

МАТЕМАТИКА У ЛЬВІВСЬКІЙ ПОЛІТЕХНІЦІ  
НАПРИКІНЦІ ХХ — ПОЧАТКУ ХХІ СТОЛІТЬ

П. Каленюк\*, Л. Новіков

*Національний університет “Львівська політехніка”  
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна*

У статті подано огляд деяких наукових результатів, що отримані на основі ідей та методів, які виникли і розвиваються у математичних школах Львова в останній чверті ХХ ст. і на початку ХХІ ст.

**Ключові слова:** диференціальне рівняння з частинними похідними, регулярні та сингулярні інтегральні рівняння, матричний поліном, узагальнений метод відокремлення змінних, неперервні дроби, гіллясті ланцюгові дроби, модель Фрідрікса, алгебри Лі, дробово-раціональні числові методи, динамічна задача термопружності.

## Вступ

Минуло 160 років відтоді як у 1844 р. у Львові був заснований один із найстаріших технічних закладів вищої освіти України – Львівська політехніка.

З Львівською політехнікою пов'язано все творче життя не тільки генія математики Стефана Банаха (30.III 1892 – 31.VIII 1945), але й багатьох славетних вчених, наукові здобутки яких долучаються і донині до науково-технічного поступу людства у пізнанні мікро- та макросвіту природничих явищ, економіко-виробничої діяльності та інформаційних технологій завдяки наполегливій, щоденній, невпинній праці науково-педагогічного складу трударів від науки.

До 150-річчя Львівської політехніки було видано альбом, вісник і книгу про відомих вчених, які причетні до її славетних справ [1–3].

За десять наступних літ незважаючи на труднощі, що пов'язані з утворенням і становленням самостійної Української держави, науково-педагогічний колектив під вмілим керівництвом ректора професора Ю.К. Рудавського не був розпорошений, а й множений за рахунок академічних кадрів, підготовки аспірантів і збагатив математику новими здобутками. Це стосується і науково-прикладних проблем математики та інформатики, і видавничої діяльності зі створення належних підручників і посібників, які унеможливають зниження рівня викладання математичних дисциплін і порушення взаємозв'язку між математикою і запитамі фізики, механіки, хімії, біології, теорії інформації, лінгвістики, економіки та потребами у вирішенні математико-логічних проблем, що виникають при конструюванні приладів і пристроїв до них.

Віддаючи належну шану минулому, ми хочемо

описати тут про нинішній стан справ у галузі математики у Національному університеті, статусу якого набула Львівська політехніка 11 вересня 2000 р.

Природно, що ми розглянемо лише деякі аспекти сучасного процесу розвитку математики у Львівській політехніці і, зважаючи на обсяг статті, не зможемо поіменно назвати всіх наших колег, які працюють самовіддано на теренах науки і освіти.

Тим, хто дійсно цікавиться, чим займаються математики, а також на кафедрах природничого спрямування, які об'єднані з ними в єдиний Інститут прикладної математики та фундаментальних наук, радимо ознайомитись з тезами науково-технічних конференцій професорсько-викладацького складу, що відбулися 6 – 7 червня 2002 р., 15 – 16 травня 2003 р. та 27 – 28 травня 2004 р. [4–6].

Постачальником науково-педагогічних кадрів математиків для Львівської політехніки віддавна в основному був Львівський університет імені Івана Франка, з яким Політехніка має творчу співдружність у вигляді спільних щотижневих наукових семінарів, наукових симпозіумів, захистів дисертацій. Львівська політехніка співпрацює з Інститутом прикладних проблем механіки та математики (ІППММ) ім. Я.С. Підстригача, який належить до Західного наукового центру НАН України.

Величезного обсягу праця вкладена вченими Політехніки у обчислювальну математику та інформатику, що дозволяє із загальних позицій формулювати і вирішувати проблеми зі створення оптимальних алгоритмів і їх реалізації для нелінійних диференціальних, інтегро-диференціальних, різницевих, операторних рівнянь та їх систем.

Про цей важливий розділ математики ми теж мусимо тут зазначити, хоча, звичайно, і не вичерпно,

\* Автор-респондент

оскільки наука, як вся природа, розвивається безупинно.

## I. Напрямки розвитку математичних шкіл: огляд основних ідей та результатів їх реалізації

Видатним математиком другої половини ХХ ст. був український академік Ярослав Борисович Лопатинський (9.XI.1906 – 10.III.1981), який завідував кафедрою диференціальних рівнянь Львівського державного університету імені Івана Франка з 1946 по 1963 рр. Його основні наукові роботи опубліковані у книзі [7], просте ознайомлення з якою дає уяву про загальність поглядів вченого на системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, інтегральних рівнянь, – регулярних та сингулярних, а також операторних рівнянь у просторах Банаха.

Я.Б. Лопатинський створив математичну школу, в якій на щотижневих семінарах розглядали всі ідеї, що стосуються диференціальних рівнянь. Ці ідеї піднімалися до рівня великої загальності, і загальність поглядів, взаємозв'язок всіх розділів математики, критичність підходів до них поєднана з повагою до науки, – риси цього творчого семінару, який був відкритий для всіх студентів: математиків, механіків, фізиків.

