ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№ 518, 2004, с. 70–75

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№ 518, 2004, p. 70–75

УСТАЛЕНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ШАРУ З МАСИВНИМ ТІЛОМ

О. Микитюк, М. Сухорольський*

Національний університет “Львівська політехніка”
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 26 серпня 2004 р.)

Розглядається задача про усталені коливання пружного шару з абсолютно твердим тілом. Побудова числового розв’язку відповідної мішаної задачі для системи рівнянь теорії пружності ґрунтується на секвенціальному поданні узагальнених функцій та апроксимації функцій послідовностями узагальнених частинних сум рядів Фур’є.

Ключові слова: теорія пружності, коливання шару, секвенціальне подання узагальнених функцій, ряди Фур’є.

2000 MSC: 74H30

УДК: 539.3

Вступ

Ефективні аналітичні та числові розв’язки задач про взаємодію пружних тіл з гладкими тілами і тілами, що мають в області контакту кутові точки чи ребра, побудовані в роботах [1, 2] за наявності сингулярних розв’язків в явному вигляді відповідних рівнянь теорії пружності. Однак такий підхід встановлює суттєві обмеження на використання математичних моделей геометричних форм тіл, для яких можуть бути сформульовані контактні задачі та побудовані розв’язки.

У роботі розглядається задача про усталені коливання плоского шару, що взаємодіє за умов ідеального з’єднання з жорсткою основою на одній лицевій поверхні та масивним абсолютно жорстким тілом у довільній області другої лицевої поверхні. Функцію Гріна відповідної задачі теорії пружності зображено у вигляді границь слабко збіжних послідовностей узагальнених часткових сум подвійних рядів Фур’є за тригонометричними системами функцій [4]. Задачу зведено до системи інтегральних рівнянь відносно контактних напружень, що виникають в області взаємодії масивного тіла і шару. Побудова числових розв’язків інтегральних рівнянь ґрунтується на поєднанні методу колокацій і методу апроксимації функцій послідовностями узагальнених часткових сум рядів.

I. Постановка задачі

Розглянемо задачу про взаємодію за умов ідеального контакту ізотропного шару (товщини $2h$) з абсолютно жорсткою основою на лицевій поверхні S^- і циліндричним абсолютно твердим тілом в області D (основою циліндра) лицевої поверхні S^+, $D \subset S^+$. Вважаємо також, що область D симетрична відносно двох взаємно перпендикулярних осей $O'\alpha_1'$ і $O'\alpha_2'$, а зовнішні сили, що діють на циліндр, приведені до точки O' і задаються у вигляді

$$M_1 = M_{10}\mathrm{e}^{i\omega t}, \quad M_{21} = M_{20}\mathrm{e}^{i\omega t}, \quad P_3 = P_{30}\mathrm{e}^{i\omega t}, \quad (1)$$

де M_{10} і M_{20} – амплітуди моментів відносно осей $O'\alpha_1'$ і $O'\alpha_2'$; P_{30} – амплітуда рівнодійної сили, що напрямлена за віссю $O'\alpha_3'$, перпендикулярно до площини $\alpha_1'O'\alpha_2'$; ω – частота вимушених коливань; t – часова координата.

Задача полягає у відшуканні амплітуд контактних напружень $\sigma_{31}^-, \sigma_{32}^-, \sigma_{33}^-$ (за напрямами осей $O'\alpha_1'$, $O'\alpha_2', O'\alpha_3'$) на поверхні S^- і амплітуд контактних напружень σ_{31}^+, σ_{32}^+, σ_{33}^+ в області $D \subset S^+$.

Напружено-деформований стан шару для випадку усталених коливань описується рівняннями

$$\frac{\partial\ \sigma_{i1}}{\partial\ \alpha_1} + \frac{\partial\ \sigma_{i1}}{\partial\ \alpha_1} + \frac{\partial\ \sigma_{i3}}{\partial\ \alpha_3} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad ; \quad (2)$$

$$\sigma_{ii} = 2G\frac{\partial\ u_i}{\partial\ \alpha_i} + \lambda\left(\frac{\partial\ u_1}{\partial\ \alpha_1} + \frac{\partial\ u_2}{\partial\ \alpha_2} + \frac{\partial\ u_3}{\partial\ \alpha_3}\right), \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = G\left(\frac{\partial\ u_j}{\partial\ \alpha_i} + \frac{\partial\ u_i}{\partial\ \alpha_j}\right) \quad (i,j = 1,2,3,\ i \neq j),$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – прямокутні координати з початком у серединній площині шару, $O'\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h\right)$ $(\alpha_1' = \alpha_1 - \alpha_1^0$, $\alpha_2' = \alpha_2 - \alpha_2^0$, $\alpha_3' = \alpha_3 - h)$; σ_{ij} – амплітуди компонент тензора напружень; u_i – амплітуди компонент вектора переміщень; λ, G – пружні сталі; ρ – густина матеріалу.

