ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.643 № 643, (2009) с. 64–72

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 64–72

ФУНКЦІЯ ҐРІНА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

О.В. Махней

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
вул. Шевченка, 57, 76025, м. Івано-Франківськ, Україна

(Отримано 29 серпня 2008 р.)

Побудовано функцію Ґріна крайової задачі для квазідиференціального рівняння з узагальненими коефіцієнтами і однорідними крайовими умовами. За допомогою методу введення квазіпохідних та отриманих виразів для спряжених крайових умов досліджено властивості функцій Ґріна спряжених крайових задач.

Ключові слова: функція Ґріна, квазідиференціальне рівняння, узагальнені функції, квазіпохідні

2000 MSC: 34B27

УДК: 517.927

Вступ

Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими коефіцієнтами, вивчено досить добре (див., наприклад, [1]). Однак, у задачах прикладного характеру часто зустрічаються розривні чи навіть узагальнені функції в коефіцієнтах. Такі задачі є значно гірше дослідженими.

Ще в середині 50-х років минулого століття вивчались крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого й четвертого порядків, що описують вільні коливання струни і балки, які крім неперервно розподіленої маси несуть на собі ще й зосереджені точкові маси – бусинки [2]. У монографії [3] досліджується оператор Шредінгера на необмеженому проміжку у випадку, коли сингулярний потенціал є, наприклад, скінченною чи нескінченною сумою δ-функцій Дірака. У роботі [4] побудовано функцію Ґріна сингулярного диференціального оператора.

У прикладних задачах часто зустрічаються диференціальні вирази, що містять доданки вигляду $(p(x)y^{(m)})^{(n)}$, які у разі недостатньої гладкості коефіцієнта $p(x)$ не можна звести n-кратним диференціюванням до звичайних диференціальних. Такі вирази прийнято називати квазідиференціальними. Одним з найефективніших способів їх дослідження є метод введення квазіпохідних – компонент вектора, за допомогою якого здійснюється зведення квазідиференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку, започаткований в [5, 6]. Цей метод дає змогу відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів у квазідиференціальних виразах.

Спочатку в роботах Д. Шина [5, 6] та його послідовників вивчались переважно квазідиференціальні вирази з неперервними чи сумовними за Лебегом коефіцієнтами. Однак останнім часом з'явились спроби застосувати цей метод до дослідження квазідиференціальних виразів з узагальненими функціями. Зокрема, в роботі [7] будується матриця Ґріна крайової задачі для квазідиференціального рівняння з самоспряженим квазідиференціальним виразом.

Ця робота присвячена побудові функції Ґріна крайової задачі для квазідиференціального рівняння з узагальненими коефіцієнтами, несамоспряженим квазідиференціальним виразом і однорідними крайовими умовами. У [8, 9] досліджено асимптотичну поведінку великих за модулем власних значень цієї крайової задачі за певних обмежень.

I. Постановка задачі

Дійсна чи комплекснозначна скалярна функція $f(x)$, що визначена на скінченному проміжку $[a,b]$ дійсної осі, називається функцією обмеженої варіації на $[a,b]$, якщо вираз

$$v=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|$$

допускає фіксовану верхню межу для всіх натуральних n і всіх розбиттів інтервалу $[a,b]$: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Найменша спільна верхня межа всіх таких виразів називається повною варіацією функції $f(x)$ на $[a,b]$ і позначається символом $V_a^b f(x)=\sup v$. Простір функцій обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації, неперервних там справа, позначимо через $BV^+[a,b]$.

Розглянемо квазідиференціальний вираз

$$L_{mn}(y)\equiv\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(a_{ij}(x)y^{(n-i)})^{(m-j)},$$

де m, n – натуральні числа; $a_{i0}(x)$, $a_{0j}(x)$ – квадратично сумовні на $[a,b]$ функції; $a_{ij}(x)=b'_{ij}(x)$,

$b_{ij} \in BV^+[a,b]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Штрих тут означає узагальнене диференціювання, а, отже, $a_{ij}(x)$ – міри [10]. Функції $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$ вважатимемо комплекснозначними.

Квазіпохідними функції $y(x)$, що відповідають виразу $L_{mn}(y)$, називатимемо функції, які визначаються формулами

$$\begin{cases} y^{[k]} = y^{(k)},\ k = \overline{0, n-1};\ \ y^{[n]} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i0} y^{(n-i)}; \\ y^{[n+k]} = -\left(y^{[n+k-1]}\right)' + \sum\limits_{i=0}^{n} a_{ik} y^{(n-i)},\ k = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Розглянемо також відповідне квазідиференціальному виразу $L_{mn}(y)$ рівняння

$$L_{mn}(y) = \lambda\sigma(x)y, \tag{1}$$

де λ – комплексний параметр, $\sigma(x) = h'(x)$, $h \in BV^+[a,b]$, і крайові умови

$$U_\nu(y) \equiv \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{\nu j} y^{[j]}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{\nu j} y^{[j]}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{2}$$

які задаються за допомогою r лінійно незалежних форм $U_\nu(y)$, $r = n + m$.