Один із авторів цього нарису пам'ятає, як на лекції з теорії звичайних диференціальних рівнянь, яку читав Я.Б. Лопатинський для молодших курсів, були присутні десятки викладачів механіко-математичного факультету та студенти старших курсів і аспіранти.

До школи Я.Б. Лопатинського, дух якої був насичений математичними ідеями, які, здавалось, готові обійняти весь науковий світ, потрапили дві особистості, з якими пов'язаний бурхливий розвиток математики у Львівській політехніці, – це майбутні її професори Віталій Якович Скоробогатько (18.VII.1927 – 04.VII.1996) і Петро Степанович Казімірський (26.XI.1925 – 14.II.1990).

У 1965 – 1971 рр. кафедру вищої математики Політехніки очолив доцент Михайло Олександрович Ігнат'єв, який був людиною, чутливою до голосу науки.

Зусиллями М.О. Ігнат'єва у Львівському політехнічному інституті була відкрита аспірантура з математичних спеціальностей, яку започаткували В.Я. Скоробогатько і П.С. Казімірський.

Я.Б. Лопатинський висунув проблему про розкладність матричного многочлена на множники, він же зробив перші кроки у її розв'язанні.

Істотного поступу ці дослідження набули в працях П.С. Казімірського та його однодумців і наукових соратників Ф.П. Луника, Д.В. Уханської, М.М. Урбанович, М.М. Дрогомижської, М.І. Худого, Л.М. Гринів, Д.М. Білоноги, М.І. Томецького.

Згодом Фома Павлович Луник (14.X.1914 – 22.V.1996) обіймав посаду завідувача кафедри вищої

математики у 1971 – 1977 рр. і проявив себе як зразковий інтелігент і керівник великого наукового колективу, у якому панував не начальницький стиль, а дух справжньої взаємоповаги, доброзичливості і вимогливості до рівня викладання математики.

Під час керівництва кафедрою Ф.П. Луником до її складу ввійшли спеціалісти з теоретичної фізики, механіки, які суттєво просунули вперед прикладні проблеми науки і створили міцну теоретичну базу для втілення математичних ідей у наукову практику, про що йтиметься далі.

Віталій Якович Скоробогатько – вчений широкого математичного і філософського мислення – зробив значний внесок у теорію диференціальних рівнянь з частинними похідними [8]. З його життєвим і творчим шляхом можна ознайомитись у книзі [9]. В.Я. Скоробогатько звернув увагу на метод С.О. Чаплигіна побудови наближених розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і зауважив, що його аналогом для чисел і функцій є теорія неперервних, ланцюгових дробів. Річ у тім, що метод С.О. Чаплигіна захоплює точний розв'язок диференціального рівняння у “вилку”, яку утворюють верхнє та нижнє його наближення. Ланцюгові неперервні дроби теж мають властивість “вилки”. В.Я. Скоробогатько разом з учнями, до яких долучився його аспірант, майбутній знаний в галузі обчислювальної математики вчений, доктор фізико-математичних наук Петро Іванович Боднарчук (16.III.1934 – 29.III.1989) створив “Клуб творчих математиків м. Львова”.

Згодом у 1976 р. П.І. Боднарчук став першим завідувачем новоствореної кафедри обчислювальної математики і програмування (ОМП).

Науково-педагогічне ядро кафедри ОМП склали доценти П.П. Козак, Л.О. Новіков, М.С. Сявавко, а також викладачі В.М. Марко, Ж.М. Нікітюк, Е.М. Парасюк, П.В. Фролова, Т.Г. Коваленко, В.К. Іванел, Н.Ф. Клочко, А.Ф. Обшта, І.І. Демків, І.Т. Кравець, О.Г. Вовченко, М.А. Шуляр, Л.О. Циганкова.

Сконцентрована і налаштована на наукові пошуки В.Я. Скоробогатьком група вчених, серед яких П.І. Боднарчук, Д.І. Боднар, Х.Й. Кучмінська, Р.В. Слоньовський, а також інші дослідники створили і розвинули, попри деякий скептицизм, новий математичний апарат – теорію гіллястих ланцюгових дробів. Її континуальний аналог – теорію інтегральних дробів, – згодом розвинув М.С. Сявавко і захистив докторською дисертацією. Плідні пошуки здійснив Д.І. Боднар, нині теж доктор фізико-математичних наук, професор. Першою підсумковою його працею стала невелика книга [10]. Відповідальним редактором цієї книги був В.Я. Скоробогатько, а рецензентом, котрий рекомендував її до друку, був видатний український математик Владислав Кирилович Дзядик, член-кореспондент АН України. В.К. Дзядик – спеціаліст з теорії апроксимації функцій, розділу математики, який потребує вели-

кого терпіння і працездатності, оскільки отримання оцінок розбіжностей між функціями чи іншими об'єктами і їх наближеннями – праця, як кажуть, “чорна” і тривала. Учнем В.К. Дзядика є доцент кафедри вищої математики М.М. Чип, що й нині плідно працює у галузі теорії наближень та проблеми моментів.

Аспірантом В.Я. Скоробогатка був і випускник Московського університету ім. М.В. Ломоносова Петро Іванович Каленюк, нині професор і завідувач кафедри обчислювальної математики і програмування. Саме він зайнявся вивченням, здавалось би, добре знаного у математичній фізиці методу відокремлення змінних, який пов'язує з іменем Фур'є. Тривала праця, виконана П.І. Каленюком і поготів згуртованою ним школою молодих математиків, полягала в тому, щоб розширити можливості методу відокремлення змінних і з'ясувати та захистити теоремами умови, за яких розв'язується насамперед така задача.

