}\Big)'+\sum_{j=0}^{i-1}B_{ij}(x)y^{[j]},\ i=\overline{1,m},$$

вивчалось в роботі [15]. У роботах [11, 16] досліджувались задачі на власні значення багаточленного класу для к.-д. рівняння (1), в якому $\mathcal{M}[y]$ і $\mathcal{N}[y]$ визначаються виразами (4) і (3) при $i=j$.

У цій статті послаблюємо вимоги до коефіцієнтів к.-д. виразів $\mathcal{M}[y]$ та $\mathcal{N}[y]$ і вважаємо, що виконуються такі припущення:

(A) якщо $m=2l$, то $B_{00}^{-1}(x)$ є обмежена і вимірна при $x\in[a,b]$ матриця, $B_{i0},B_{0j}\in L_p^2[a,b]$ для довільних $i,j=\overline{1,l}$, B_{ij} – міри Стільтьєса [17, с. 160] на [a,b], тобто $B_{ij}=b'_{ij}$ $(b_{ij}\in BV_p^+[a,b])$ для будь-яких $i,j=\overline{1,l}$; інакше $B^{-1}(x)$ – обмежена і вимірна при $x\in[a,b]$ і, якщо $l=E(\frac{m}{2})$, то $B_{i0},B_{0j}\in L_p[a,b]$ для довільних $i,j=\overline{0,l}$, а $B_{ij}=b'_{ij}$ для будь-яких $i,j=\overline{1,l}$, якщо ж $l<E(\frac{m}{2})$, то $B_{ij}=b'_{ij}$ для довільних $i,j=\overline{0,l}$;

(B) $B_{i0}^*=B_{0i}$ $(i=\overline{0,l})$, $b_{ij}^*=b_{ji}$ $(i,j=\overline{1,l})$ при $l=E(\frac{m}{2})$ або $b_{ij}^*=b_{ji}$ $(i,j=\overline{0,l})$, якщо $l<E(\frac{m}{2})$. Крім того, також $B^*=B$;

(C) $A_{ij}=a'_{ij}$ $(a_{ij}\in BV_p^+[a,b])$ для довільних $i,j=\overline{r,l}$, причому $a_{ij}(x)$ – неспадні на $[a,b]$ матричні функції і $a_{ij}^*=a_{ji}$;

Під *розв'язком* к.-д. рівняння (1) розуміємо вектор-функцію $y(x,\lambda)$ з простору $\overline{AC}_p\big([a,b]\times\mathbb{C}\big)$, для якої справджується тотожність

$$\Big(y^{[m]},\ \varphi\Big)=0\quad\forall\varphi\in\overline{\mathcal{D}}_p(I),\ I\supseteq[a,b].$$

Відзначимо, що існування і єдиність розв'язків початкових задач для к.-д. рівнянь з узагальненими матричними коефіцієнтами, а також елементи лінійної теорії таких рівнянь наведено в роботі [18].

Поряд з рівнянням (1) розглянемо також неоднорідне к.-д. рівняння

$$\mathcal{M}[y]-\lambda\mathcal{N}[y]=\sum_{j=0}^{m-l-1}(-1)^{j+1}f_j^{(j+1)}(x),\qquad(5)$$

де $f_j\in\overline{BV}_p^+[a,b]$ $(j=\overline{0,m-l-1})$. Для рівняння (5) визначимо квазіпохідні $y^{[k]}(x)$ $(k=\overline{0,m})$ виразами (при $m=2l$, як було обумовлено, $B\equiv0$, $f_l\equiv0$):

$$y^{[0]} \stackrel{df}{=} y, \quad y^{[k]} = y^{(k)},\ k = \overline{1, l{-}1}; \quad y^{[l+k]} = -\tfrac{1+\ell}{\sqrt{2}} B(x) y^{(l+k)},\ k = \overline{0, m{-}(2E(\tfrac{m}{2}){+}1)};$$
$$y^{[l+k]} = -\left(y^{[l+k-1]}\right)' + f'_{m-l-k},\ k = \overline{1, 2(E(\tfrac{m}{2}){-}l)}; \quad y^{[m-l]} = -\tfrac{1+\ell}{\sqrt{2}} B(x) \left(y^{[m-l-1]}\right)' + \sum_{i=0}^{l} B_{i0}(x) y^{(l-i)} {+} f'_l;$$
$$y^{[m-l+k]} = -\left(y^{[m-l+k-1]}\right)' + \sum_{i=0}^{l} B_{ik}(x) y^{(l-i)} + f'_{l-k},\ k = \overline{1, r{-}1};$$
$$y^{[m-l+k]} = -\left(y^{[m-l+k-1]}\right)' + \sum_{i=0}^{l} B_{ik}(x) y^{(l-i)} - \lambda \sum_{i=r}^{l} A_{ik}(x) y^{(l-i)} + f'_{l-k},\ k = \overline{r, l}. \tag{6}$$

До к.-д. рівняння (5) приєднаємо m крайових умов вигляду

$$U_k(y) \equiv \sum_{\nu=1}^{m} \Big[P_{k\nu} y^{[\nu-1]}(a) + Q_{k\nu} y^{[\nu-1]}(b) \Big] = 0, k = \overline{1, m}, \tag{7}$$

де $U_k(y)$ – лінійно незалежні крайові форми із заданими числовими матрицями $P_{k\nu}, Q_{k\nu}$ $(k, \nu = \overline{1, m})$.

Основна технічна ідея роботи полягає у заміні крайової задачі (5), (7) деякою еквівалентною задачею для системи рівнянь першого порядку

$$JY' - \left[G'(x) + \lambda H'(x)\right] Y = F'(x), \tag{8}$$

$$PY(a) + QY(b) = 0. \tag{9}$$

Перевага такого підходу є очевидною – присутність у системі лише перших похідних дає змогу звести аналіз сингулярностей до питання про розташування стрибків певних функцій, похідні котрих породжують ці сингулярності. У рівнянні (8) J є косоермітовою унітарною матрицею розміру $q{\times}q$, $Y(x)$ – невідома q-вимірна вектор-функція дійсної змінної x, λ – комплексний параметр, $G(x)$ і $H(x)$ – деякі *ермітіани*, тобто визначені на розглядуваному проміжку дійсної осі матричні функції, значеннями яких є ермітові матриці розміру $q{\times}q$ (вважаємо також, що їх елементи є неперервними справа на проміжку $[a, b]$ функціями обмеженої варіації, відтак диференціювання і рівність у (8) розуміємо в сенсі теорії узагальнених функцій), $F \in \overline{BV}_q^{+}[a, b]$ – відома вектор-функція, $F'(x)$ – її узагальнена похідна. В умові (9) $P, Q \in \mathbb{C}^{q \times q}$ – задані крайові матриці.

Під *розв'язком* крайової задачі (8), (9) розуміємо вектор-функцію $Y(x, \lambda) \in \overline{BV}_q^{+}\left([a, b]{\times}\mathbb{C}\right)$ таку, що задовольняє умову (9) і

$$\left([J\tfrac{d}{dx} - G' - \lambda H']Y, \varphi\right) = \left(F', \varphi\right) \quad \forall\, \varphi \in \overline{\mathcal{D}}_q(I),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Для коректності означення розв'язку (див., н-д, [19]) вимагатимемо для довільних $x \in [a, b]$ і $\lambda \in \mathbb{C}$ виконання системи умов

$$\begin{gathered} \Big(J \big[\triangle G(x) + \lambda \triangle H(x) \big] \Big)^2 = O_p; \\ \big[\triangle G(x) + \lambda \triangle H(x) \big] J \triangle F(x) = O_p. \end{gathered} \tag{10}$$

Означення 1. Однорідну крайову задачу з крайовою умовою (9) для системи диференціальних рівнянь з параметром

$$JY' = \left[G'(x) + \lambda H'(x)\right] Y, \tag{11}$$

називаємо *самоспряженою*, якщо виконуються такі умови:

(D) ермітова матриця-функція $H(x)$ неспадна на $[a, b]$, тобто для довільних $x_1, x_2 \in [a, b]$ з умови $x_2 > x_1$ очевидно, що $H(x_2) \geq H(x_1)$; інакше кажучи, матриця $H(x_2) - H(x_1)$ невід'ємно визначена у тому розумінні, що ермітова форма

$$\big([H(x_2){-}H(x_1)]\xi, \xi\big)_{\mathbb{C}^q} = \xi^* \big[H(x_2){-}H(x_1)\big]\xi \geq 0;$$

(E) пара крайових матриць $\{P, Q\}$ неособлива, тобто $rank(P \,|\, Q) = q$, і J-унітарна, тобто

$$PJP^* = QJQ^*; \tag{12}$$

(F) рівняння

$$JY' - G'(x)Y = 0 \quad \text{і} \quad H'(x)Y = 0 \tag{13}$$

за умови (9) мають лише тривіальний розв'язок.