За допомогою вектора

$$Y = \operatorname{colon}\left(y,\, y^{[1]},\, \dots,\, y^{[r-1]}\right)$$

рівняння (1) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y' = B'(x)Y, \tag{3}$$

де міра

$$B'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde a_{n0} & \tilde a_{n-1,0} & \cdots & \tilde a_{10} & a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde a_{n1} & \tilde a_{n-1,1} & \cdots & \tilde a_{11} & a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \tilde a_{n,m-1} & \tilde a_{n-1,m-1} & \cdots & \tilde a_{1,m-1} & a_{0,m-1}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & -1 \\ \tilde a_{nm} - \lambda\sigma & \tilde a_{n-1,m} & \cdots & \tilde a_{1m} & a_{0m}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$\tilde a_{i0} = -a_{00}^{-1} a_{i0}$, $\tilde a_{ij} = a_{ij} - a_{0j} a_{00}^{-1} a_{i0}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Очевидно, що стрибок матриці $B(x)$ має вигляд

$$\Delta B(x) = B(x) - B(x-0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta b_{n1} & \cdots & \Delta b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta b_{nm} - \lambda\Delta h & \cdots & \Delta b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, внаслідок рівності $[\Delta B(x)]^2 \equiv 0$, система (3) – коректна, [11].

Крайові умови (2) теж можна переписати у матричному вигляді

$$W_a Y(a) + W_b Y(b) = 0, \tag{4}$$

де матриці $W_a = (\alpha_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^{r}$, $W_b = (\beta_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^{r}$.

Під розв'язком квазідиференціального рівняння розумітимемо першу компоненту $y(x)$ вектора $Y(x)$ системи (3), що задовольняє його в сенсі теорії узагальнених функцій. У роботах [12, 13] встановлено, що розв'язок початкової задачі для рівняння (1) існує і єдиний у класі абсолютно неперервних на $[a,b]$ функцій, його квазіпохідні до $(n-1)$-го порядку є абсолютно неперервними на $[a,b]$ функціями, а решта квазіпохідних до порядку $r-1$ включно мають обмежену на $[a,b]$ варіацію і неперервні там справа.

Система, спряжена до системи (3), визначається матричною рівністю (див. [12, 13])

$$Z' = -(B^*(x))' Z, \tag{5}$$

де $Z = \operatorname{colon}\left(z^{\{r-1\}},\, \dots,\, z^{\{1\}},\, z\right)$, $*$ – ермітове спряження (тобто транспонування і комплексне спряження), а фігурні дужки означають квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння. З рівності (5) можна помітити [12, 13], що вони визначаються за формулами

$$\begin{cases} z^{\{k\}} = z^{(k)},\ \ k = \overline{0, m-1};\ \ \ z^{\{m\}} = -\sum\limits_{j=0}^{m} \bar a_{0j} z^{(m-j)}; \\ z^{\{m+k\}} = -\left(z^{\{m+k-1\}}\right)' - \sum\limits_{j=0}^{m} \bar a_{kj} z^{(m-j)},\ \ k = \overline{1,n}, \end{cases}$$

де риска над a означає комплексне спряження. З (5) очевидно (див. [12, 13]), що спряжене до (1) квазідиференціальне рівняння має вигляд

$$L^*_{mn}(z) \equiv \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \left(\bar a_{ij}(x) z^{(m-j)}\right)^{(n-i)} = \bar\lambda \bar\sigma(x) z. \tag{6}$$

II. Спряжені крайові умови

Розглянемо вираз Z^*Y і продиференціюємо його, скориставшись формулами (3), (5):

$$(Z^*Y)' = (Z^*)' Y + Z^* Y' = -\left((B^*)' Z\right)^* Y + Z^* B' Y =$$
$$= -Z^* B' Y + Z^* B' Y = 0.$$

Таке диференціювання допустиме, оскільки добутки $(Z^*)'Y$ і Z^*Y' є коректними на підставі відомого факту про те, що y, $y^{[1]}$, $\dots$, $y^{[n-1]}$, z, $z^{\{1\}}$, $\dots$, $z^{\{m-1\}}$ – абсолютно неперервні функції, а $y^{[n]}$, $y^{[n+1]}$, $\dots$, $y^{[r-1]}$, $z^{\{m\}}$, $z^{\{m+1\}}$, $\dots$, $z^{\{r-1\}}$ є неперервними справа функціями обмеженої варіації на проміжку $[a,b]$ (див. [12, 13]). Отже, Z^*Y є сталою величиною і тому

$$(Z^*Y)|_a^b = 0 \tag{7}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{gathered}\bar{z}^{\{r-1\}}(b)y(b) + \bar{z}^{\{r-2\}}(b)y^{[1]}(b) + \ldots + \bar{z}(b)y^{[r-1]}(b) - \\ -\bar{z}^{\{r-1\}}(a)y(a) - \bar{z}^{\{r-2\}}(a)y^{[1]}(a) - \ldots \\ \ldots - \bar{z}(a)y^{[r-1]}(a) = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

За допомогою останньої рівності можна визначити спряжені крайові умови. Для цього доповнимо лінійні форми $U_1(y)$, $U_2(y)$, $\dots$, $U_r(y)$ довільними формами $U_{r+1}(y)$, $U_{r+2}(y)$, $\dots$, $U_{2r}(y)$ до лінійно незалежної системи $2r$ лінійних форм. Система лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими

$$U_\nu(y) = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{\nu j} y^{[j]}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{\nu j} y^{[j]}(b), \quad \nu = \overline{1, 2r},$$