Дано однорідне диференціальне рівняння

$$LU(t, x) = 0, \quad (1)$$

де  $L$  – оператор, визначений на множині  $D(L)$  функцій двох змінних  $t$  та  $x$ . Припускається, що  $t \in R^\sigma$ ,  $x \in R^\theta$ ,  $\sigma, \theta \in N$ , ( $N$  – множина натуральних чисел).

За яких, не дуже обтяжливих, умов розв'язок можна подати у вигляді

$$U(t, x) = \sum_{i=1}^k T_i(t) X_i(x), \quad (2)$$

або, що те саме, коли оператор  $L$  є відокремлюваний?

Ця задача породила значну кількість проблем, головною з яких є проблема побудови розв'язків білінійних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) g_k(x) = 0 \quad (3)$$

та систем таких рівнянь.

Сам П.І. Каленюк, його учень З.М. Нитребич, котрий вже теж постає як математик високого рівня, вирішили принципові вузли проблеми, так що тепер з повним правом можна говорити про те, що побудовано загальний метод відокремлення змінних. Ці дослідження частково описані у книгах та наукових публікаціях, посилання на які можна знайти в [11], а також в книзі П.І. Каленюка, Я.О. Баранецького, З.М. Нитребича [12]. Відзначимо, що різні її аспекти було відпрацьовано у дисертаціях Я.О. Баранецького, З.М. Нитребича, В.М. Бушмакіна, П.Л. Сохана, М.Б. Воробець.

До речі, В.М. Бушмакін розглядав крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь з кратним спектром і встановив для багатьох з них класи коректної розв'язності таких рівнянь у випадку необмежених кратностей спектра.

Можливо, що в напрямку проблем інтегровності диференціальних рівнянь ще не повністю висловились геометрія і топологія, хоча в теперішній час тут вже накопичено багато цікавих фактів та побудов.

Доцентом Політехніки та її докторантом був І.В. Микитюк, який тепер працює в ШПММ ім. Я.С. Підстригача. У червні 2004 р. у Московському університеті І.В. Микитюк захистив докторську дисертацію і вже має диплом доктора фізико-математичних наук. Як свідчить автореферат [13], основним об'єктом досліджень у роботі є комплексні  $G$  - інваріантні поляризації на областях кодотичних розшарувань  $T^*M$  ріманових однорідних просторів  $M = G/K$  редукованих груп Лі  $G$  і пуассонові алгебри  $G$  - інваріантних функцій на  $T^*M$ . Серед поляризацій особливо виділяються додатно визначені поляризації, тобто келерові структури  $(I, \Omega)$  з канонічною симплексною формою  $\Omega$  у якості келерової форми. Основним методом є метод редукції. Цікаво, що за допомогою цього методу задача розв'язування рівнянь з частинними похідними, які описують поляризації, зводиться до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь і до розв'язування задач теорії напівпростих груп та алгебр Лі. У Львівській політехніці працюють спеціалісти з топології (Л.Є. Базилевич) та алгебраїчної геометрії (Я.Ю. Гайдис). Наближення відображень евклідових просторів топологічними відображеннями за додаткових обмежень на їх властивостей є предметом досліджень доцента І.Я. Олексіва.

Умовам голоморфності відображень областей комплексної площини в комплексну площину були присвячені дослідження М.Т. Бродович.

Математичний аналіз виробив сильний обчислювальний апарат рядів, насамперед степеневих, завдяки якому долаються труднощі, що пов'язані з обчисленням значень функцій та побудовою їх наближень. Однак апарат рядів натрапляє на “опір” в околах особливих точок функцій, наприклад, полюсів. Цього недоліку здебільшого позбавлені дробово-раціональні функції, а для побудов дробово-раціональних апроксимацій функцій природно використовується теорія неперервних дробів.

У напрямку наближення функцій однієї та багатьох змінних успішно працює Х.Й. Кучмінська, яка була аспіранткою В.Я. Скоробогатка. Христина Йосифівна захистила за цією тематикою кандидатську дисертацію, працює доцентом Політехніки і виховала двох кандидатів наук. Тепер її з аспірантами увагу привернули двовимірні неперервні дробі (ДНД) – відповідні до двократного степеневого ряду. Тут Х.Й. Кучмінська з учнями досягли вже значного успіху: узагальнено ознаки Ворпійського, Принсгейма-Слешинського, Ван Флека.

Зокрема нею запроваджено ДНД-аналог подвійного ряду Тейлора для двовимірних неперервних дробів для функції двох змінних  $f(z_1, z_2)$ :

$$\Phi_0(z_1, z_2) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(z_1 - z_1^0)(z_2 - z_2^0)}{\Phi_i(z_1, z_2)}, \quad (4)$$

$$\Phi_k(z_1, z_2) = b_{kk} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_1 - z_1^0}{b_{k+j,k}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_2 - z_2^0}{b_{k,k+j}}, \quad (5)$$

де частинні знаменники  $b_{ij}$  обчислюються через коефіцієнти подвійного ряду Тейлора.