Задаємо граничні умови другого роду (умови контакту з абсолютно жорсткою основою) на поверхні S^-

$$u_i\left(\alpha_1, \alpha_2, -h\right) = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (4)$$

*Автор-респондент

i – змішані граничні умови на поверхні S^+

$$\begin{aligned} &u_i(\alpha_1,\alpha_2,h)=0 \quad (i=1,2),\\ &u_3(\alpha_1,\alpha_2,h)=u_0+\psi_1\alpha_1+\psi_2\alpha_2,\\ &\alpha(\alpha_1,\alpha_2)\in D; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\sigma_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,h)=0 \quad (i=1,2), \quad \alpha(\alpha_1,\alpha_2)\bar{\in} D, \tag{6}$$

де ψ_1, ψ_2, u_0 – невідомі амплітуди кутів повороту відносно осей $O'\alpha_1'$, $O'\alpha_2'$ і амплітуда переміщення у напрямі осі $O'\alpha_3'$ основи масивного тіла.

Рівняння руху шару доповнюємо рівняннями руху тіла

$$\iint\limits_D \sigma_{33}^+ ds - m\omega^2 u_0 = P_{30}, \tag{7}$$

$$\iint\limits_D \sigma_{33}^+\alpha_2 ds - i_1\omega^2\psi_1 = M_{10}, \quad \iint\limits_D \sigma_{33}^+\alpha_1 ds - i_2\omega^2\psi_2 = M_{20},$$

де $i_1,\ i_2,\ m$ – моменти інерції відносно осей $O'\alpha_1'$, $O'\alpha_2'$ і маса абсолютно твердого тіла.

Розв'язок задачі будуємо у паралелепіпеді $\Pi=\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3): 0<\alpha_i<l_i;\ |\alpha_3|<h\}$ $(i=1,2)$ зі сторонами основи $l_1,\ l_2$ і висотою $2h$, продовживши шукані функції за межі бічних граней паралелепіпеда як періодичні функції. При цьому вважаємо, що центр області D і центр верхньої основи паралелепіпеда збігаються, $\alpha_1^0=l_1/2,\ \alpha_2^0=l_2/2$, а також довжини сторін основи паралелепіпеда значно більші, ніж товщина шару та діаметр області D.

II. Побудова узагальненого сингулярного розв'язку

Спочатку шукаємо систему розв'язків трьох задач про дію окремих компонент поверхневого навантаження на шар, що взаємодіє з абсолютно жорсткою основою. Вважаємо, що навантаження локалізовано у квадраті $\Pi_0=\left\{(\alpha_1,\alpha_2): \left|\alpha_i-\alpha_i^0\right|<\varepsilon\right\}$ $(i=1,2)$ зі сторонами довжини 2ε, $\Pi\subset S^+$. Амплітуди поверхневих навантажень задаємо у формі

$$\begin{aligned} &\sigma_{31}(\alpha_1,\alpha_2,h)=\sigma_{31}^i,\\ &\sigma_{32}(\alpha_1,\alpha_2,h)=\sigma_{32}^i,\\ &\sigma_{33}(\alpha_1,\alpha_2,h)=\sigma_{33}^i \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\sigma_{3j}^i = P^i\delta_{ij}\delta\left(\alpha_1,\alpha_1^0,\varepsilon\right)\delta\left(\alpha_2,\alpha_2^0,\varepsilon\right) \quad (i,j=1,2,3); \tag{9}$$

$$\delta\left(\alpha_i,\alpha_i^0,\varepsilon\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}\,g\left(\dfrac{\left|\alpha_i-\alpha_i^0\right|}{\varepsilon}\right), & \left|\alpha_i-\alpha_i^0\right|\le\varepsilon,\\ 0, & \left|\alpha_i-\alpha_i^0\right|>\varepsilon\end{cases} \tag{10}$$

– дельтоподібна функцій (з граничною δ-функцією); $g(t)=1+\cos(\pi t)$ $(0\le t\le 1)$; P^i – рівнодійні навантаження за координатними напрямами; $\delta_{ij}=1$, якщо $i=j$, $\delta_{ij}=0$, якщо $i\ne j$.