Для довільного нетривіального розв'язку $Y(x, \lambda)$ самоспряженої крайової задачі (11), (9)

$$\int_a^b Y^*(x, \lambda) dH(x) Y(x, \lambda) > 0. \tag{14}$$

Насправді, припускаючи протилежне, знайдемо на підставі умови (A), що $Y^*(x, \lambda) H'(x) Y(x, \lambda) = 0$, звідки $H'(x)Y(x, \lambda) = 0$. Отже, функція $Y(x, \lambda) \neq 0$ задовольняє обидва рівняння (13) і крайову умову (9). Отримане протиріччя з умовою (F) доводить (14).

Очевидно, однорідна крайова задача (11), (9) завжди має тривіальний розв'язок. Відтак природно розглянути задачу про відшукання тих значень параметра λ, для яких ця задача має нетривіальні розв'язки (*задача на власні значення*). Такі значення параметра λ називаємо *власними*, їх сукупність – *спектром* задачі на власні значення, а відповідні їм нетривіальні розв'язки задачі (11), (9) – *власними вектор-функціями* цієї задачі.

Означення 2. Якщо деяка вектор-функція $Y(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння (11), одночасно задовольняє обидва рівняння (13), то такий розв'язок називаємо *виродженим* за параметром λ. У протилежному випадку – *невиродженим*.

Відтак умова (F) означає, що задача (11), (9) не має виродженого за параметром λ нетривіального розв'язку. Якщо такий розв'язок існує, тобто умова (C) не справджується, то спектр задачі (11), (9) збігається зі всією λ-площиною. З іншого боку, на підставі особливості матриці $H(x)$ задача (11), (9) може взагалі не мати власних значень. Їх нема, наприклад, в тому тривіальному випадку, коли $H(x)$ – стала матриця, а $\det\bigl[P+Q\Phi(b)\bigr]\neq 0$, де $\Phi(x)$ – матрицант першого з рівнянь (13).

Умова (12) необхідна для того, щоб для будь-яких двох вектор-функцій $Y,Z\in\overline{BV}_q^{\,+}[a,b]$, які задовольняють крайову умову (9) з J-унітарною парою матриць $\bigl\{P,Q\bigr\}$, виконувалась рівність

$$Z^*(a)JY(a)=Z^*(b)JY(b). \tag{15}$$

Ця рівність є простим наслідком умов

$$PY(a)+QY(b)=0,\quad PZ(a)+QZ(b)=0, \tag{16}$$

якщо припустити, що принаймні одна з матриць P чи Q неособлива. Нехай, скажімо, такою є матриця P. Тоді існує матриця $R=-P^{-1}Q$ і умова (12) означає, що матриця R^* J-унітарна. Відтак J-унітарною є також матриця R. Умови (16) у цьому випадку еквівалентні умовам $Y(a)=RY(b)$, $Z(a)=RZ(b)$ і разом з $R^*JR=J$, звичайно, гарантують виконання рівності (15).

У загальному випадку кожна з матриць P, Q особлива (зокрема, це завжди так для умов Штурма, коли $PJP^*=QJQ^*=O_p$), тому доводиться міркувати дещо інакше. Зіставимо вектор-функціям $Y(x)$ і $Z(x)$ вектори $Y=\bigl(Y(a),Y(b)\bigr)^\tau$, $Z=\bigl(Z(a),Z(b)\bigr)^\tau$ $2q$-вимірного простору $\mathbb{C}^{2q}$. Нехай $\mathfrak{M}$ – q-вимірний підпростір простору $\mathbb{C}^{2q}$, що є лінійною оболонкою векторів, складених зі стовпців прямокутної матриці $\begin{bmatrix}P^*\\Q^*\end{bmatrix}$. Тоді умови (16) означають, що вектори Y і Z ортогональні до $\mathfrak{M}$.

Позначимо через $\mathfrak{J}$ відображення простору $\mathbb{C}^{2q}$ в себе, яке визначається рівністю

$$\mathfrak{J}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J\xi\\ -J\eta\end{pmatrix},\quad \xi,\eta\in\mathbb{C}^q.$$

Відтак умову (12) можна тлумачити як умову ортогональності $\mathfrak{JM}$ до $\mathfrak{M}$. Остання разом з умовою $Y,Z\perp\mathfrak{M}$ означає, що вектори $Y,Z\in\mathfrak{JM}$, тобто

$$\begin{pmatrix}Y(a)\\ Y(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}JP^*v\\ -JQ^*v\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}Z(a)\\ Z(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}JP^*u\\ -JQ^*u\end{pmatrix}, \tag{17}$$

де $v,u\in\mathbb{C}^q$. Звідси на підставі унітарності матриці J і умови (12) очевидна рівність (15):

$$Z^*(a)JY(a)-Z^*(b)JY(b)=u^*PJ^*JJP^*v-$$
$$-u^*QJ^*JJQ^*v=u^*(PJP^*-QJQ^*)v=0.$$

Крім того, з умови (17) можна отримати своєрідний параметричний вигляд крайової умови (9)

$$Y(a)=Mv,\ Y(b)=Nv,\quad M^*JM=N^*JN \tag{18}$$

з неособливою і J-унітарною парою матриць $\bigl\{M^*,Q^*\bigr\}$, де $M=JP^*,N=-JQ^*$.

Лема 1. *Нехай справджуються умови (A)–(C) і рівняння $\mathcal{M}[y]=0$ та $\mathcal{N}[y]=0$ мають лише тривіальний розв'язок за умови (7), де матриці $P_{k\nu},Q_{k\nu}$ $(k,\nu=\overline{1,m})$ задовольняють співвідношення*

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{l}\bigl[P_{ks}P^*_{\nu,m-s+1}-P_{k,m-s+1}P^*_{\nu s}\bigr]+\\ &+\sum_{s=l+1}^{E(\frac{m}{2})}(-1)^{s-l}\ell\bigl[P_{ks}P^*_{\nu,m-s+1}+P_{k,m-s+1}P^*_{\nu s}\bigr]+\\ &+(-1)^{E(\frac{m}{2})-l+1}\ell P_{k,E(\frac{m}{2})+1}P^*_{\nu,E(\frac{m}{2})+1}=\\ &=\sum_{s=1}^{l}\bigl[Q_{ks}Q^*_{\nu,m-s+1}-Q_{k,m-s+1}Q^*_{\nu s}\bigr]+\\ &+\sum_{s=l+1}^{E(\frac{m}{2})}(-1)^{s-l}\ell\bigl[Q_{ks}Q^*_{\nu,m-s+1}+Q_{k,m-s+1}Q^*_{\nu s}\bigr]+\\ &+(-1)^{E(\frac{m}{2})-l+1}\ell Q_{k,E(\frac{m}{2})+1}Q^*_{\nu,E(\frac{m}{2})+1}\end{aligned} \tag{19}$$

(при $m=2l$ тут $P_{k,E(\frac{m}{2})+1}=Q_{k,E(\frac{m}{2})+1}=0$, $k=\overline{1,m}$). Тоді крайова задача (5), (7) *еквівалентна задачі* (8), (9) (*також* (8), (18)), *причому $q=mp$, а відповідна однорідна задача є самоспряженою.*

□ *Доведення.* К.-д. рівняння (5) приводиться до вигляду (8) за допомогою вектора розміру $mp\times 1$

$$Y=\bigl(y,y^{[1]},\dots,y^{[m-1]}\bigr)^\tau, \tag{20}$$

складеного із квазіпохідних (6), кожна з яких є вектор-функцією розміру $p\times 1$. При цьому вектор-функція $F'(x)$ має вигляд

$$F'=\Bigl(-f_0',\dots,-f_{l-1}',\tfrac{1+\ell}{\sqrt{2}}B^{-1}f_l',-\ell f_{l+1}',\ell f_{l+2}',\dots,-\ell f_{m-l-2}',\ell f_{m-l-1}',\underbrace{0,\dots,0}_{l}\Bigr)^\tau. \tag{21}$$

Відтак внаслідок умови $f_j \in \overline{BV}_p^+[a,b]$ $(j=\overline{0,m-l-1})$ маємо $F \in \overline{BV}_{mp}^+[a,b]$ і стрибок цієї функції в точці $x\in[a,b]$

$$\Delta F = \left(-\Delta f_0,\dots,-\Delta f_{l-1},\frac{1+\ell}{\sqrt{2}}B^{-1}\Delta f_l,-\ell\Delta f_{l+1},\dots,\ell\Delta f_{m-l-1},\underbrace{0,\dots,0}_{l}\right)^{\tau}.$$

Матриці J, $H'(x)$, $G'(x)$ розміру $mp\times mp$ мають таку блокову структуру (описуємо лише ненульові $p\times p$ блоки $J_{k\nu}$, $H_{k\nu}$, $G_{k\nu}$ $k,\nu=\overline{1,m}$ кожної з них):

$$J_{k,m-k+1}=\begin{cases}-E_p, & k=\overline{1,l};\\ (-1)^{m-l-k}\ell E_p, & k=\overline{l+1,m-l};\\ E_p, & k=\overline{m-l+1,m};\end{cases}\qquad H_{k\nu}=A_{l-\nu+1,l-k+1},\ k,\nu=\overline{r,l};$$