має відмінний від нуля визначник внаслідок лінійної незалежності всіх рівнянь. Тоді її можна однозначно розв'язати відносно невідомих $y^{[q]}(a)$, $y^{[q]}(b)$, які визначаються через лінійні комбінації форм $U_1(y), \dots, U_{2r}(y)$. Підставивши знайдені $y^{[q]}(a)$, $y^{[q]}(b)$ $(q = \overline{0, r-1})$ в білінійну форму в лівій частині рівності (8), отримаємо, що

$$(Z^*Y)|_a^b = \sum_{\nu=1}^{2r} \mathcal{A}_\nu(\xi) U_\nu(y),$$

де $\xi = \left(\bar{z}^{\{q\}}(a), \bar{z}^{\{q\}}(b)\right)$, $q = \overline{0, r-1}$. Позначимо $\mathcal{A}_{2r}(\xi) = V_1(z), \dots, \mathcal{A}_1(\xi) = V_{2r}(z)$. Очевидно, що для того, щоб виконувалась рівність (7), повинні існувати співвідношення

$$V_\nu(z) = 0, \quad \nu = \overline{1, r}, \tag{9}$$

де

$$V_\nu(z) \equiv \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\alpha}_{\nu j} z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\beta}_{\nu j} z^{\{j\}}(b),$$

які назвемо спряженими крайовими умовами до умов (2).

Зауваження 1. Якщо $|W_a| \neq 0$ і $|W_b| \neq 0$ одночасно в рівнянні (4), то крайові умови для спряженого рівняння подаватимуться у вигляді

$$Z^*(a)W_a^{-1} + Z^*(b)W_b^{-1} = 0. \tag{10}$$

Насправді, з рівності (4), якщо $|W_a| \neq 0$, маємо

$$Y(a) = -W_a^{-1} W_b Y(b).$$

Підставивши отриманий вираз у (7), отримаємо співвідношення

$$Z^*(b)Y(b) + Z^*(a)W_a^{-1}W_bY(b) = 0,$$

звідки при $|W_b| \neq 0$ очевидне (10).

III. Функція Ґріна крайової задачі

Розглянемо тепер неоднорідне квазідиференціальне рівняння

$$L_{mn}(y) = \lambda\sigma y + f, \tag{11}$$

де $f(x) = g'(x)$, $g \in BV^+[a,b]$. Неоднорідне рівняння (11) шляхом введення вектора Y зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y' = B'Y + F', \tag{12}$$

де $F(x) = \operatorname{colon}(0, \dots, 0, -g(x))$. Ця система є коректною внаслідок виконання умов $[\Delta B(x)]^2 \equiv 0$ і $\Delta B(x) \Delta F(x) \equiv 0$ (див. [11]).

Під функцією Коші рівняння (1) розуміють функцію $K(x,t,\lambda)$, яка за першою змінною задовольняє рівняння (1), і, крім того, $K^{[i]}(t,t,\lambda) = 0$, $i = \overline{0, r-2}$, $K^{[r-1]}(t,t,\lambda) = 1$.

Якщо не вказано протилежне, вважатимемо, що для функції кількох змінних квазіпохідні в сенсі вихідного рівняння беруть за першою змінною (вони позначаються квадратними дужками), а квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння беруть за другою змінною (позначаються фігурними дужками). Крім того, мішані квазіпохідні обчислюють справа наліво, тобто розумітимемо вираз $K^{[i]*\{j\}}(x,t,\lambda)$ так: спочатку від функції $K(x,t,\lambda)$ береться квазіпохідна в сенсі спряженого рівняння за другою змінною, потім виконується ермітове спряження і, нарешті, береться квазіпохідна в сенсі вихідного рівняння за першою змінною. Однак, як це доведено в [12, 13], результат не залежить від порядку мішаного квазідиференціювання.

Побудуємо функцію Ґріна крайової задачі (11), (2). Нехай $K(x,t,\lambda)$ – функція Коші однорідного рівняння (1). Відомо [12, 14], що $K(x,a,\lambda)$, $K^{\{1\}}(x,a,\lambda)$, $\dots$, $K^{\{r-1\}}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків і розв'язок рівняння (11) можна подати у вигляді

$$y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{r} c_k K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda) + \int_a^x K(x,t,\lambda)\,dg(t). \tag{13}$$

Оскільки, внаслідок того, що квазіпохідні є добутками функцій на звичайні похідні,

$$y^{[j]}(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{r}c_kK^{\{k-1\}[j]}(x,a,\lambda)+\int_a^x K^{[j]}(x,t,\lambda)dg(t),\quad j=\overline{1,r},$$

за допомогою підстановки формули (13) в крайові умови (2) одержимо рівності

$$U_\nu(y)=\sum_{k=1}^{r}c_kU_\nu\Big(K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\Big)+\sum_{j=0}^{r-1}\beta_{\nu j}\int_a^b K^{[j]}(b,t,\lambda)dg(t),\quad \nu=\overline{1,r}. \tag{14}$$

У припущенні, що λ не є власним значенням крайової задачі (1), (2), визначник системи (14) відрізняється від нуля $\Delta(\lambda)\equiv$ $\equiv\det\big(U_\nu\big(K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\big)\big)_{\nu,k=1}^{r}\neq 0$. Тоді константи c_k можуть бути визначені з системи (14) єдиним чином:

$$c_k=-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}\int_a^b K^{[j]}(b,t,\lambda)dg(t),\quad k=\overline{1,r},$$

де $A_{\nu k}$ – алгебраїчне доповнення елемента $U_\nu\left(K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\right)$ у визначнику $\Delta(\lambda)$. Підставляючи ці значення c_k у формулу (13), отримаємо

$$y(x,\lambda)=\int_a^x K(x,t,\lambda)dg(t)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\int_a^b\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)K^{[j]}(b,t,\lambda)dg(t).$$

Вираз

$$G(x,t,\lambda)=P(x,t,\lambda)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}K^{[j]}(b,t,\lambda), \tag{15}$$

де

$$P(x,t,\lambda)=\begin{cases}K(x,t,\lambda), & x>t,\\ 0, & x<t,\end{cases} \tag{16}$$

називатимемо *функцією Ґріна* крайової задачі (11), (2).