Цікаво, що незалежно від Х.Й. Кучмінської, але трохи пізніше, апарат ДНД ввели Дж. Марфі, М. О'Донохое (Кембрідж, Великобританія), А. Кейт, Б. Вердонк (Антверпен, Бельгія).

Разом з професором Д.І. Боднаром доцент Х.Й. Кучмінська керує діючим постійно науковим міжміським семінаром з теорії дробів.

Як всім відомо, Стефан Банах є одним із перших засновників функціонального аналізу, що об'єднує методи алгебри, математичного аналізу і геометрії.

У Політехніці 16 років працював знаний вчений, спеціаліст з функціонального аналізу, професор Владислав Елійович Лянце, який, незважаючи на вік (1920 р.н.) ще і нині активно щотижня відвідує семінар в університеті імені Івана Франка. В.Е. Лянце прищепив любов до науки багатьом нині знаним вченим, зосібна, професорам М.С. Сявавку, членові-кореспонденту НАН України М.Л. Горбачуку, О.Г. Сторожу та іншим.

Творче життя М.С. Сявавка багато років, починаючи з 1961 р. пов'язано з Політехнікою. Тут він захистив кандидатську дисертацію з проблем наближення нелінійних операторів у банахових просторах.

На семінарі М.С. Сявавка шліфувались кандидатські роботи майбутніх доцентів М.Д. Йосипчука, П.П. Мельничака (Дрогобич), Ю.Р. Батюка, в яких він був науковим керівником.

Теорія гіллястих ланцюгових дробів, яка була започаткована в школі В.Я. Скоробогатка, була піднята до рівня, який тепер має самостійне значення і становить суть нової теорії – інтегральних ланцюгових дробів. За цією тематикою захистили дисертації нині доценти Г.М. Антонова, Р.І. Михальчук (Луцьк). У період з вересня 1991 р. по червень 1995 р. доктор фізико-математичних наук М.С. Сявавка підготував до успішного захисту дисертацій своїх учениць О.М. Рибицьку та М.І. Рожанківську, які розробили новий метод регуляризації некоректно поставлених задач, що відрізняється від відомого методу академіка А.М. Тихонова, визнаного у всьому математичному світі.

Тут важливу роль відіграли апроксиманти дробово-раціонального виду. З працями М.С. Сявавка і його внеском у науку можна ознайомитись з літератури [14–16].

Висвітлюємо тепер детальніше деякі здобутки наукової школи професора Д.І. Боднара, що стосуються аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) і торкаються принципових фактів теорії функцій багатьох комплексних змінних, де геометрична

уява зазнає фіаско, а істина добувається шляхом викладень і введення нових понять.

Об'єктом досліджень тут є ГЛД:

$$b_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_i(k)}{b_i(k)} \quad (6)$$

з дійсними і комплексними елементами, різні типи функціональних ГЛД, як-от: багатовимірні  $g$ -дроби,  $C$ -дроби,  $J$ -дроби тощо.

Предмет дослідження становить побудова аналітичної теорії ГЛД: дослідження збіжності, рівномірної збіжності, стійкості до збурень цих дробів, застосування ГЛД як апарата наближення різних класів спеціальних функцій, зокрема гіпергеометричних функцій Аппеля, Лаурічелли та інших.

Математика у Львові зосереджена у трикутнику, вершинами якого є Львівська політехніка, Національний університет імені Івана Франка та Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України. Природно, що між цими вершинами існує зв'язок, що проявляється у взаємодії наукових ідей і людей, – вчених, які працюють за сумісництвом або переходять з однієї установи в іншу.

Член-кореспондент НАН України професор Б.Й. Пташник, учень В.Я. Скоробогатка, водночас є професором Політехніки. Напрямок досліджень школи Б.І. Пташника є некоректні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. З цієї школи вийшли доценти Політехніки В.С. Льків, Б.О. Салига, І.О. Бобик.

Основні здобутки цієї школи, які отримані за останні роки, підсумовані у книзі [17].

Академік Я.Б. Лопатинський колись у розмові, при якій був присутній один із авторів цього огляду, висловив думку про те, що майбутнє теорій, які розвиваються, закладене в галузі диференціальних нерівностей.

Це передбачення здійснив наприкінці 60-х років французький вчений Ліонс і деякі вчені Росії та Азербайджану.

Львівські вчені професор С.П. Лавренюк (Національний університет імені Івана Франка) та його учень, доцент П.Я. Пукач з Політехніки досягли у цьому напрямку значного поступу, розглянувши крайові задачі для нелінійних рівнянь гіперболічного типу в необмежених областях. Вони отримали деякі умови існування та єдиності узагальнених розв'язків таких задач без обмежень на поведінку коефіцієнтів та правих частин при  $|x| \rightarrow \infty$ . Ними ж запроваджено поняття сильного та слабого узагальнених розв'язків.

Доцент І.Я. Кміть, учениця професора С.П. Лавренюка, займається проблемами з дельта-збуреннями у гіперболічних рівняннях.

Ми вже згадували про метод С.О. Чаплигіна побудови двосторонніх оцінок розв'язків диференціальних рівнянь. У цьому напрямку значний внесок зробив доцент Б.А. Шувар, який впроваджено

у різних формах ітераційних методів у двох кандидатських дисертаціях, що успішно вже захищені.