якщо m парне

$$G_{k\nu}=\begin{cases}\ B_{0,l-k+1}B_{00}^{-1}B_{l-\nu+1,0}-B_{l-\nu+1,l-k+1}, & k,\nu=\overline{1,l};\\ -B_{0,l-k+1}B_{00}^{-1}, & k=\overline{1,l},\ \nu=l+1;\\ -B_{00}^{-1}B_{l-\nu+1,0}, & k=l+1,\ \nu=\overline{1,l};\\ \ B_{00}^{-1}, & k=\nu=l+1;\\ \ E_p, & k=\overline{2,m},\ k\neq l+1,\ \nu=m-k+2;\end{cases}$$

при непарному m

$$G_{k\nu}=\begin{cases}-B_{l-\nu+1,l-k+1}, & k,\nu=\overline{1,l};\\ \frac{(1-\ell)}{\sqrt{2}}B_{0,l-k+1}B^{-1}, & k=\overline{1,l},\ \nu=l+1;\\ \frac{(1+\ell)}{\sqrt{2}}B^{-1}B_{l-\nu+1,0}, & k=l+1,\ \nu=\overline{1,l};\\ -B^{-1}B_{00}B^{-1}, & k=\nu=l+1;\\ -\frac{(1+\ell)}{\sqrt{2}}B^{-1}, & k=l+1,\ \nu=m-l+1;\\ -\frac{(1-\ell)}{\sqrt{2}}B^{-1}, & k=m-l+1,\ \nu=l+1;\\ E_p, & k=\overline{2,m},\ k\neq l+1,m-l+1,\ \nu=m-k+2.\end{cases}$$

Легко бачити, що $J^*=-J$, $J^*J=E_{mp}$. Крім того, на підставі умов (A)–(C) звідси зрозуміло, що $G,H\in BV_{mp}^+[a,b]$, $G^*=G$, $H^*=H$, а матриці-стрибки $\Delta G(x)$, $\Delta H(x)$ мають лише один ненульовий $lp\times lp$ блок ($l\leq E(\frac{m}{2})$) у лівому верхньому куті. Відтак за допомогою безпосередньої перевірки встановлюємо правильність умов коректності (10).

Крайові умови (7) приводяться до вигляду (9) за допомогою блокових матриць P, Q розміру $mp\times mp$, складених з коефіцієнтів $P_{k\nu}$, $Q_{k\nu}$ крайових форм $U_k(y)$. Внаслідок лінійної незалежності крайових форм пара матриць $\{P,Q\}$ неособлива. J-унітарність цієї пари, тобто рівність (12), встановлюється безпосередньою перевіркою з використанням структури матриці J і співвідношення (19). Це означає, що виконується умова (E). Оскільки $A_{ij}=a'_{ij}$ для довільних $i,j=\overline{1,r}$ і матричні функції $a_{ij}(x)$ неспадні на $[a,b]$, то справджується умова (D). Нарешті, умова (F) очевидна з того, що рівняння $\mathcal{M}[y]=0$ і $\mathcal{N}[y]=0$ за умови (7) мають лише тривіальний розв'язок. ■

З леми зрозуміло, що перша компонента $y(x)$ вектор-розв'язку $Y(x)$ крайової задачі (8), (9) є розв'язком задачі (5), (7).

III. Формулювання результатів

Всюди далі вважаємо, що виконуються умови (A)-(C) і (19). Вивчення спектральних властивостей задачі на власні значення (1), (7) розпочнемо з дослідження порядку і роду розв'язків рівняння (1) за параметром λ. Зрозуміло, що вироджені за параметром λ розв'язки цього рівняння не залежать від λ і, отже, у цьому тривіальному випадку є функціями від λ нульового порядку і нульового роду. Тому далі розглядаємо лише невироджені розв'язки.

Означення 1. Матрицю-функцію $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$, яка за змінною x є розв'язком системи (11) і для довільного $t\in[a,b]$ задовольняє початкову умову $\mathcal{Y}(t,t,\lambda)=E_{mp}$, називаємо еволюційною матрицею цієї системи, що відповідає к.-д. рівнянню (1).

У статті [20] в загальному випадку встановлено, що еволюційна матриця $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$ системи (8) є цілою функцією від параметра λ порядку $\rho\leq 1$. У випадку системи, отриманої шляхом переходу від к.-д. рівняння (5), цей результат вдається покращити.

Теорема 1. *Еволюційна матриця $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$ системи* (11)*, що відповідає к.-д. рівнянню* (1)*, є* *цілою функцією від параметра λ порядку $\rho \le \frac{1}{m-n}$ і нульового роду.*

Відтак за теоремою Адамара [21, с. 38] функція $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$ допускає зображення

$$\mathcal{Y}(x,t,\lambda) = \mathcal{Y}(x,t,0)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right),$$

де $\mathcal{Y}(x,t,0)$ – еволюційна матриця, що відповідає к.-д. рівнянню $\mathcal{M}[y] = 0$, λ_k – нулі цілої функції $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$ за змінною λ, причому ряд $\sum\limits_{\lambda_k\ne 0}\frac{1}{|\lambda_k|^{\frac{1}{m-n}+\varepsilon}}$ є збіжним. Позаяк властивості довільного розв'зку $Y(x,\lambda)$ системи (11) як функції від λ повністю збігаються з властивостями $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$, то з попередньої теореми очевидний такий наслідок.

Наслідок 1. Усі невироджені розв'язки $y(x,\lambda)$ к.-д. рівняння (1) та їх квазіпохідні за змінною x до $(m-1)$-го порядку включно є цілими функціями від λ скінченного порядку $\rho \le \frac{1}{m-n}$ і нульового роду, причому для $\nu = \overline{0,m-1}$, $s = \overline{1,m}$ існує зображення

$$y_s^{[\nu]}(x,\lambda) = y_s^{[\nu]}(x,0)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{ks}}\right),$$

де $\{y_s(x,\lambda)\}$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (1), λ_{ks} – нулі цілих функцій $y_s(x,\lambda)$ за змінною λ.

Спектральні властивості задачі на власні значення (1), (7) відображає такий результат.

Теорема 2. *Задача на власні значення* (1), (7) *має спектр, що містить не більше, ніж злічену кількість власних значень, єдиною граничною точкою яких може бути лише $\lambda = \infty$. Власні значення λ_k всі дійсні і мають кратність, що не перевищує числа m; для довільного $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{\lambda_k\ne 0}|\lambda_k|^{-\frac{1}{m-n}-\varepsilon} < \infty.$$

Будь-які два власні вектори $y(x,\lambda_k)$ і $y(x,\lambda_\nu)$ цієї задачі, що відповідають різним власним значенням, є ортогональними в тому сенсі, що для $\lambda_k \ne \lambda_\nu$ справджуються співвідношення

$$\sum_{i,j=0}^{l-r}\int_a^b y^{[j]*}(x,\lambda_k)da_{l-i,l-j}\,y^{[i]}(x,\lambda_\nu) = 0. \qquad (22)$$

Відтак власні значення задачі (1), (7) можна записати у вигляді послідовності (що може обриватися)

$$\ldots \le \lambda_{-2} \le \lambda_{-1} \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots,$$

де $\lambda_{-1} < 0, \lambda_1 \ge 0$. Зрозуміло, їх можна послідовно перенумерувати, наприклад, у порядку неспадання абсолютних величин

$$0 \le |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le |\lambda_3| \le \ldots. \qquad (23)$$

Вважаємо, що кожне λ_k записано в послідовності (23) d_k разів, де d_k – його кратність ($1 \le d_k \le m$) як кореня *характеристичного рівняння*

$$\Delta(\lambda) \equiv \det\left[U_i(Z_j)\right]_{i,j=1}^{m} = 0,$$

тут $Z_1(x,\lambda), Z_2(x,\lambda),\ldots,Z_m(x,\lambda)$ – фундаментальна система розв'язків операторного рівняння

$$M(Z) = \lambda N(Z), \quad Z : [a,b] \to \mathbb{C}^{p\times p}, \qquad (24)$$

асоційованого з рівнянням (1) [12, с. 110]. Отже, кожному λ_k відповідає множина d_k послідовних індексів.

Якщо всі власні значення задачі (1), (7) прості ($d_k = 1$), то власні вектор-функції цієї задачі можна нормувати, прийнявши

$$y_k(x) = \frac{y(x,\lambda_k)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=0}^{l-r}\int_a^b y^{[j]*}(x,\lambda_k)da_{l-i,l-j}\,y^{[i]}(x,\lambda_k)}},$$

так, що співвідношення ортогональності набудуть вигляду

$$\sum_{i,j=0}^{l-r}\int_a^b y_k^{[j]*}(x)da_{l-i,l-j}\,y_\nu^{[i]}(x) = \delta_{k\nu} \qquad (25)$$

за умови, що $\lambda_k \ne \lambda_\nu$, коли $k \ne \nu$. У випадку кратних власних значень ($d_k > 1$) довільно вибрані власні вектор-функції, взагалі кажучи, не задовольняють співвідношення (25), однак за допомогою *процесу ортогоналізації* вдається побудувати ортонормовану систему власних вектор-функцій. Тому співвідношення ортогональності (25) вважаємо правильними і у випадку, коли $\lambda_k = \lambda_\nu$ незалежно від того $k = \nu$ чи $k \ne \nu$.