Для періодичної дельтоподібної функції (10), продовженої на інтервал $(-l,0)$ як парної і непарної функції, маємо відповідно ряди, які рівномірно збігаються при $\varepsilon\ne 0$,

$$\delta\left(\alpha,\alpha^0,\varepsilon\right)=\frac{2}{l}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\lambda_k\varepsilon)\cos\lambda_k\alpha^0\cos\lambda_k\alpha\right),$$

$$\delta\left(\alpha,\alpha^0,\varepsilon\right)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\lambda_k\varepsilon)\sin\lambda_k\alpha^0\sin\lambda_k\alpha,$$

де $\varphi(\lambda_k\varepsilon)=\int\limits_0^1 g(t)\cos(\lambda_k\varepsilon t)\,dt=\dfrac{\sin(\lambda_k\varepsilon)}{\lambda_k\varepsilon}\dfrac{1}{1-(\lambda_k\varepsilon/\pi)^2}$.

Врахувавши ці подання у формулах (9), одержимо такі формули для компонент локального поверхневого навантаження:

$$\begin{aligned} &\sigma_{3j}^i=P^i\delta_{ij}\sum_{k,m=0}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\,\Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^i(\alpha)\\ &(i,j=1,2,3), \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\Phi_{km}^1(\alpha)=\cos\lambda_{k1}\alpha_1\sin\lambda_{m2}\alpha_2; \quad \Phi_{km}^2(\alpha)=\sin\lambda_{k1}\alpha_1\cos\lambda_{m2}\alpha_2;$$

$$\Phi_{km}^3(\alpha)=\sin\lambda_{k1}\alpha_1\sin\lambda_{m2}\alpha_2; \quad \Phi_{km}^4(\alpha)=\cos\lambda_{k1}\alpha_1\cos\lambda_{m2}\alpha_2; \quad \lambda_{k1}=\frac{k\pi}{l_1}; \ \ \lambda_{m2}=\frac{m\pi}{l_2}.$$

$$c_{km}(\varepsilon)=\frac{2}{l_1l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon), \text{ якщо } m=0,\ k=\overline{1,\infty},$$

$$c_{km}(\varepsilon)=\frac{2}{l_1l_2}\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon), \text{ якщо } k=0,\ m=\overline{1,\infty},$$

$$c_{km}(\varepsilon)=\frac{4}{l_1l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon), \text{ якщо } m=\overline{1,\infty},\ k=\overline{1,\infty}.$$

Невідомі функції системи рівнянь (2), (3) для кожної з трьох задач шукаємо у вигляді

$$
\left\{\begin{array}{l} u_1^i \\ \sigma_{31}^i \end{array}\right\} = \frac{P^i}{2G}\sum_{k=0,m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\left\{\begin{array}{l} u_{1km}^i(\alpha_3) \\ \sigma_{31km}^i(\alpha_3) \end{array}\right\}\Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^1(\alpha),
$$

$$
\left\{\begin{array}{l} u_2^i \\ \sigma_{32}^i \end{array}\right\} = \frac{P^i}{2G}\sum_{k=0,m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\left\{\begin{array}{l} u_{2km}^i(\alpha_3) \\ \sigma_{32km}^i(\alpha_3) \end{array}\right\}\Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^2(\alpha), \qquad (12)
$$

$$
\left\{\begin{array}{l} u_3^i \\ \sigma_{11}^i \\ \sigma_{22}^i \\ \sigma_{33}^i \end{array}\right\} = \frac{P^i}{2G}\sum_{k=1,m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\left\{\begin{array}{l} u_{3km}^i(\alpha_3) \\ \sigma_{11km}^i(\alpha_3) \\ \sigma_{22km}^i(\alpha_3) \\ \sigma_{33km}^i(\alpha_3) \end{array}\right\}\Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^3(\alpha),
$$

$$
\sigma_{12}^i = \frac{P^i}{2G}\sum_{k=0,m=0}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\,\sigma_{12km}^i(\alpha_3)\,\Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^4(\alpha).
$$