З єдиності вибору сталих очевидна єдиність функції Ґріна. Як зрозуміло з наступної теореми, ця функція Ґріна, яка будується лише за допомогою функції Коші однорідного рівняння та її змішаних квазіпохідних, є аналогом функції Ґріна в класичному розумінні (див., наприклад, [1], с. 115-116).

Теорема 1. *Розв'язок задачі (11), (2), в припущенні, що λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді*

$$y(x)=\int_a^b G(x,t,\lambda)dg(t), \tag{17}$$

де функція Ґріна $G(x,t,\lambda)$ подається формулою (15) і має такі властивості: 1) квазіпохідні за першою змінною $G^{[k]}(x,t,\lambda)$ ($k=\overline{0,n-1}$) є неперервними функціями двох змінних x, t і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій; 2) квазіпохідні $G^{[k]}(x,t,\lambda)$ ($k=\overline{n,r-1}$) мають обмежену на проміжку $[a,b]$ варіацію за першою змінною і є абсолютно неперервними по t; 3) $G(x,t,\lambda)$ на кожному з інтервалів $[a,t),(t,b]$ по x задовольняє рівняння (1); 4) $G(x,t,\lambda)$ за змінною x задовольняє крайові умови (2); 5) для $x=t$ функція $G(x,t,\lambda)$ задовольняє умови стрибка

$$G^{[k]}(t+0,t,\lambda)-G^{[k]}(t-0,t,\lambda)=0,\quad k=\overline{0,n-1};$$

$$G^{[n+s]}(t+0,t,\lambda)-G^{[n+s]}(t-0,t,\lambda)=$$

$$=-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}\Delta b_{n-i,s+1}(t)\times$$

$$\times K^{(i)\{k-1\}}(t,a,\lambda)K^{[j]}(b,t,\lambda),\quad s=\overline{0,m-2};$$

$$G^{[r-1]}(t+0,t,\lambda)-G^{[r-1]}(t-0,t,\lambda)=$$

$$=1-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}\Delta b_{n-i,m}(t)\times$$

$$\times K^{(i)\{k-1\}}(t,a,\lambda)K^{[j]}(b,t,\lambda).$$

□ *Доведення.* Формулу (17) було вже доведено вище. Внаслідок того, що функції $K^{\{k-1\}}(x,t,\lambda)$ ($k=\overline{1,r}$) є розв'язками рівняння (1) за змінною x, для них існують вищезгадані (див. розділи 1, 2 статті) властивості розв'язків цього рівняння, тобто функції $K^{[s]\{k-1\}}(x,t,\lambda)$ ($k=\overline{1,r}$) є абсолютно неперервними по x на проміжку $[a,b]$ для $s=\overline{0,n-1}$ і є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації для $s=\overline{n,r-1}$. Згідно з наслідком [14] функції $K^{*[i]}(x,t,\lambda)$ ($i=\overline{0,r-1}$) є розв'язками спряженого квазідиференціального рівняння (6) за змінною t. Отже, для них існують вищезгадані (див. розділ 2 статті) властивості розв'язків цього рівняння, зокрема функції $K^{*[i]}(x,t,\lambda)$ ($i=\overline{0,r-1}$) будуть абсолютно неперервними за змінною t на проміжку $[a,b]$. Згідно з формулою (15) квазіпохідні функції Ґріна мають вигляд

$$G^{[s]}(x,t,\lambda)=P^{[s]}(x,t,\lambda)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}K^{[s]\{k-1\}}(x,a,\lambda)\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}K^{[j]}(b,t,\lambda),$$

звідки очевидне виконання пунктів 1) і 2) теореми.

Властивості 3) і 4) теореми існують за самою побудовою функції $G(x,t,\lambda)$. Для доведення пункту 5) використовуються співвідношення

$$K^{\{k-1\}}(x,t,\lambda)=\sum_{q=1}^{r}c_{kq}(t,\lambda)y_q(x,\lambda),\quad k=\overline{1,r},$$

які очевидні з того факту, що всі $K^{\{k-1\}}(x,t,\lambda)$ є розв'язками рівняння (1); $y_q(x)$, $q=\overline{1,r}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (1). Тоді, внаслідок рівностей з [12, 13]

$$\Delta y^{[n+s]}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,s+1}(x)y^{[i]}(x),\quad s=\overline{0,m-1},$$

маємо

$$K^{[n+s]\{k-1\}}(t+0,a,\lambda)-K^{[n+s]\{k-1\}}(t-0,a,\lambda)=$$

$$=\sum_{q=1}^{r}c_{kq}(a,\lambda)\left(y_q^{[n+s]}(t+0,\lambda)-y_q^{[n+s]}(t-0,\lambda)\right)=$$

$$=\sum_{q=1}^{r}c_{kq}(a,\lambda)\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,s+1}(t)y_q^{[i]}(t,\lambda)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,s+1}(t)K^{(i)\{k-1\}}(t,a,\lambda),$$

$$k=\overline{1,r},\quad s=\overline{0,m-1},$$

звідки, врахувавши пункт 1) і властивості функції Коші $K(x,t,\lambda)$, можна одержати 5), що й доводить теорему. ■