Далі досліджуємо питання розв'язності неоднорідної крайової задачі (5), (7) спершу для випадку, коли відповідна однорідна задача (1), (7) має лише тривіальний розв'язок, тобто за умови, що λ не є її власним значенням. У цьому випадку розв'язок задачі можна отримати в інтегральній (*фредгольмовій*) формі за допомогою конструктивно побудованої матричної *функції Ґріна* $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$.

Теорема 3. *Якщо λ не є власним значенням задачі* (1), (7), *то які б не були вектор-функції $f_j \in \overline{BV}_p^{\,+}[a,b]$ ($j = \overline{0,m-l-1}$) існує і до того ж єдиний розв'язок $y \in \overline{AC}_p\big([a,b]\times\mathbb{C}\big)$ неоднорідної крайової задачі* (5), (7), *який зображається у вигляді*

$$y(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{m-l-1}\int_a^b \frac{\partial^j \mathcal{G}(x,t,\lambda)}{\partial t^j}df_j(t), \qquad (26)$$

де $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$ – матрична функція Ґріна.

Твердження 1. Матрична функція Ґріна $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$ має такі властивості: 1) $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$ на кожному з інтервалів $[a,t)$ і $(t,b]$ за змінною x є розв'язком крайової задачі (1), (7); 2) $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$ та її (квазі)похідні за змінною x до $(m{-}l{-}1)$-го порядку включно є неперервними функціями за сукупністю змінних, абсолютно неперервними за кожною зі змінних при фіксованій іншій та цілими функціями від параметра λ; 3) $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$ на діагоналі $x=t$ задовольняє умови стрибків (при $l = E(\frac{m}{2})$, як очевидно з умов (A) та (B), $\Delta b_{i0}(t) = \Delta b_{0i}(t) \equiv 0,\ i = \overline{0,l}$):

$$\mathcal{G}^{[q]}(t{+}0,t,\lambda) - \mathcal{G}^{[q]}(t{-}0,t,\lambda) = O_p,\ q = \overline{0,m{-}l{-}2};$$

$$\mathcal{G}^{[m-l-1]}(t{+}0,t,\lambda) - \mathcal{G}^{[m-l-1]}(t{-}0,t,\lambda) = \\ = \sum_{i,k,\nu=1}^{m}\sum_{s=0}^{l} \tfrac{1-\ell}{\sqrt{2}} B^{-1}(t)\Delta b_{l-s,0}(t)\mathcal{K}^{(s)*\{i-1\}*}(t,a,\lambda)\frac{W_{ki}(\lambda)Q_{k\nu}}{\Delta(\lambda)}\mathcal{K}^{[\nu-1]}(b,t,\lambda);$$

$$\mathcal{G}^{[m-l-1+q]}(t{+}0,t,\lambda) - \mathcal{G}^{[m-l-1+q]}(t{-}0,t,\lambda) = \\ = \sum_{i,k,\nu=1}^{m}\sum_{s=0}^{l} \Delta b_{l-s,q}(t)\mathcal{K}^{(s)*\{i-1\}*}(t,a,\lambda)\frac{W_{ki}(\lambda)Q_{k\nu}}{\Delta(\lambda)}\mathcal{K}^{[\nu-1]}(b,t,\lambda){+}\Theta_{ql},\ q = \overline{1,r{-}1};$$

$$\mathcal{G}^{[m-l-1+q]}(t{+}0,t,\lambda) - \mathcal{G}^{[m-l-1+q]}(t{-}0,t,\lambda) = \\ = \sum_{i,k,\nu=1}^{m}\Bigg(\sum_{s=0}^{l} \Delta b_{l-s,q}(t)\mathcal{K}^{(s)*\{i-1\}*}(t,a,\lambda){-}\lambda\sum_{s=r}^{l}\Delta a_{l-s,q}(t)\mathcal{K}^{(s)*\{i-1\}*}(t,a,\lambda)\Bigg)\times \\ \times\frac{W_{ki}(\lambda)Q_{k\nu}}{\Delta(\lambda)}\mathcal{K}^{[\nu-1]}(b,t,\lambda){+}\Theta_{ql},\ q = \overline{r,l} \quad \Theta_{k\nu} = \begin{cases} O_p, & k \neq \nu; \\ E_p, & k = \nu; \end{cases}$$

тут $\mathcal{K}(x,t,\lambda)$ – матрична функція Коші к.-д. рівняння (1), котра за змінною x є розв'язком операторного рівняння (24) таким, що

$$\mathcal{K}_x^{[k]}(x,t,\lambda)\Big|_{x=t} = O_p,\ k = \overline{0,m{-}2},\quad \mathcal{K}_x^{[m-1]}(x,t,\lambda)\Big|_{x=t} = E_p,\quad t \in [a,b],\ \lambda \in \mathbb{C},$$

$W_{ki}(\lambda) = -\big(V_{ki}(\lambda)\big)^{\tau}$, де $V_{ki}(\lambda)$ – матриця розміру $p{\times}p$, складена з алгебраїчних доповнень елементів матриці $U_k\big(\mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x,a,\lambda)\big),\ k,i = \overline{1,m}$; 4) $\mathcal{G}(x,t,\lambda) = \mathcal{G}^{*}(t,x,\overline{\lambda})$ при $x \neq t$;

Зображення розв'язку неоднорідної крайової задачі (5), (7) можна подати також у *формі Шмідта*, котра має ту перевагу перед фредгольмовою формою (26), що в ній явно відображений мероморфний характер розв'язку відносно кожного полюса $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,2,\ldots$.

Теорема 4. *Якщо λ не є власним значенням задачі (1), (7), то неоднорідна крайова задача (5), (7) має єдиний розв'язок $y \in \overline{AC}_p\big([a,b]\times\mathbb{C}\big)$ вигляду*

$$y(x,\lambda) = \lambda\sum_k \frac{y_k(x)}{\lambda_k(\lambda{-}\lambda_k)}\Bigg(\sum_{j=0}^{l}\int_a^b y_k^{(j)*}(t)df_j(t) + \\ + \sum_{j=l+1}^{m-l-1}\ell(-1)^{j-l+1}\int_a^b y_k^{[j]*}(t)df_j(t)\Bigg) + f(x) \quad (27)$$

де

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-l-1}\int_a^b \frac{\partial^j\mathcal{G}(x,t,0)}{\partial t^j}df_j(t), \qquad (28)$$

і ряд справа в (27) збігається абсолютно і рівномірно на проміжку $[a,b]$.

Випадок, коли параметр λ збігається з d-кратним власним значенням λ_k з послідовності (22), тобто, коли для деякого k_0

$$\lambda = \lambda_k,\quad k \in \mathcal{I} = \{k_0{+}1, k_0{+}2, \ldots, k_0{+}d\},$$

зводиться до дослідження поведінки функції Ґріна $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$ в точках власних значень [11, с. 90]. У цій ситуації справджується також теорема.

Теорема 5. *Якщо λ є d-кратним $(1 \le d \le m)$ власним значенням задачі (1), (7), то неоднорідна задача (5), (7) має розв'язки, якщо і тільки якщо* *виконуються такі d умов:*

$$\sum_{j=0}^{l}\int_a^b y_k^{(j)*}(t)df_j(t)+$$
$$+\sum_{j=l+1}^{m-l-1}\ell(-1)^{j-l+1}\int_a^b y_k^{[j]*}(t)df_j(t)=0,\ \ k\in\mathcal{I}; \qquad (29)$$

при цьому розв'язки зображаються у вигляді

$$y(x,\lambda)=f(x)+\lambda\sum_{k\notin\mathcal{I}}^{\infty}\frac{y_\nu(x)}{\lambda_k(\lambda-\lambda_k)}\Bigg(\sum_{j=0}^{l}\int_a^b y_k^{(j)*}(t)df_j(t)+$$
$$+\sum_{j=l+1}^{m-l-1}\ell(-1)^{j-l+1}\int_a^b y_k^{[j]*}(t)df_j(t)\Bigg)+\sum_{k\in\mathcal{I}}c_k y_k(x), \qquad (30)$$

де $f(x)$ визначається формулою (28), c_k – довільні сталі і ряд справа в (30) збігається абсолютно і рівномірно на проміжку $[a,b]$.

IV. Доведення результатів

$\square$ *Доведення теореми 1.* Як відзначалося, перше твердження теореми про те, що еволюційна матриця $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$ системи (11) є цілою функцією від параметра λ, доведено в [20]. Тому встановимо лише оцінку $\rho\le\frac{1}{m-n}$, звідки одразу випливатиме [21, с. 39] й те, що $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$ – функція нульового роду.