Для наближеного розв'язання лінійного рівняння

$$x = Ax + b,$$

де  $A : E \rightarrow E$ ,  $b \in E$ ,  $E$  – банахів простір, запропонував ітераційну систему

$$x_{n+1} = Ax_n + b + a_n (y_n - y_{n+1}), \quad (7)$$

$$y_{n+1} = \Lambda y_{n+1} - Sx_n + \Lambda I' x_n - Sb + \alpha_n (y_n - y_{n+1}). \quad (8)$$

Тут  $S : E \rightarrow E'$ ,  $a_n : E' \rightarrow E$ ,  $\alpha_n : E' \rightarrow E'$ ,  $\Lambda : E' \rightarrow E'$ , де  $E'$  – банахів простір, який, взагалі кажучи, не тотожний з  $E$ ,  $I'$  – одиничний (тотожний) в  $E'$  оператор. Вибір операторів  $S$ ,  $a_n$ ,  $\alpha_n$ ,  $\Lambda$  дозволяє охопити низку відомих методів, зокрема проєкційно-ітеративні методи, а також не досліджені методи ітеративного агрегування та встановити для багатьох методів нові критерії збіжності.

Оригінальними узагальненнями багатоточкових задач є наукові розробки доцента А.Ф. Обшти, що стосуються багатоконтурних задач математичної фізики, які мають і суто практичні застосування у томографії.

Загальність погляду на проблеми аналізу і побудови різновидів рівнянь прозоро для фахівців-математиків проявляється при їх викладенні мовою операторів.

Нещодавно докторську дисертацію захистив Є.В. Черемних, доцент кафедри вищої математики. Основним досліджуванним об'єктом у нього виступила модель Фрідрікса [18]

$$T = S + A^*B, \quad Sf(x) \equiv xf(x), \quad x \in I \quad (9)$$

збурення неперевного спектра  $I$ .

Його підхід полягає в узагальненні формул Ю.В. Сохоцького у вигляді розкладу граничних значень резольвенти

$$(T_\sigma \varphi_\nu \psi)_\pm = (\varphi, b_\sigma) [(a_\sigma, \psi) m_\pm(\sigma) + (R_\sigma, \psi)] + (\tilde{T}_\sigma \varphi, \psi)_H, \quad (10)$$

де  $\sigma$ ,  $b_\sigma$ ,  $R_\sigma$  – власні функціонали оператора  $T$ , спряженого оператора  $T^*$  і максимального оператора  $\tilde{T}$ .

Це дозволяє побудувати функцію від оператора  $T$  так, щоб оцінки для цієї функції явно містили спектральні особливості несамоспряженого оператора  $T$ . Отримано, наприклад, внески в асимптотику розв'язків деяких еволюційних рівнянь, що зумовлені спектральними особливостями відповідного оператора.

Львівська політехніка розвиває і обчислювальну математику, має в ній значні здобутки і авторитет, а відтак, і безпосередній вплив на впровадження математики у виробничу діяльність людей шляхом створення ефективних методів і алгоритмів отримання

розв'язків задач числовими методами з високим рівнем стійкості обчислень щодо різного роду збурень і відчутності до накопичення похибок обчислень. Віддавна відомо, що невдала числова реалізація може звести нанівець навіть дуже добрий теоретичний результат. Важливе значення має і швидкість обчислень.

У книзі Л.О. Новікова і В.Я. Скоробогатька [19] викладено ідеї нелінійного прискорення збіжності послідовностей вказано, як застосовувати їх для прискорення знаходження сум рядів, побудови дробово-лінійних апроксимант функцій.

Ці ідеї закладені в основу кандидатських дисертацій, автори яких вже давно стали доцентами, зокрема у Львівській політехніці, як от З.І. Крупка, Я.М. Пелех, Я.М. Глинський.

Дробово-раціональні апроксимації функцій замінили у певному сенсі формулу Тейлора і призвели до появи дробово-раціональних методів (ДРМ) побудови різницевих схем числового розв'язування диференціальних рівнянь.

Р.В.Слоньовський, нині доктор наук, професор, сконцентрував наукові дослідження саме у цьому напрямку.

Значного розвитку набули дослідження в галузі теорії числових методів розв'язування жорстких систем диференціальних рівнянь у роботах Р.В. Слоньовського, Є.М. Максиміва, Б.В. Гнатіва, М.В. Кутніва, І.Є. Тесак, а також у студентських дипломних і наукових роботах. Проведено аналіз існуючих сучасних методів розв'язань таких задач і обґрунтовано актуальність проблеми побудови методів ефективних щодо точності, стійкості і мінімальних обчислювальних затрат.

Внаслідок досліджень запропонована нова структура числових методів у вигляді так званих дробово-раціональних наближень розв'язку задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, які є усереднення послідовності Тейлорівських наближень з матричними дробово-раціональними ваговими коефіцієнтами. Створено основи теорії таких наближень.

На основі цієї теорії розроблена методика побудови дробово-раціональних однокрокових числових методів з використанням, на відміну від методів Рунге-Кутта, нових принципів розробки лінійних числових методів довільного порядку узгодженості шляхом послідовного ітераційного підвищення точності. Досліджено умови забезпечення потрібного типу стійкості дробово-раціональних методів.