Зауваження 1. Зазначимо, що коли $\Delta b_{ij}(x)=0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, властивість 5) набуває "класичного" вигляду

$$G^{[k]}(t+0,t,\lambda)-G^{[k]}(t-0,t,\lambda)=0,\quad k=\overline{0,r-2};$$

$$G^{[r-1]}(t+0,t,\lambda)-G^{[r-1]}(t-0,t,\lambda)=1.$$

Зауваження 2. Функцію $G(x,t,\lambda)$ можна записати також у вигляді

$$G(x,t,\lambda)=(-1)^r\frac{Q(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)},\tag{18}$$

де

$$Q(x,t,\lambda)=\begin{vmatrix}K(x,a,\lambda) & K^{\{1\}}(x,a,\lambda) & \cdots & K^{\{r-1\}}(x,a,\lambda) & P(x,t,\lambda)\\ U_1\left(K(x,a,\lambda)\right) & U_1\left(K^{\{1\}}(x,a,\lambda)\right) & \cdots & U_1\left(K^{\{r-1\}}(x,a,\lambda)\right) & U_1\left(P(x,t,\lambda)\right)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ U_r\left(K(x,a,\lambda)\right) & U_r\left(K^{\{1\}}(x,a,\lambda)\right) & \cdots & U_r\left(K^{\{r-1\}}(x,a,\lambda)\right) & U_r\left(P(x,t,\lambda)\right)\end{vmatrix}.\tag{19}$$

Для того, щоб переконатись в еквівалентності формул (15) і (18), достатньо розписати визначник (19) за елементами першого рядка і останнього стовпця:

$$Q(x,t,\lambda)=(-1)^{r+2}P(x,t,\lambda)\Delta(\lambda)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r+3}U_\nu(P(x,t,\lambda))K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)A_{\nu k},$$

де $A_{\nu k}$ – алгебраїчне доповнення елемента $U_\nu\left(K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\right)$ у визначнику $\Delta(\lambda)$. Оскільки, внаслідок (16),

$$U_\nu(P(x,t,\lambda))=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_{\nu j}K^{[j]}(b,t,\lambda),$$

від (18) ми зразу приходимо до формули (15).

IV. Розв'язувальне ядро задачі (12), (4)

Розв'язок задачі (12), (4), якщо λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді інтеграла від розв'язувального ядра (матричного аналогу скалярної функції Ґріна задачі (12), (4)) і вектора F. Цей результат буде потрібним для подальших досліджень властивостей функції Ґріна задачі (11), (2).

Для задачі (12), (4) існує формула (див. [12, 13])

$$Y(x)=\Phi(x,a)Y(a)+\int_a^x\Phi(x,t)dF(t),\tag{20}$$

де $\Phi(x,t)=\Phi(x,t,\lambda)$ – фундаментальна матриця системи (3); вона подається у вигляді $\Phi(x,t,\lambda)=R(x,\lambda)R^{-1}(t,\lambda)$, тут $R(x,\lambda)$ – інтегральна матриця системи (3). Ми можемо записати рівність (20) так:

$$Y(x)=R(x,\lambda)C+\int_a^x\Phi(x,t,\lambda)dF(t),\tag{21}$$

де $C=\mathrm{colon}\,(c_1,c_2,\ldots,c_r)$, $C=R^{-1}(a,\lambda)Y(a)$. Підставивши (21) в умови (4), внаслідок того, що $|W_aR(a,\lambda)+W_bR(b,\lambda)|\neq 0$ (бо λ не є власним значенням крайової задачі), можна отримати вираз для стовпця C

$$C = -\{W_a R(a,\lambda) + W_b R(b,\lambda)\}^{-1} \int_a^b W_b \Phi(b,t,\lambda)\, dF(t).$$

Тому

$$Y(x) = -R(x,\lambda)\{W_a R(a,\lambda) + W_b R(b,\lambda)\}^{-1} \int_a^b W_b B(b,t,\lambda) dF(t) + \int_a^x \Phi(x,t,\lambda) dF(t).$$

Оскільки

$$R(x,\lambda)\{W_a R(a,\lambda) + W_b R(b,\lambda)\}^{-1} = \left\{W_a R(a,\lambda) R^{-1}(x,\lambda) + W_b R(b,\lambda) R^{-1}(x,\lambda)\right\}^{-1},$$

ми одержимо формулу

$$Y(x) = \int_a^b M(x,t,\lambda) dF(t), \tag{22}$$

де розв'язувальне ядро

$$M(x,t,\lambda) = \begin{cases} \Phi(x,t,\lambda) - \{W_a\Phi(a,x,\lambda) + W_b\Phi(b,x,\lambda)\}^{-1} W_b\Phi(b,t,\lambda), & x \ge t, \\ -\{W_a\Phi(a,x,\lambda) + W_b\Phi(b,x,\lambda)\}^{-1} W_b\Phi(b,t,\lambda), & x < t. \end{cases}$$

V. Зв'язок між функціями Ґріна спряжених крайових задач

Нехай $H(x,t,\lambda)$ – функція Ґріна спряженої крайової задачі

$$L^*_{mn}(z) = \bar{\lambda}\bar{\sigma} z + \hat{f} \tag{23}$$

з крайовими умовами (9), $\hat{f} = \hat{g}'$, $\hat{g} \in BV^+[a,b]$.