Для цього систему (11) перепишемо у вигляді

$$J\widehat{Y}'=\big[\widehat{G}'(x)+\lambda^{\frac{1}{m-n}}H'(x)\big]\widehat{Y}, \qquad (31)$$

де

$$\widehat{Y}=\Big(y,\ldots,y^{[l-r]},\lambda^{\frac{1}{n-m}}y^{[l-r+1]},\lambda^{\frac{2}{n-m}}y^{[l-r+2]},\ldots,\lambda^{\frac{m-n-1}{n-m}}y^{[m-l+r-1]},\ldots,\lambda^{\frac{m-n-1}{n-m}}y^{[m-1]}\Big)^{\tau},$$

а матриця $\widehat{G}'(x)$ розміру $mp\times mp$ має таку блокову структуру (описуємо, як і раніше, лише ненульові $p\times p$ блоки $\widehat{G}_{k\nu}$ $k,\nu=\overline{1,m}$): якщо m парне:

$$\widehat{G}_{k\nu}=\begin{cases}\lambda^{\frac{m-n-1}{n-m}}(B_{0,l-k+1}B_{00}^{-1}B_{l-\nu+1,0}-B_{l-\nu+1,l-k+1}), & k,\nu=\overline{1,l};\\ -\lambda^{\frac{m-n-1}{n-m}}B_{0,l-k+1}B_{00}^{-1}, & k=\overline{1,l},\ \nu=l+1;\\ -\lambda^{\frac{m-n-1}{n-m}}B_{00}^{-1}B_{l-\nu+1,0}, & k=l+1,\ \nu=\overline{1,l};\\ \lambda^{\frac{1}{m-n}}B_{00}^{-1}, & k=\nu=l+1;\\ \lambda^{\frac{1}{m-n}}E_p, & k=\overline{2,m},\ (k\neq l+1),\nu=m-k+2;\end{cases}$$

при непарному m

$$\widehat{G}_{k\nu}=\begin{cases}-\lambda^{\frac{m-n-1}{n-m}}B_{l-\nu+1,l-k+1}, & k,\nu=\overline{1,l};\\ \frac{(1-\ell)}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{m-n-2}{n-m}}B_{0,l-k+1}B^{-1}, & k=\overline{1,l},\ \nu=l+1;\\ \frac{(1+\ell)}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{m-n-2}{n-m}}B^{-1}B_{l-\nu+1,0}, & k=l+1,\ \nu=\overline{1,l};\\ -\lambda^{\frac{m-n-3}{n-m}}B^{-1}B_{00}B^{-1}, & k=\nu=l+1;\\ -\frac{(1+\ell)}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{m-n}}B^{-1}, & k=l+1,\ \nu=m-l+1;\\ -\frac{(1-\ell)}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{1}{m-n}}B^{-1}, & k=m-l+1,\ \nu=l+1;\\ \lambda^{\frac{1}{m-n}}E_p, & k=\overline{2,m},\ k\neq l+1,m-l+1,\ \nu=m-k+2.\end{cases}$$

Еволюційна матриця $\widehat{\mathcal{Y}}(x,t,\lambda)$ системи (31), очевидно, задовольняє інтегральне рівняння

$$\hat{\mathcal{Y}}(x,t,\lambda)=E_{mp}+\int_t^x d\big[\widehat{G}(s)+\lambda^{\frac{1}{m-n}}H(s)\big]\widehat{\mathcal{Y}}(s,t,\lambda).$$

Перейшовши до норм і застосувавши узагальнену лему Гроноулла-Беллмана [22], отримаємо таку оцінку:

$$\|\widehat{\mathcal{Y}}(x,t,\lambda)\|\le mp\exp\Big\{{}_t^x\big[\widehat{G}+\lambda^{\frac{1}{m-n}}H\big](s)\Big\}\le$$
$$\le mp\exp\Big\{{}_a^b\big[\widehat{G}+\lambda^{\frac{1}{m-n}}H\big](x)\Big\}. \qquad (32)$$

З вигляду матриць $\widehat{G}(x)$, $H(x)$ на підставі означення повної варіації маємо, що при $|\lambda|\to\infty$

$${}_a^b\big[\widehat{G}+\lambda^{\frac{1}{m-n}}H\big](x)\le c_1|\lambda|^{\frac{1}{m-n}}+o\big(|\lambda|^{\frac{1}{m-n}}\big),$$

і оцінка (32) набуває вигляду

$$\|\widehat{\mathcal{Y}}(x,t,\lambda)\|\le c_2\exp\Big\{c_1|\lambda|^{\frac{1}{m-n}}+o\big(|\lambda|^{\frac{1}{m-n}}\big)\Big\},$$

де $c_i=\mathrm{const}>0,\ i=1,2.$

Отже, для довільного $\varepsilon>0$ існує $c(\varepsilon)$ таке, що

$$\|\widehat{\mathcal{Y}}(x,t,\lambda)\|\le\exp\Big\{c(\varepsilon)\cdot|\lambda|^{\frac{1}{m-n}+\varepsilon}\Big\}.$$

Це, фактично, означає, що порядок цілої функції $\widehat{\mathcal{Y}}(x,t,\lambda)$ не перевищує $\frac{1}{m-n}$.

Еволюційні матриці $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$ і $\widehat{\mathcal{Y}}(x,t,\lambda)$ пов'язані формулою

$$\mathcal{Y}(x,t,\lambda)=T(\lambda)\cdot\widehat{\mathcal{Y}}(x,t,\lambda),\ \text{де}\ T(\lambda)=\operatorname{diag}\big(\underbrace{E_p,\dots,E_p}_{l-r+1},\lambda^{\frac{1}{m-n}}E_p,\lambda^{\frac{2}{m-n}}E_p,\dots,\underbrace{\lambda^{\frac{m-n-1}{m-n}}E_p,\dots,\lambda^{\frac{m-n-1}{m-n}}E_p}_{l-r+1}\big).$$

Порядок функції $T(\lambda)$ як многочлена відносно λ дорівнює нулеві. Тому порядок цілої функції $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$

$$\rho\le\max\left(0,\tfrac{1}{m-n}\right)=\tfrac{1}{m-n},$$

що й завершує доведення теореми. ■

□ *Доведення теореми 2.* Нехай $y(x,\lambda_k)$ – власна вектор-функція крайової задачі (1), (7), що відповідає власному значенню λ_k. Тоді на підставі леми 1 задача

$$JY_k'=[G'(x)+\lambda_kH'(x)]Y_k,\tag{33}$$

$$PY_k(a)+QY_k(b)=0,$$

де

$$Y_k(x)=\Big(y(x,\lambda_k),y^{[1]}(x,\lambda_k),\dots,y^{[m-1]}(x,\lambda_k)\Big)^{\tau},\tag{34}$$

є самоспряженою. Внаслідок умов коректності (10) добутки $Y_k^*JY_\nu'$ і $Y_k^{*\prime}JY_\nu$ існують в сенсі теорії узагальнених функцій, до того ж справджується рівність

$$\begin{aligned}\big(Y_k^*JY_\nu\big)'&=Y_k^*JY_\nu'+Y_k^{*\prime}JY_\nu=\\&=Y_k^*\big(JY_\nu'\big)-\big(JY_k'\big)^*Y_\nu=Y_k^*[G'+\lambda_\nu H']Y_\nu-\\&-Y_k^*[G^{*\prime}+\overline{\lambda}_kH^{*\prime}]Y_\nu=(\lambda_\nu-\overline{\lambda}_k)Y_k^*H^{*\prime}Y_\nu,\end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned}&Y_k^*(b)JY_\nu(b)-Y_k^*(a)JY_\nu(a)=\\&\qquad=(\lambda_\nu-\overline{\lambda}_k)\int_a^bY_k^*(x)dH(x)Y_\nu(x).\end{aligned}$$

Тут використано рівняння (33) і властивості матриць J, $H(x)$, $G(x)$. Якщо, крім того, врахувати умову (15) для $Z\equiv Y_k$, $Y\equiv Y_\nu$, то отримаємо

$$(\lambda_\nu-\overline{\lambda}_k)\int_a^bY_k^*(x)dH(x)Y_\nu(x)=0.\tag{35}$$

Нехай $\lambda_\nu=\lambda_k$. Оскільки на підставі умови (14) $\displaystyle\int_a^bY_k^*(x)dH(x)Y_k(x)>0$, то з рівності (35) очевидно, що $\lambda_k=\overline{\lambda}_k$, тобто усі власні значення задачі (1), (7) є дійсними.

При $\lambda_\nu\neq\lambda_k=\overline{\lambda}_k$ зі співвідношення (35), якщо врахувати структуру матриці $H(x)$ і вектора $Y_k(x)$, випливає співвідношення ортогональності (22) власних векторів $y(x,\lambda_k)$ і $y(x,\lambda_\nu)$.