Особливу увагу приділяли питанням побудови багатокрокових дробово-раціональних числових методів. Розроблена нова методика побудови таких методів довільного порядку точності з простою зміною кроку інтегрування.

Відомо, що сучасні багатокрокові числові методи тільки не вище другого порядку точності володіють так званою А - стійкістю (бар'єр Далквіста), а також їх характеристичні рівняння мають сторонні, як

їх називають “паразитні корені”, які істотно впливають на область стійкості. Доведено, що для ДРМ не існує “бар’єра Далквіста” і їх характеристичні рівняння не мають сторонніх ненульових коренів. Такого типу методи побудовано вперше. Визначено оцінки максимальної похибки методів довільного порядку точності.

Для експериментальних досліджень і практичних застосувань дробово-раціональних методів розроблено алгоритми реалізації методів з автоматичною зміною порядку і кроку інтегрування та відповідне програмне забезпечення. На основі різнобічних обчислювальних експериментів проведено порівняльний аналіз результатів з результатами, одержаними іншими сучасними методами дослідження жорстких систем, який підтвердив універсальність, високу ефективність і надійність дробово-раціональних числових методів.

Наведемо один із суттєвих результатів, здобутих доцентом М.В. Кутнівим у галузі розробки та реалізації різницевої схем розв’язування нелінійних диференціальних рівнянь.

Для нелінійної крайової задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du}{dx} + A(x)u = f(x, u), \quad x \in (0, 1), \quad (11)$$

$$B_0u(0) + B_1u(1) = d,$$

де  $A(x), B_0, B_1 \in R^{n \times n}$ ,  $f(x, u), d \in R^n$  – задані,  $u(x) \in R^n$  – шуканий вектор, за умов існування та єдиності розв’язку цієї задачі доведено існування точної двоточкової різницевої схеми, при цьому за основу був взятий метод лінеаризації та принцип стиску-ючих відображень. Розроблена алгоритмічна реалізація точних двоточкових різницевої схем через двоточкові різницевої схеми  $m$ -го порядку точності ( $m$ -го рангу), яка вимагає розв’язування для кожного вузла сітки  $x_j, j = 1, 2, \dots, N$  двох задач Коші на відрізку  $[x_{j-1}, x_j]$ . Кожна з задач Коші розв’язується явно однокроковим методом розвинення в ряд Тейлора  $m$ -го порядку точності. Для розв’язування відповідної нелінійної різницевої схеми можна застосувати ітераційний метод послідовних наближень або метод Ньютона.

У функціональний аналіз значний внесок зробили доценти І.М. Ковальчик та П.П. Козак. Їх наукові дослідження стосувались теорії континуальних інтегралів, які можна використовувати у аналізі випадкових процесів. Частково результати досліджень І.М. Ковальчика увійшли в книгу [20], в якій є посилання і на роботи П.П. Козака. Учень Петра Прокоповича

Козака, нині доцент, Я.М. Чабанюк у творчій співдружній праці з академіком НАН України В.С. Королюком на теперішній час створили аналогі теорії стійкості О.М. Ляпунова для стохастичних диференціальних рівнянь, що математично моделюють дифузійні випадкові процеси. Доцент Г.І. Білушак, теж учениця П.П. Козака, знайшла свою дорогу у континуальних інтегралах, а нині успішно працює в галузі теорії ймовірностей. Г.І. Білушак та Я.М. Чабанюк випустили посібники з теорії ймовірностей, які досягають університетського рівня і використовуються у навчальному процесі.

З часів Ейлера і Коші увагу видатних дослідників привертала механіка суцільного середовища, для якого зазначені математики вивели основні рівняння стану рівноваги і деформації, пов’язали силові навантаження і реологічні характеристики речовини, яку моделює суцільне середовище.

У Львові школи Г.М. Савіна, М.П. Шереметьєва, М.Я. Леонова та їх учнів академіка Я.С. Підстригача, члена-кореспондента НАН України Я.Й. Бурака, члена-кореспондента НАН України Г.С. Кіта, академіка В.В. Панасюка математичні аспекти деформування і руйнування суцільних середовищ досягли високого ступеня загальності у постановці та розв’язанні конкретних задач, в яких максимально врахована взаємодія різноманітних фізичних полів.

З цієї школи вийшли достойні спеціалісти, які працюють у Львівській політехніці.

Одним з таких вчених і нині педагогів є М.А. Сухорольський, який нещодавно захистив докторську дисертацію. Ескіз науковий доробок вченого відтворено у [21].

Основні результати наукових досліджень М.А. Сухорольського викладені у 95 публікаціях у наукових вітчизняних та закордонних журналах та збірниках, неодноразово доповідались на наукових конференціях та симпозиумах, дещо увійшло в оригінальний навчальний посібник [22].

Дуже великої поваги заслуговує робота дослідника, який по-новому вивів рівняння стану процесу чи явища і вказав напрямки досліджень цих рівнянь. Доцент кафедри вищої математики Р.С. Муцій протягом багатьох років працював над проблемою про те, як вивести рівняння динамічної задачі термopружності так, щоб система рівнянь розпалась на окремі рівняння для кожної з компонент тензора напружень. Це йому значною мірою вдалося.