Під функцією Коші спряженого однорідного рівняння (6) розуміють функцію $\hat{K}(x,t,\lambda)$, яка за першою змінною задовольняє рівняння (6) і, крім того, $\hat{K}_x^{\{i\}}(t,t,\lambda) = 0$, $i = \overline{0,r-2}$, $\hat{K}_x^{\{r-1\}}(t,t,\lambda) = 1$ (тут індекс "x" означає, що квазіпохідна функції $\hat{K}(x,t,\lambda)$ береться саме за змінною x).

Теорема 1. *Розв'язок задачі (23), (9), в припущенні, що λ не є її власним значенням, можна зобразити у вигляді*

$$z(x) = \int_a^b H(x,t,\lambda) d\hat{g}(t), \tag{24}$$

де функція Ґріна $H(x,t,\lambda)$ подається формулою

$$H(x,t,\lambda) = \begin{cases} \hat{\Omega}(x,t,\lambda) + \hat{K}(x,t,\lambda), & x > t, \\ \hat{\Omega}(x,t,\lambda), & x < t, \end{cases} \tag{25}$$

$$\hat{\Omega}(x,t,\lambda) =$$
$$= -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1} \frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)} \hat{\beta}_{\nu j} \hat{K}_t^{[k-1]}(x,a,\lambda) \hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda),$$

фігурними дужками тут позначаються квазіпохідні в сенсі рівняння (6) за першою змінною, а квадратними – в сенсі спряженого до (6) рівняння (1) за другою змінною, $\hat{A}_{\nu k}$ – алгебраїчне доповнення елемента $V_\nu\left(\hat{K}_t^{[k-1]}(x,a,\lambda)\right)$ у визначнику

$$\hat{\Delta}(\lambda) \equiv \det\left(V_\nu\left(\hat{K}_t^{[k-1]}(x,a,\lambda)\right)\right)_{\nu,k=1}^{r}.$$

Функція Ґріна $H(x,t,\lambda)$ має такі властивості: 1) квазіпохідні за першою змінною $H_x^{\{k\}}(x,t,\lambda)$ ($k = \overline{0,m-1}$) є неперервними функціями двох змінних x, t і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій; 2) квазіпохідні $H_x^{\{k\}}(x,t,\lambda)$ ($k = \overline{m,r-1}$) мають обмежену на проміжку $[a,b]$ варіацію за першою змінною і є абсолютно неперервними по t; 3) $H(x,t,\lambda)$ на кожному з інтервалів $[a,t)$, $(t,b]$ по x задовольняє однорідне рівняння (6); 4) $H(x,t,\lambda)$ за змінною x задовольняє крайові умови (9); 5) для $x = t$ функція $H(x,t,\lambda)$ задовольняє умови стрибка

$$H_x^{\{k\}}(t+0,t,\lambda) - H_x^{\{k\}}(t-0,t,\lambda) = 0, \quad k = \overline{0,m-1};$$
$$H_x^{\{m+s\}}(t+0,t,\lambda) - H_x^{\{m+s\}}(t-0,t,\lambda) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)} \hat{\beta}_{\nu j} \Delta\bar{b}_{s+1,m-i}(t) \times$$
$$\times \hat{K}_{xt}^{(i)[k-1]}(t,a,\lambda) \hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda), \quad s = \overline{0,n-2};$$
$$H_x^{\{r-1\}}(t+0,t,\lambda) - H_x^{\{r-1\}}(t-0,t,\lambda) =$$
$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)} \hat{\beta}_{\nu j} \Delta\bar{b}_{n,m-i}(t) \times$$
$$\times \hat{K}_{xt}^{(i)[k-1]}(t,a,\lambda) \hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda).$$

□ *Доведення.* Для доведення цієї теореми застосовуються міркування, аналогічні використаним під час доведення попередньої теореми. Відомо [12, 14], що функції $\hat{K}(x,a,\lambda)$, $\hat{K}_t^{[1]}(x,a,\lambda)$, $\ldots$, $\hat{K}_t^{[r-1]}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (6) і розв'язок рівняння (23) можна подати у вигляді

$$z(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{r}c_k\hat{K}_t^{[k-1]}(x,a,\lambda)+\int\limits_a^x\hat{K}(x,t,\lambda)d\hat{g}(t). \tag{26}$$

Оскільки

$$z^{\{j\}}(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{r}c_k\hat{K}_{tx}^{[k-1]\{j\}}(x,a,\lambda)+$$

$$+\int\limits_a^x\hat{K}_x^{\{j\}}(x,t,\lambda)d\hat{g}(t),\quad j=\overline{1,r},$$

підстановка (26) в крайові умови (9) дасть рівності

$$V_\nu(z)=\sum_{k=1}^{r}c_kV_\nu\Big(\hat{K}_t^{[k-1]}(x,a,\lambda)\Big)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r-1}\hat{\beta}_{\nu j}\int\limits_a^b\hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda)d\hat{g}(t),\quad \nu=\overline{1,r}. \tag{27}$$

У припущенні, що λ не є власним значенням крайової задачі (6), (9), визначник системи (27) відрізняється від нуля $\hat{\Delta}(\lambda)\neq 0$. Тоді константи c_k можуть бути визначені з системи (27) єдиним чином:

$$c_k=-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\int\limits_a^b\hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda)d\hat{g}(t),\quad k=\overline{1,r}.$$

Підставивши ці значення c_k у формулу (26), отримаємо

$$z(x,\lambda)=\int\limits_a^x\hat{K}(x,t,\lambda)d\hat{g}(t)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\int\limits_a^b\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\hat{K}_t^{[k-1]}(x,a,\lambda)\hat{K}^{\{j\}}(b,t,\lambda)d\hat{g}(t).$$

Позначивши функцію Ґріна $H(x,t,\lambda)$ формулою (25), дійдемо формули (24).