Підставивши ряди (12) у рівняння системи (2), (3), прийдемо до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів цих рядів, звідки знайдемо

$$
u_{1km}^i(\alpha_3) = \frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{k1}}{\omega_0^2}\left(c_{1km}^i \mathrm{ch}(\omega_{1km}\alpha_3) + c_{2km}^i \mathrm{sh}(\omega_{1km}\alpha_3)\right) + c_{3km}^i \mathrm{ch}(\omega_{2km}\alpha_3) + c_{4km}^i \mathrm{sh}(\omega_{2km}\alpha_3),
$$

$$
u_{2km}^i(\alpha_3) = \frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{2m}}{\omega_0^2}\left(c_{1km}^i \mathrm{ch}(\omega_{1km}\alpha_3) + c_{2km}^i \mathrm{sh}(\omega_{1km}\alpha_3)\right) + c_{5km}^i \mathrm{ch}(\omega_{2km}\alpha_3) + c_{6km}^i \mathrm{sh}(\omega_{2km}\alpha_3),
$$

$$
u_{3km}^i(\alpha_3) = \frac{2G+\lambda}{G}\frac{\omega_{1km}}{\omega_0^2}\left(c_{1km}^i \mathrm{sh}(\omega_{1km}\alpha_3) + c_{2km}^i \mathrm{ch}(\omega_{1km}\alpha_3)\right) +
$$

$$
+\frac{1}{\omega_{2km}}\left(c_{3km}^i\lambda_{k1} + c_{5km}^i\lambda_{m2}\right)\mathrm{sh}(\omega_{2km}\alpha_3) + \frac{1}{\omega_{2km}}\left(c_{4km}^i\lambda_{k1} + c_{6km}^i\lambda_{m2}\right)\mathrm{ch}(\omega_{2km}\alpha_3),
$$

$$
-\frac{\sigma_{11km}^i(\alpha_3)}{2G} = \left(\frac{\lambda}{2G} + \frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{k1}^2}{\omega_0^2}\right)\left(c_{1km}^i ch(\omega_{1km}\alpha_3) + c_{2km}^i \mathrm{sh}(\omega_{1km}\alpha_3)\right) +
$$

$$
c_{3km}^i\lambda_{k1}\mathrm{ch}(\omega_{2km}\alpha_3) + c_{4km}^i\lambda_{k1}\mathrm{sh}(\omega_{2km}\alpha_3),
$$

$$
-\frac{\sigma_{22km}^i(\alpha_3)}{2G} = \left(\frac{\lambda}{2G} + \frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{m2}^2}{\omega_0^2}\right)\left(c_{1km}^i \mathrm{ch}(\omega_{1km}\alpha_3) + c_{2km}^i sh(\omega_{1km}\alpha_3)\right) +
$$

$$
+c_{5km}^i\lambda_{m2}\mathrm{ch}(\omega_{2km}\alpha_3) + c_{6km}^i\lambda_{m2}\mathrm{sh}(\omega_{2km}\alpha_3),
$$

$$
\frac{\sigma_{33km}^i(\alpha_3)}{2G} = \left(-\frac{\lambda}{2G} + \frac{2G+\lambda}{G}\frac{\omega_{1km}^2}{\omega_0^2}\right)\left(c_{1km}^i \mathrm{ch}(\omega_{1km}\alpha_3) + c_{2km}^i \mathrm{sh}(\omega_{1km}\alpha_3)\right) +
$$

$$
+\left(c_{3km}^i\lambda_{k1} + c_{5km}^i\lambda_{m2}\right)\mathrm{ch}(\omega_{2km}\alpha_3) + \left(c_{4km}^i\lambda_{k1} + c_{6km}^i\lambda_{m2}\right)\mathrm{sh}(\omega_{2km}\alpha_3),
$$

$$
\frac{\sigma_{12km}^i(\alpha_3)}{2G} = \frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{k1}\lambda_{m2}}{\omega_0^2}\left(c_{1km}^i \mathrm{ch}(\omega_{1km}\alpha_3) + c_{2km}^i \mathrm{sh}(\omega_{1km}\alpha_3)\right) +
$$

$$
+\frac{1}{2}\left(c_{3km}^i\lambda_{m2} + c_{5km}^i\lambda_{k1}\right)\mathrm{ch}(\omega_{2km}\alpha_3) + \frac{1}{2}\left(c_{4km}^i\lambda_{m2} + c_{6km}^i\lambda_{k1}\right)\mathrm{sh}(\omega_{2km}\alpha_3),
$$