Зокрема, одновимірна динамічна задача термopружності у напруженнях для циліндра формулюється у вигляді такої системи ключових рівнянь на компоненти  $\sigma_{jj}$  ( $j = r, \varphi, z$ ) тензора напружень:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial t^2} = \alpha \rho \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1 - \nu r} \frac{1}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \frac{F_r}{r} - \frac{\partial F_r}{\partial r}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial t^2} + \frac{2c_2^2}{1 - \nu} \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r^2} = \frac{2c_2^2}{1 - \nu} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{F_r}{r} \right) - \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1 - \nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (13)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - \alpha ET. \quad (14)$$

Тут  $T$  – температура,  $F_r$  – радіальна компонента об'ємної сили;  $c_1$  і  $c_2$  – швидкості пружних хвиль розширення і формозміни;  $\alpha$ ,  $\nu$  – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона;  $E$  – модуль Юнга;  $\rho$  – густина матеріалу. Р.С. Мусію вдалося також звести вихідну систему рівнянь Максвелла відносно компонент вектора напруженості магнітного поля в циліндричній і сферичній системах координат до системи послідовно зв'язаних диференціальних рівнянь на кожну компоненту зокрема.

Важким для пізнання фізики у її широкому розумінні, як грецьке “фізіс” – природа, є математичні задачі на відшукування власних значень диференціальних операторів.

Числові методи знаходження власних значень становлять предмет досліджень доцентів І.А. Анджейчака і Б.Й. Бандирського. Щодо схем реалізації цих методів, то у згаданих вчених вони суттєво відрізняються (див. [23, 24]).

## II. Ретроспектива становлення математичних кафедр Львівської політехніки

Коротко подамо історичні відомості, що запозичені зі статті Михайла Івановича Худого [1], який завідував кафедрою прикладної математики і був деканом факультету, що має з кафедрою однойменну назву.

Перша математична кафедра у Львівській політехнічній школі була заснована в 1851 році, очолив її відомий на той час математик професор Л. Жмурко. Діяльність кафедри була спрямована, в основному, на створення навчальних посібників і необхідних підручників, а наукова діяльність на той час була незначною. Тільки в міжвоєнний період (1918 – 1939 рр.) у Львівській політехніці розвинулася досить сильна математична школа. На кафедрі математики, яку очолював професор В. Стожек, працювали такі видатні вчені, як С. Банах, В. Нікліборц, С. Качмарж, К. Куратовський та інші. Викладання різних математичних дисциплін мало відрізнялося від університетського.

У перші роки окупації Східної Галичини (1920 – 1925 рр.) польською державою двері в Політехніку для української молоді були зачинені. За цих умов українська громадськість, протестуючи проти шовіністичної політики польського уряду, утворила у Львові Українську політехнічну школу, яка, зважаючи на обставини, діяла підпільно. Математичні курси для слухачів школи проводили відомі вчені професори В. Левицький та М. Чайковський.

У зв'язку з початком війни в 1941 році Львівський політехнічний інститут змушений був припинити свою діяльність.

У 1944 році кафедра математики відновила свою роботу і, фактично, була створена заново. Завідувачем кафедри був призначений професор В. Нікліборц. Пізніше кафедру очолювали професор М.О. Зарицький (1945 – 1946 рр.), доцент Н.В. Благовещенський (1946 р.), професор О.С. Кованько (1946 – 1948 рр.), доцент Т.Я. Загорський (1948 – 1963 рр.).

У 1963 році кафедра була розділена на дві: кафедру математичного аналізу, якою завідував Т.Я. Загорський, і кафедру обчислювальної математики, яку очолив доцент М.О. Ігнат'єв. 1965 року після чергової реорганізації обидві кафедри були об'єднані в одну кафедру вищої математики, завідувачем якої став доцент М.О. Ігнат'єв (1965 – 1971).

У наступні роки кафедрою вищої математики завідували доценти Ф.П. Луник (1971 – 1977 рр.) та І.П. Пустомельников (1977 – 1988 рр.). З 1988 року кафедру очолює професор Ю.К. Рудавський.

З розвитком інституту та розширенням кількості спеціальностей на базі кафедри вищої математики було утворено нові кафедри: теорії математичної обробки геодезичних вимірювань (1968 р.), прикладної математики (1971 р.) та обчислювальної математики і програмування (1978 р.)

Кафедру прикладної математики очолювали професор Р.В. Слоньовський (1971 – 1982 рр.), професор Р.П. Базилевич (1982 – 1990 рр.), а з 1990 року завідувачем кафедри став доцент М.І. Худий. З 2001 року цю кафедру очолює професор П.П. Костробій.

Кафедрою обчислювальної математики та програмування керували професор П.І. Боднарчук (1978 – 1988 рр.), доцент О.М. Косак (1988 – 1993 рр.), а з 1993 року її очолює д-р фіз.-мат. наук, професор П.І. Каленюк.

У 2001 році у Львівській політехніці було утворено Інститут прикладної математики і фундаментальних наук, директором якого став П.І. Каленюк.

До складу цього структурного підрозділу Політехніки увійшли ще кафедри фізики, загальної хімії, нарисної геометрії та графіки.

## III. Заключне слово

Математичний загал Львівської політехніки не замкнений у собі, а працює у творчій співдружності і дискусіях з вченими Донецька, Києва, Мінська, Москви, Санкт-Петербурга, Одеси, Харкова, а також підтримує наукові стосунки з математиками Польщі, Норвегії, Естонії і вченими української діаспори за кордоном. У Львівській політехніці здобули освіту громадяни більш як двох десятків країн та зроблено вагомий внесок в планетарну освіту.