Внаслідок того, що функції $\hat{K}_t^{[k-1]}(x,t,\lambda)$ ($k=\overline{1,r}$) є розв'язками рівняння (6) за змінною x, для них існують вищезгадані (див. розділ 2 статті) властивості розв'язків цього рівняння, тобто функції $\hat{K}_{tx}^{\{s\}[k-1]}(x,t,\lambda)$ є абсолютно неперервними по x на проміжку $[a,b]$ для $s=\overline{0,m-1}$ і є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації для $s=\overline{m,r-1}$. Згідно з наслідком [14] функції $\hat{K}_x^{*\{i\}}(x,t,\lambda)$ ($i=\overline{0,r-1}$) є розв'язками квазідиференціального рівняння (1) за змінною t. Отже, для них існують вищезгадані (див. розділи 1, 2) властивості розв'язків цього рівняння, зокрема функції $\hat{K}_x^{*\{i\}}(x,t,\lambda)$ ($i=\overline{0,r-1}$) будуть абсолютно неперервними за змінною t на проміжку $[a,b]$. Згідно з формулою (25) квазіпохідні функції Ґріна мають вигляд

$$H_x^{\{s\}}(x,t,\lambda)=\begin{cases}\hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda)+\hat{K}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda), & x>t,\\ \hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda), & x<t,\end{cases}$$

причому

$$\hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda)=$$

$$=-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\hat{K}_{xt}^{\{s\}[k-1]}(x,a,\lambda)\hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda),$$

звідки очевидне виконання пунктів 1) і 2) теореми.

Властивості 3) і 4) теореми існують за самою побудовою функції $H(x,t,\lambda)$. Залишилось довести пункт 5). Для цього розглянемо співвідношення

$$\hat{K}_t^{[k-1]}(x,t,\lambda)=\sum_{q=1}^{r}c_{kq}(t,\lambda)z_q(x,\lambda),\quad k=\overline{1,r},$$

які зрозумілі з того факту, що всі $\hat{K}_t^{[k-1]}(x,t,\lambda)$ є розв'язками рівняння (6); $z_q(x,\lambda)$, $q=\overline{1,r}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (6). Тоді, внаслідок рівностей з [12, 13]

$$\Delta z^{\{m+s\}}(x)=-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta\bar{b}_{s+1,m-j}(x)z^{\{j\}}(x),$$

$s=\overline{0,n-1}$, ми маємо

$$\hat{K}_{xt}^{\{m+s\}[k-1]}(t+0,a,\lambda)-\hat{K}_{xt}^{\{m+s\}[k-1]}(t-0,a,\lambda)=$$

$$=\sum_{q=1}^{r}c_{kq}(a,\lambda)\left(z_q^{\{m+s\}}(t+0,\lambda)-z_q^{\{m+s\}}(t-0,\lambda)\right)=$$

$$=-\sum_{q=1}^{r}c_{kq}(a,\lambda)\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\bar{b}_{s+1,m-i}(t)z_q^{\{i\}}(t,\lambda)=$$

$$=-\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\bar{b}_{s+1,m-i}(t)\hat{K}_{xt}^{\{i\}[k-1]}(t,a,\lambda),$$

$$k=\overline{1,r},\quad s=\overline{0,n-1},$$

звідки, врахувавши 1) і властивості функції Коші $\hat{K}(x,t,\lambda)$ можна одержати пункт 5), що й доводить теорему. ■

Теорема 2. *Для $x\neq t$, якщо λ не є власним значенням крайової задачі (11), (2), функції Ґріна спряжених крайових задач пов'язані між собою співвідношенням*

$$G(x,t,\lambda)=\overline{H(t,x,\lambda)}.$$

□ *Доведення.* Припустимо без втрати загальності, що $G(x,t,\lambda)$ і $H(x,t,\lambda)$ є функціями Ґріна спряжених крайових задач

$$L_{mn}(y)-\lambda\sigma(x)y=-f_1(x), \tag{28}$$

$$U_\nu(y)=\sum_{j=0}^{r-1}\alpha_{\nu j}y^{[j]}(a)+\sum_{j=0}^{r-1}\beta_{\nu j}y^{[j]}(b)=0,\quad \nu=\overline{1,r}, \tag{29}$$

$$L_{mn}^{*}(y) - \bar{\lambda}\bar{\sigma}(x)z = f_2(x), \tag{30}$$

$$V_\nu(z) = \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\alpha}_{\nu j} z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\beta}_{\nu j} z^{\{j\}}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{31}$$

відповідно, де $f_1(x)$, $f_2(x)$ – дійснозначні неперервні на $[a,b]$ функції. Ці задачі внаслідок введення векторів $Y = \operatorname{colon}\left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[r-1]}\right)$ і $Z = \operatorname{colon}\left(z^{\{r-1\}}, \ldots, z^{\{1\}}, z\right)$ зводяться до задач

$$\begin{cases} Y' = B'Y + F_1, \\ W_a Y(a) + W_b Y(b) = 0 \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} Z' = -\left(B^*\right)' Z + F_2, \\ \tilde{W}_a Z(a) + \tilde{W}_b Z(b) = 0 \end{cases}$$

відповідно, де $F_1(x) = \operatorname{colon}(0, \ldots, 0, f_1(x))$, $F_2(x) = \operatorname{colon}(f_2(x), 0, \ldots, 0)$, а W_a, W_b, $\tilde{W}_a$, $\tilde{W}_b$ – квадратні матриці порядку r.