Власні значення задачі є нулями характеристичного визначника $\Delta(\lambda)=\det\big[U_k(Z_\nu)\big]_{k,\nu=1}^m$, де $Z_1(x,\lambda),\dots,Z_m(x,\lambda)$ – фундаментальна система розв'язків операторного рівняння (24). На підставі наслідку 1 ці розв'язки є цілими функціями від параметра λ, тому $\Delta(\lambda)$ – також ціла функція. Щойно було показано, що вона не має недійсних нулів, тому не анулюється тотожно. Отже, множина нулів цієї функції не має скінченної граничної точки. ■

□ *Доведення теореми 3.* Побудуємо розв'язки крайових задач з крайовими умовами (7) для к.-д. рівнянь

$$\mathcal{M}(y)-\lambda\mathcal{N}(y)=(-1)^{j+1}f_j^{(j+1)}(x),\quad j=\overline{0,m-l-1}\tag{36}$$

і підсумуємо їх.

Нехай $\mathcal{K}\colon[a,b]\times[a,b]\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{p\times p}$ – матрична функція Коші к.-д. рівняння (1). Тоді загальний розв'язок неоднорідного к.-д. рівняння (36) для довільного $j=\overline{0,m-l-1}$ має вигляд

$$y_j(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^m\mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x,a,\lambda)c_i^j+\int_a^x\mathcal{K}^{*\{j\}*}(x,t,\lambda)df_j(t),\ j\neq l;\\ \displaystyle\sum_{i=1}^m\mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x,a,\lambda)c_i^j+\frac{1-\ell}{\sqrt2}\int_a^x\mathcal{K}^{*\{l\}*}(x,t,\lambda)B^{-1}(t)df_l(t),\ j=l;\end{cases}\tag{37}$$

символ $\{\cdot\}$ означає квазіпохідну в сенсі спряженого до (24) рівняння [18, с. 50]. Враховуючи вирази для квазіпохідних

$$\begin{aligned}&Z^{[k]}=Z^{(k)},\ k=\overline{0,l-1};\quad Z^{[l+k]}=\tfrac{1-\ell}{\sqrt2}B^*(x)Z^{(l+k)},\ k=\overline{0,m-(2E(\tfrac m2)+1)};\\&Z^{[l+k]}=\big(Z^{[l+k-1]}\big)',\ k=\overline{1,2(E(\tfrac m2)-l)};\quad Z^{[m-l]}=\tfrac{1-\ell}{\sqrt2}B^*(x)\big(Z^{[m-l-1]}\big)'+\sum_{i=0}^lB_{0i}^*(x)Z^{(l-i)};\\&Z^{[m-l+k]}=-\big(Z^{[m-l+k-1]}\big)'+\sum_{i=0}^lB_{ki}^*(x)Z^{(l-i)},\ k=\overline{1,r-1}.\\&Z^{[m-l+k]}=-\big(Z^{[m-l+k-1]}\big)'+\sum_{i=0}^lB_{ki}^*(x)y^{(l-i)}-\lambda\sum_{i=r}^lA_{ki}^*(x)Z^{(l-i)},\ k=\overline{r,l},\end{aligned}\tag{38}$$

переписуємо (37) у вигляді

$$y_j(x)=\sum_{i=1}^{m}\mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x,a,\lambda)c_i^j+\int_a^x\mathcal{K}^{*<j>*}(x,t,\lambda)df_j(t); \tag{39}$$

тут символ $<\cdot>$ означає звичайну похідну $(\cdot)$ для $j=\overline{0,l}$ і квазіпохідну $\{\cdot\}$ для $j=\overline{l+1,m-l-1}$.

Розв'язок (39) містить m невідомих векторів c_i^j. Для їх відшукання необхідно задовольнити крайові умови (7). Відтак приходимо до системи m рівнянь

$$\sum_{i=1}^{m}U_k\Big(\mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x,a,\lambda)\Big)c_i^j+ \\ +\sum_{\nu=1}^{m}Q_{k\nu}\int_a^b\mathcal{K}^{[\nu-1]*<j>*}(b,t,\lambda)df_j(t)=0.$$

Оскільки за умовою теореми λ не є власним значенням, то визначник цієї системи не дорівнює нулеві. Тому вектори c_i^j, $i=\overline{1,m}$ визначаються з системи однозначно.

Через $V_{ki}(\lambda)$ позначимо матрицю порядку p, складену з алгебраїчних доповнень елементів матриці $U_k\Big(\mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x,a,\lambda)\Big)$, $k,i=\overline{1,m}$ у визначнику $\Delta(\lambda)$. Нехай $W_{ki}(\lambda)=-V_{ki}(\lambda)^\tau$. Тоді для $i=\overline{1,m}$

$$c_i^j=\sum_{k,\nu=1}^{m}\frac{W_{ki}(\lambda)Q_{k\nu}}{\Delta(\lambda)}\int_a^b\mathcal{K}^{[\nu-1]*<j>*}(b,t,\lambda)df_j(t).$$

Підставляємо ці значення у формулу (39). Вираз

$$\mathcal{G}_j(x,t,\lambda)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i,k,\nu=1}^{m}\mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x,a,\lambda)\frac{W_{ki}(\lambda)Q_{k\nu}}{\Delta(\lambda)}\mathcal{K}^{[\nu-1]*<j>*}(b,t,\lambda), & x<t;\\ \displaystyle\sum_{i,k,\nu=1}^{m}\mathcal{K}^{*\{i-1\}*}(x,a,\lambda)\frac{W_{ki}(\lambda)Q_{k\nu}}{\Delta(\lambda)}\mathcal{K}^{[\nu-1]*<j>*}(b,t,\lambda)+ & \\ \qquad\qquad +\mathcal{K}^{*<j>*}(x,t,\lambda), & x\geq t\end{cases}$$

називаємо матричною функцією Ґріна крайової задачі (36), (7). З огляду на структуру цієї матриці очевидною є така її властивість:

$$\mathcal{G}_j(x,t,\lambda)=\frac{\partial^j\mathcal{G}_0(x,t,\lambda)}{\partial t^j}\equiv\frac{\partial^j\mathcal{G}(x,t,\lambda)}{\partial t^j}\quad\forall\, j=\overline{0,l}. \tag{40}$$

На підставі (38) маємо

$$\mathcal{K}^{*\{l+k\}*}(x,t,\lambda)=\frac{\partial^k\mathcal{K}^{*\{l\}*}(x,t,\lambda)}{\partial t^k},\ k=\overline{1,m-2l-1},$$

тому властивість (40) справджується також для $j=\overline{l+1,m-l-1}$, що й доводить зображення (26). ■

Зауваження. Доведення теореми 3 можна було б отримати як наслідок з теореми A зі статті [8], на підставі якої розв'язок крайової задачі (8), (17) за умови, що λ не є власним значенням, має вигляд

$$Y(x)=\int_a^b K(x,t,\lambda)dF(t), \tag{41}$$

де розв'язувальне ядро

$$K(x,t,\lambda)=\begin{cases}\mathcal{Y}(x,a,\lambda)M[\mathcal{Y}(b,a,\lambda)M-N]^{-1}\mathcal{Y}(b,t,\lambda)J, & x<t,\\ \mathcal{Y}(x,a,\lambda)M[\mathcal{Y}(b,a,\lambda)M-N]^{-1}\mathcal{Y}(b,t,\lambda)J-\mathcal{Y}(x,t,\lambda)J, & x\geq t\end{cases} \tag{42}$$

є ермітовим у тому розумінні, що $K(x,t,\lambda)=K^*(t,x,\overline{\lambda})$, якщо $x\neq t$. Однак для отримання конкретного вигляду розв'язку вибраний нами шлях видається конструктивнішим. Тим не менше, порівнюючи зображення (26) і (41), легко зрозуміти, що перший $(p\times mp)$-блоковий рядок ядра $K(x,t,\lambda)$ є таким:

$$\left(-\mathcal{G},\ldots,-\frac{\partial^{l-1}\mathcal{G}}{\partial t^{l-1}},\tfrac{1-\ell}{\sqrt{2}}\frac{\partial^l\mathcal{G}}{\partial t^l}B(t),\ell\frac{\partial^{l+1}\mathcal{G}}{\partial t^{l+1}},-\ell\frac{\partial^{l+1}\mathcal{G}}{\partial t^{l+1}},\ldots,-\ell\frac{\partial^{m-l-1}\mathcal{G}}{\partial t^{m-l-1}},\underbrace{O_p,\ldots,O_p}_{l}\right). \tag{43}$$

☐ *Доведення твердження 1.* Властивість 4) є наслідком ермітовості розв'язувального ядра $K(x,t,\lambda)$. Властивості 1)–3) очевидні зі структури матричної функції Ґріна і властивостей розв'язків операторного рівняння (24) та спряженого до нього. Насправді, матричні функції $\mathcal{K}^{*\{i\}*}(x,t,\lambda)$, $i=$