Ми повинні відзначити імена видатних вчених, які нам допомогали і яких вже немає з нами, а також тих, які ще своїми порадами, досвідом і, навіть, посадовим становищем сприяють розвиткові математики у Львові. Ось деякі імена вчених: академіки

РАН А.О. Дородніцин, С.М. Нікольський, І.В. Виноградов, О.А. Самарський, члени-кореспонденти РАН Л.Д. Кудрявцев, А.В. Біцадзе, академіки НАН України В.С. Королюк, І.В. Скрипник, І.І. Данилюк, Ю.А. Митропольський, В.Л. Рвачов, члени-кореспонденти НАН України, В.К. Дзядик, В.Л. Маркаров, М.Л. Горбачук, академіки професори М.І. Гаврилов, О.Н. Вітюк, В.І. Берник, А.Ф. Шестопал,

А.І. Янушаушкас, член-кореспондент АН Білорусі Я.В. Радино.

Творче життя в галузі математики продовжується, і Львівська політехніка як один із потужних осередків математики і взагалі інтелекту України ділиться з людьми знаннями і радістю відкриттів, що здобуваються невпинною працею.

## Література

- [1] Становлення і розвиток наукових досліджень. До 150-річчя Львівської політехніки // Вісник Державного університету “Львівська політехніка”. – Львів, 1998. – 222 с.
- [2] Буцко М.І. Відомі вчені Державного університету “Львівська політехніка”, 1844 – 1994: Біографічний довідник. – Львів: Видавництво Державного університету “Львівська політехніка”, 1994. – 254 с.
- [3] Буцко М.І., Киларенко В.Г. Державний університет “Львівська політехніка”, 1844 – 1994. – Львів: Видавництво Державного університету “Львівська політехніка”, 1994.
- [4] Наукова конференція професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук: Тези доповідей. Львів, 6 – 7 червня 2002 р. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2002. – 128 с.
- [5] Наукова конференція професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук: Тези доповідей. Львів, 15 – 16 травня 2003 р. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2003. – 96 с.
- [6] Наукова конференція професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук: Тези доповідей. Львів, 27 – 28 травня 2004 р. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2004.
- [7] Лопатинський Я.Б. Теория общих граничных задач. Избр. тр. – К.: Наукова думка, 1984. – 316 с.
- [8] Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. – М.: Наука, 1980, – 304 с.
- [9] Скоробогатько В.Я. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 72 с.
- [10] Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наукова думка, 1986. – 176 с.
- [11] Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2002. – 292 с.
- [12] Каленюк П.І., Баранецький Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наукова думка, 1993. – 232 с.
- [13] Микитюк И.В. Метод редукции: инвариантные поляризации и би-пуассоновы структуры на пространствах инвариантных функций. 01.01.04. – геометрия и топология. Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 2004. – 28 с.
- [14] Сявавко М.С. Интегральные ланцюгові дробі. – К.: Наукова думка, 1994. – 205 с.
- [15] Гаврилов М.І., Скоробогатько В.Я., Сявавко М.С. Математичні моделі Сонячної системи і швидкозбіжний метод малого параметра. – Львів, 1996. – 120 с.
- [16] Сявавко М.С., Рибицька О.М. Математичне моделювання за умов невизначеності. – Львів: Українські технології, 2000. – 320 с.
- [17] Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.
- [18] Черемних Є.В. Гладке збурення неперервного спектра і аналіз спектральних особливостей. 01.01.01 – математичний аналіз. Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – К., 2002. – 40 с.
- [19] Новіков Л.О., Скоробогатько В.Я. Методи математики: розвиток, застосування, суспільне відлуння. – Львів: Слово і комерція, 1995. – 224 с.
- [20] Ковальчик И.М., Янович Л.А. Обобщенный вилерский интеграл и некоторые его приложения. – Минск: Наука и техника, 1989. – 221 с.
- [21] Сухорольський М.А. Математичні моделі та методи механіки тонкостінних пружних тіл при локальних навантаженнях. 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 2003. – 33 с.



- [22] Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Сухорольський М.А., Зашкільням І.М., Колісник В.М., Микитюк О.А., Мусій Р.С. Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2002. – 263 с.
- [23] Бандирський Б.Й. Функціонально-дискретні методи в задачах на власні значення. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2004. – 184 с.
- [24] Анджейчак І.А. Нові числові методи в задачах на власні значення математичної фізики. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2004. – 84 с.

## MATHEMATICS IN LVIV POLYTECHNIC UNIVERSITY AT THE END OF 20TH — AT THE BEGINNING OF 21ST CENTURIES

P. Kalenyuk\*, L. Novikov

*Lviv Polytechnic National University  
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine*

In the paper we present the review of some scientific results obtained on the basis of the ideas and methods which have appeared and are being developed in the Lviv mathematical schools at the last quarter of 20<sup>th</sup> century and at the beginning of 21<sup>st</sup> century.

**Keywords:** partial differential equation, regular and singular integral equations, matrix polynomial, generalized method of separation of variables, continued fractions, Friedrichs model, Lie algebra, rational numerical methods, dynamic thermoclastisity problem.

---

\*Corresponding author