Оскільки добутки $(Z^*)' Y$ і $Z^* Y'$ коректні, то

$$(Z^*Y)' = (Z^*)' Y + Z^* Y' =$$

$$= -Z^* B' Y + F_2^* Y + Z^* B' Y + Z^* F_1 = Z^* F_1 + F_2^* Y.$$

З іншого боку, врахувавши шлях побудови крайових умов спряженої задачі (9), можна побачити, що існує рівність (7) для неоднорідних спряжених крайових задач (28)–(31). Тоді

$$\int_a^b \left(Z^*(x) F_1(x) + F_2^*(x) Y(x)\right) dx = 0.$$

Згідно з формулою (22)

$$Y(x) = \int_a^b M(x,t,\lambda) F_1(t) dt,$$

$$Z(t) = \int_a^b N(t,x,\lambda) F_2(x) dx.$$

Врахувавши (17) та (24), можна зробити висновок, що останній елемент першого рядка матриці $M(x,t,\lambda)$ дорівнює $-G(x,t,\lambda)$, а перший елемент останнього рядка матриці $N(t,x,\lambda)$ збігається з $H(t,x,\lambda)$. Крім того,

$$\int_a^b \left(\int_a^b N(t,x,\lambda) F_2(x) dx \right)^* F_1(t) dt +$$

$$+ \int_a^b F_2^*(x) \int_a^b M(x,t,\lambda) F_1(t) dt dx = 0,$$

тобто

$$\int_a^b \int_a^b F_2^*(x) \left\{ N^*(t,x,\lambda) + M(x,t,\lambda) \right\} F_1(t) dx dt =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \left\{ -G(x,t,\lambda) + \overline{H(t,x,\lambda)} \right\} f_1(t) f_2(x) dx dt = 0.$$

Оскільки в фігурних дужках справа стоїть неперервна функція змінних x і t, а $f_1(x)$, $f_2(x)$ – також (довільні) дійснозначні неперервні функції, то згідно з основною лемою варіаційного числення (див., наприклад, [15, с. 295–296]) вираз у фігурних дужках дорівнює нулю, що й завершує доведення. ■

Висновки

Побудована в статті функція Ґріна та її властивості дозволяють вивчати й інші задачі, зокрема задачі на розвинення за власними функціями. Аналогічні результати можна отримати і у випадку векторного сингулярного диференціального та квазідиференціального операторів.

Література

[1] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

[2] Кац И.С., Крейн М.Г. О спектральных функциях струны // Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. – М.: Мир, 1968. – С. 648-731.

[3] Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 566 с.

[4] Махней О.В. Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості // Матем. студії. – 2002. – Т. 18. – № 2. – С. 147–156.

[5] Шин Д. О квази-дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1938. – Т. 18. – № 8. – С. 523–526.

[6] Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7 (49). – № 3. – С. 479–527.

[7] Мазуренко В.В., Стасюк М.Ф., Тацій Р.М. Про властивості матриці Ґріна системи з дискретно-неперервним розподілом параметрів // Вісник Прикарпатського університету. Сер. Математика. Фізика. – 2007. – Вип. 3. – С. 21–29.

[8] Махней А.В., Таций Р.М. Асимптотика собственных значений и собственных функций сингулярного

квазидифференциального оператора // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 8. – С. 1044–1051.

[9] Махней О.В., Тацій Р.М. Асимптотична поведінка власних значень і власних функцій крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння // Математичні Студії. – 2007. – Т. 29, № 2. – С. 165–174.

[10] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

[11] Стасюк М.Ф., Тацій Р.М. Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка": Фізико-математичні науки. – 2006. – № 566. – С. 33–40.

[12] Тацій Р.М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. держ. ун-т ім. і. Франка. – Львів, 1994. – 37 с.

[13] Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння: Препр. / АН України ІППММ; № 2-94. – Львів, 1994. – С. 1–54.

[14] Тацій Р.М., Пахолок Б.Б. Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // ДАН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 25–28.

[15] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

GREEN FUNCTION OF A BOUNDARY PROBLEM FOR A SINGULAR QUASIDIFFERENTIAL EQUATION

O.V. Makhnei

Precarpathian National University named after Vasyl Stefanyk
57, Shevchenko Str., 76025, Ivano-Frankivsk, Ukraine

In this paper, a Green function of boundary problem of quasidifferential equation with distributions in coefficients and homogeneous boundary conditions is constructed. With the aid of the method of introduction quasiderivatives and obtained expressions for adjoint boundary conditions properties of Green functions of adjoint boundary problems are investigated.

Keywords: Green function, quasidifferential equation, distributions, quasiderivatives

2000 MSC: 34B27

УДК: 517.927