$\overline{0,m{-}1}$ та $\mathcal{K}^{*[q]}(x,t,\lambda)$, $q = \overline{0,m{-}1}$ утворюють нормальні при $x{=}t$ фундаментальні системи розв'язків цих рівнянь, тому за результатами роботи [18] ці функції разом зі своїми квазіпохідними відповідно за змінними x і t до порядку $m{-}l{-}1$ включно належать до простору $AC_p[a,b]$ при фіксованій іншій змінній, а квазіпохідні вищих порядків є елементами простору $BV_p^+[a,b]$. До того ж для $i = \overline{0,m{-}1}$

$$\mathcal{K}^{[q]*\{i\}*}(x,t,\lambda) = \begin{cases} E_p, & i+q = m-1; \\ O_p, & i+q \neq m-1, \end{cases} \quad \Delta_x\mathcal{K}^{[q]*\{i\}*}(x,t,\lambda) = O_p, \quad q = \overline{0,m{-}l{-}2},$$

$$\Delta_x\mathcal{K}^{[m-l-1]*\{i\}*}(x,t,\lambda) = \sum_{s=0}^{l} \tfrac{1-\ell}{\sqrt{2}} B^{-1}(t)\Delta b_{l-s,0}(t)\mathcal{K}^{(s)*\{i\}*}(t,a,\lambda)$$

$$\Delta_x\mathcal{K}^{[m-l-1+q]*\{i\}*}(x,t,\lambda) = \sum_{s=0}^{l} \Delta b_{l-s,q}(t)\mathcal{K}^{(s)*\{i\}*}(t,a,\lambda), \quad q = \overline{1,r{-}1},$$

$$\Delta_x\mathcal{K}^{[m-l-1+q]*\{i\}*}(x,t,\lambda) = \sum_{s=0}^{l} \Delta b_{l-s,q}(t)\mathcal{K}^{(s)*\{i\}*}(t,a,\lambda) - \lambda\sum_{s=r}^{l} \Delta a_{l-s,q}(t)\mathcal{K}^{(s)*\{i\}*}(t,a,\lambda), \quad q = \overline{r,l}.$$

■

□ *Доведення теорем 4 і 5.* На підставі леми 1 неоднорідна крайова задача (5), (7) еквівалентна крайовій задачі (8), (18). Не зменшуючи загальності вважаємо, що $\lambda = 0$ не є власним значенням відповідної самоспряженої крайової задачі (11), (18). Розглядаючи рівняння (11) як неоднорідне (з неоднорідністю $\lambda H'(x)Y$), розв'язок цієї задачі на підставі формули (41) подається у вигляді навантаженого інтегрального рівняння типу Фредгольма-Стільтьєса

$$Y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)dH(s)Y(s), \tag{44}$$

з матричним ядром $K(x,s)$, що визначається формулою (42) при $\lambda = 0$. Далі, очевидно, задача (8), (18) еквівалентна неоднорідному інтегральному рівнянню

$$Y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)dH(t)Y(t) + \widehat{F}(x),$$

причому

$$\widehat{F}(x) = \int_a^b K(x,s)dF(s). \tag{45}$$

У випадку, коли $\lambda = 0$ є власним значенням задачі (11), (18), вибираємо таке значення λ^0, яке не є власним, і переписуємо рівняння (11) у вигляді

$$JY' = \left[G^{+\prime}(x) + \lambda^- H'(x)\right]Y, \tag{46}$$

де $G^+(x) = G(x){+}\lambda^0 H(x)$, $\lambda^- = \lambda{-}\lambda^0$. Зрозуміло, що тоді $\lambda^- = 0$ не є власним значенням задачі (46), (18), а тому застосовними є викладені вище міркування. Відзначимо, що власні вектори задачі (46), (18) збігаються з власними векторами задачі (11), (18), з тією лише різницею, що тепер $Y_k(x)$ відповідає зсунутому власному значенню $\lambda_k^- = \lambda_k - \lambda^0$.

За результатами статті [8], якщо λ не збігається з жодним із власних значень самоспряженої крайової задачі (11), (18), то існує і притому єдиний розв'язок неоднорідної задачі (8), (18), що зображається у вигляді

$$Y(x,\lambda) = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{Y_k(x)}{\lambda_k(\lambda_k{-}\lambda)}\int_a^b Y_k^*(s)dF(s)\right) + \widehat{F}(x),$$

де $\widehat{F}(x)$ визначається формулою (45), причому ряд у правій частині є абсолютно і рівномірно збіжним на відрізку $[a,b]$. За умови, коли λ збігається з d-кратним власним значенням λ_k задачі (11), (18), розв'язок неоднорідної задачі (8), (18) існує, якщо і тільки якщо

$$\int_a^b Y_k^*(s)dF(s) = 0, \quad k \in \mathcal{I},$$

і має вигляд (c_k – довільні сталі)

$$Y(x,\lambda) = \lambda\sum_{k\notin\mathcal{I}}\left(\frac{Y_k(x)}{\lambda_k(\lambda_k{-}\lambda)}\int_a^b Y_k^*(s)dF(s)\right) + \sum_{k\in\mathcal{I}} c_k Y_k(x) + \widehat{F}(x).$$

Звідси, якщо врахувати (20), (21), (34) і (43), безпосередньо випливає твердження теорем 4 і 5. ■

V. Приклад

Проілюструємо на конкретному прикладі метод відшукання спектра задачі на власні значення вигляду (1), (7). Розглянемо векторне к.-д. рівняння (систему) четвертого порядку

$$\left(\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{1+sinx} & 0\\ 0 & \frac{1}{1+sinx}\end{pmatrix}y''\right)'' + \lambda\left(\left(\begin{pmatrix}3\delta(x-\pi) & 0\\ 0 & 2\delta(x-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}y' + \begin{pmatrix}\delta(x-\frac{\pi}{4}) & 0\\ 0 & -\delta(x-\pi)\end{pmatrix}y\right)' - \right.\right.$$
$$\left. - \lambda\left(\begin{pmatrix}\delta(x-\frac{\pi}{4}) & 0\\ 0 & -\delta(x-\pi)\end{pmatrix}y' + \begin{pmatrix}0 & 2\delta(x-\pi)\\ 2\delta(x-\pi) & 0\end{pmatrix}y\right) = 0, \tag{47}$$

де $y = (u\,,\,v)^\tau$, разом з крайовими умовами

$$y^{[k-1]}(0) = y^{[k-1]}(\pi), \quad k = \overline{1,4}. \tag{48}$$

Легко переконатися, що коефіцієнти цього рівняння задовольняють умови (A)-(C), а крайові матриці $P_{k\nu}$, $Q_{k\nu}$ $(k,\nu = \overline{1,4})$ мають вигляд

$$P_{k\nu} = -Q_{k\nu} = \begin{cases} E_2, & k=\nu,\\ O_2, & k \neq \nu,\end{cases}$$

і задовольняють умову (19) при $l = E\left(\frac{m}{2}\right) = 2$. Введемо квазіпохідні згідно з формулами (6):

$$y^{[1]} = y'; \quad y^{[2]} = \begin{pmatrix}\frac{1}{1+sinx} & 0\\ 0 & \frac{1}{1+sinx}\end{pmatrix}y'';$$
$$y^{[3]} = -\left(y^{[2]}\right)' - \lambda\begin{pmatrix}3\delta(x-\pi) & 0\\ 0 & 2\delta(x-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}y' - \tag{49}$$
$$-\lambda\begin{pmatrix}\delta(x-\pi) & 0\\ 0 & -\delta(x-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}y.$$

Тоді за допомогою вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\right)^\tau$ задача на власні значення (47), (48) зводиться до задачі вигляду

$$Y' = \left[(A'(x) + \lambda B'(x)\right]Y, \tag{50}$$

$$Y(0) = Y(\pi). \tag{51}$$

Матриці $A' = (A_{k\nu})$ і $B' = (B_{k\nu})$, де $k,\nu = \overline{1,4}$ мають блокову структуру. Опишемо їх ненульові блоки:

$$A_{12} = E_2, \quad A_{23} = (1+sinx)E_2, \quad A_{34} = -E_2,$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix}-\delta(x-\frac{\pi}{4}) & 0\\ 0 & \delta(x-\pi)\end{pmatrix},$$

$$B_{32} = \begin{pmatrix}-3\delta(x-\pi) & 0\\ 0 & -2\delta(x-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix},$$

$$B_{41} = \begin{pmatrix}0 & -2\delta(x-\pi)\\ -2\delta(x-\pi) & 0\end{pmatrix},$$

$$B_{42} = \begin{pmatrix}-\delta(x-\frac{\pi}{4}) & 0\\ 0 & \delta(x-\pi)\end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що задача (50), (51) є задачею вигляду (11), (9) з матрицями

$$J = (J_{k\nu})_{k,\nu=\overline{1,4}}, \quad J_{k\nu} = \begin{cases} O_2, & k+\nu \neq 5,\\ -E_2, & k+\nu = 5,\ k<\nu,\\ E_2, & k+\nu = 5,\ k>\nu,\end{cases}$$

$G' = JA'$, $H' = JB'$, $P = -Q = E_8$.

Обидва рівняння

$$\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{1+sinx} & 0\\ 0 & \frac{1}{1+sinx}\end{pmatrix}y''\right)'' = 0 \tag{52}$$

та

$$\left(\begin{pmatrix}3\delta(x-\pi) & 0\\ 0 & 2\delta(x-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}y'\right)' - \begin{pmatrix}\delta(x-\frac{\pi}{4}) & 0\\ 0 & -\delta(x-\pi)\end{pmatrix}y' +$$
$$+\left(\begin{pmatrix}\delta(x-\frac{\pi}{4}) & 0\\ 0 & -\delta(x-\pi)\end{pmatrix}y\right)' - \begin{pmatrix}0 & 2\delta(x-\pi)\\ 2\delta(x-\pi) & 0\end{pmatrix}y = 0$$

за умов (48) мають лише тривіальний розв'язок. Відтак на підставі леми 1 задача (47), (48) є самоспряженою, а її спектр – дійсним.

Для відшукання власних значень цієї задачі найперше необхідно побудувати еволюційну матрицю $\mathcal{Y}(x,t,\lambda)$ системи (50). На інтервалах $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ і $\left(\frac{\pi}{4};\pi\right)$ рівняння (47) має вигляд (52), а відповідна система –

$$Y' = A'(x)Y. \tag{53}$$

Матричну функцію Коші рівняння (52) (з врахуванням вигляду квазіпохідних (49)) можна обчислити за формулою [23]

$$K(x,t) = -\int\limits_t^x (1+sin\xi)(x-\xi)(\xi-t)E_2 d\xi.$$

Тоді еволюційна матриця $\widetilde{\mathcal{Y}}(x,t)$ системи (53) має таку блокову структуру [24]:

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_{ij}(x,t) = \begin{cases} E_2, & i=j,\\ O_2, & i>j,\end{cases} \quad i,j = \overline{1,4},$$

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_{12}(x,t) = (x-t)E_2,$$

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_{13}(x,t) = \int_t^x (1+sin\xi)(x-\xi)E_2 d\xi,$$

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_{14}(x,t) = -\int_t^x (1+sin\xi)(x-\xi)(\xi-t)E_2 d\xi,$$

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_{23}(x,t) = \int_t^x (1+sin\xi)E_2 d\xi,$$

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_{24}(x,t) = -\int_t^x (1+sin\xi)(\xi-t)E_2 d\xi,$$

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_{34}(x,t) = -(x-t)E_2.$$

Використовуючи умову стрибка розв'язку узагальненої диференціальної системи першого порядку та властивість гармонічності її еволюційної матриці [18], запишемо формулу для обчислення еволюційної матриці системи (50) в точці $x = \pi$, $t = 0$:

$$\mathcal{Y}(\pi, 0, \lambda) = \Big(E_8 + \Delta A(\pi) + \lambda \Delta B(\pi)\Big)\mathcal{Y}\big(\pi - 0, \tfrac{\pi}{4}\big)\times$$

$$\times\Big(E_8 + \Delta A\big(\tfrac{\pi}{4}\big) + \lambda \Delta B\big(\tfrac{\pi}{4}\big)\Big)\mathcal{Y}\big(\tfrac{\pi}{4} - 0, 0\big).$$

Зауважимо, що

$$\mathcal{Y}\big(\pi - 0, \tfrac{\pi}{4}\big) = \widetilde{\mathcal{Y}}\big(\pi, \tfrac{\pi}{4}\big), \quad \mathcal{Y}\big(\tfrac{\pi}{4} - 0, 0\big) = \widetilde{\mathcal{Y}}\big(\tfrac{\pi}{4}, 0\big).$$

Позначимо $\Delta C(x, \lambda) = E_8 + \Delta A(x) + \lambda \Delta B(x)$. Розв'язок системи (50) у точці $x = \pi$ обчислюється за формулою

$$Y(\pi, \lambda) = \Delta C(\pi, \lambda)\widetilde{\mathcal{Y}}\big(\pi, \tfrac{\pi}{4}\big)\Delta C\big(\tfrac{\pi}{4}, \lambda\big)\widetilde{\mathcal{Y}}\big(\tfrac{\pi}{4}, 0\big)Y_0. \quad (54)$$

Використовуючи крайові умови (51) та формулу (54), одержимо характеристичне рівняння для визначення власних значень задачі (47), (48):

$$Det\Big[E_8 - \Delta C(\pi, \lambda)\widetilde{\mathcal{Y}}\big(\pi, \tfrac{\pi}{4}\big)\Delta C\big(\tfrac{\pi}{4}, \lambda\big)\widetilde{\mathcal{Y}}\big(\tfrac{\pi}{4}, 0\big)\Big] = 0.$$

Очевидно, що характеристичним рівнянням буде многочлен від λ, і це є зрозумілим наслідком того, що первісна матриці-міри при параметрі λ в рівнянні (47) є східчастою матрицею-функцією зі скінченною кількістю точок розривів. У цьому випадку це є многочлен 12-го степеня, корені якого і є власними значеннями задачі (47), (48): $\lambda_1 \approx -6.655$ – корінь кратності 4, $\lambda_5 \approx -2.259 \cdot 10^{-12}$, $\lambda_6 = 0$, $\lambda_7 \approx 0.941$, $\lambda_8 \approx 1.18$, $\lambda_9 \approx 2.534$ – корінь кратності 4.

Висновки

Використання концепції квазіпохідних дає змогу відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів диференціальних виразів, а відтак є ефективним засобом дослідження задач на власні значення (як одночленного, так і багаточленного класів), а також неоднорідних крайових задач для скалярних і векторних к.-д. рівнянь довільного скінченного порядку з розподілами у коефіцієнтах.

Важливими є також подальші дослідження задачі (1), (7) на півосі, точніше дослідження послідовності таких задач, побудованої з метою проведення граничного переходу в деяких результатах теорії (зазвичай в теоремі про розвинення). Однак у сингулярному випадку замість розвинення в ряд за власними функціями можна отримувати розвинення в інтеграл. Ця обставина обумовлена тим, що спектр нерегулярного диференціального оператора може містити, окрім дискретної, неперервну частину.

Література

[1] Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с.

[2] Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / Кухта К.Я и др. – К.: Наукова думка, 1981. – 335 с.

[3] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. - 224 с.

[4] Schwabik Š. Generalized Ordinary Differential Equations. – World Scientific, Singapore, 1992.

[5] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 750 с.

[6] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, №1. – С. 43–53.

[7] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь непарного порядку // Математичні студії. - 2001. – 16, №1. - С. 61–75.

[8] Мазуренко В.В., Таций Р.М. О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т.39, №3. – С. 328–336.

[9] Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Кісілевич В.В. Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка": Прикладна матем. – 1996. – №299. – С. 165–170.

[10] Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Кісілевич В.В. Неоднорідна дискретно-неперервна крайова задача для векторного КДР // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка": Прикладна матем. – 1998. – №346. – С. 120–124.

[11] Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями: Пер. с нем. – М.: Наука, 1968. – 504 с.

[12] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

[13] Walker Ph.W. A vector-matrix formulation for formally symmetric ordinary differential equations with applications to solutions of integrable square // J. London Math. Soc. – 1974. – (2) 9. – P. 151–159.

[14] Рофе-Бекетов Ф.С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Доклады АН СССР. – 1969. – 184, №5. – С. 1034–1037.

[15] Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7 (49), №3. – С. 479–532.

[16] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. – Изд. 4-е, испр. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

[17] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

[18] Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння // Препр. №2–94. – Львів: ІППММ АН України, 1994. – 56 с.

[19] Стасюк М., Тацій Р. Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – Вип. №566. – 2006. – С. 33–40.

[20] Тацій Р.М., Кісілевич В.В., Стасюк М.Ф., Пахолок Б.Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинський матем. вісник: Прикладні проблеми матем. та інформ. – 1995, Вип. 2. – С. 165–167.

[21] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

[22] Пахолок Б.Б. Об одном неравенстве типа Гронуолла-Беллмана // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1989, №232. – С. 109–110.

[23] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Власій О. О., Живічиньскі М. Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Сер. "Фізико-математичні науки". – 2007. – №601. – С.18–27.

[24] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // ДАН УРСР: Серія А. – 1989. – №4 - С. 25–28.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF QUASIDIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRIBUTIONS AS COEFFICIENTS

O.O. Vlasij, V.V. Mazurenko

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
57 Shevchenko Str., 76025, Ivano-Frankivsk, Ukraine

The spectral properties of the eigenvalue problem for system of quasidifferential equations with distributions as coefficients are researched. The necessary and sufficient existence conditions of solutions of corresponding nonhomogeneous boundary value problem are established. The representation of this solutions is given in an integral (Fredholm) form with the aid of structurally constructed Green matrix-function and in (Schmidt) form of absolutely equiconvergent series after eigen vector-function.

Keywords: system of quasidifferential equations, quasi-derivative, distribution, self-adjoint boundary value problem, Green matrix-function, Shmidt formula

2000 MSC: 34B05;34B27;34A37

УДК: 517.927