$$
\frac{\sigma_{13km}^i(\alpha_3)}{2G} = \frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{1k}\omega_{1km}}{\omega_0^2}\left(c_{1km}^i \mathrm{sh}(\omega_{1km}\alpha_3) + c_{2km}^i \mathrm{ch}(\omega_{1km}\alpha_3)\right) +
$$

$$
+\frac{1}{2\omega_{2km}}\left(c_{3km}^i\left(\omega_{2km}^2 + \lambda_{k1}^2\right) + c_{5km}^i\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right)\mathrm{sh}(\omega_{2km}\alpha_3) +
$$

$$\frac{\sigma^i_{23km}(\alpha_3)}{2G} = \frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{m2}\omega_{1km}}{\omega_0^2}\left(c^i_{1km}\mathrm{sh}\,(\omega_{1km}\alpha_3) + c^i_{2km}\mathrm{ch}(\omega_{1km}\alpha_3)\right) +$$

$$+\frac{1}{2\omega_{2km}}\left[c^i_{5km}\left(\omega^2_{2km}+\lambda^2_{m2}\right)+c^i_{3km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right] sh\,(\omega_{2km}\alpha_3) + \qquad (13)$$

$$+\frac{1}{2\omega_{2km}}\left[c^i_{6km}\left(\omega^2_{2km}+\lambda^2_{m2}\right)+c^i_{4km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]\mathrm{ch}\,(\omega_{2km}\alpha_3)\,,$$

де $\omega^2_{1km} = \lambda^2_{k1}+\lambda^2_{m2}-\frac{G}{2G+\lambda}\omega_0^2$; $\quad \omega^2_{2km} = \lambda^2_{k1}+\lambda^2_{m2}-\omega_0^2$; $\quad \omega_0^2 = \frac{\rho\omega^2}{G}$; $\quad c_{ikm}$ $\left(i=\overline{1,6}\right)$ – сталі інтегрування.

Підставивши відповідні формули (12) в умови (4), (9) з урахуванням формул (13), одержимо три послідовності ($i = 1,2,3$) систем шести лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомихc^i_{jkm} $\left(j=\overline{1,6}\right)$

$$\frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{k1}}{\omega_0^2}\left(c^i_{1km}\mathrm{ch}\,(\omega_{1km}h)-c^i_{2km}\mathrm{sh}\,(\omega_{1km}h)\right)+c^i_{3km}\mathrm{ch}\,(\omega_{2km}h)-c^i_{4km}sh\,(\omega_{2km}h)\;=0,$$

$$\frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{2m}}{\omega_0^2}\left(c^i_{1km}\mathrm{ch}\,(\omega_{1km}h)-c^i_{2km}\mathrm{sh}\,(\omega_{1km}h)\right)+c^i_{5km}\mathrm{ch}\,(\omega_{2km}h)-c^i_{6km}sh\,(\omega_{2km}h)=0,$$

$$\frac{2G+\lambda}{G}\frac{\omega_{1km}}{\omega_0^2}\left(-c^i_{1km}\mathrm{sh}\,(\omega_{1km}h)+c^i_{2km}\mathrm{ch}\,(\omega_{1km}h)\right)-$$

$$-\frac{1}{\omega_{2km}}\left(c^i_{3km}\lambda_{k1}+c^i_{5km}\lambda_{m2}\right)\mathrm{sh}\,(\omega_{2km}h)+\;\frac{1}{\omega_{2km}}\left(c^i_{4km}\lambda_{k1}+c^i_{6km}\lambda_{m2}\right)\;\mathrm{ch}\,(\omega_{2km}h)=0,$$

$$\frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{1k}\omega_{1km}}{\omega_0^2}\left(c^i_{1km}\mathrm{sh}\,(\omega_{1km}h)+c^i_{2km}\mathrm{ch}\,(\omega_{1km}h)\right)+ \qquad (14)$$

$$+\frac{1}{2\omega_{2km}}\left(c^i_{3km}\left(\omega^2_{2km}+\lambda^2_{k1}\right)+c^i_{5km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right)\mathrm{sh}\,(\omega_{2km}h)+$$

$$+\frac{1}{2\omega_{2km}}\left(c^i_{4km}\left(\omega^2_{1km}+\lambda^2_{k1}\right)+c^i_{61km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right)\mathrm{ch}\,(\omega_{2km}h)=\delta_{1i},$$

$$\frac{2G+\lambda}{G}\frac{\lambda_{m2}\omega_{1km}}{\omega_0^2}\left(c^i_{1km}\mathrm{sh}\,(\omega_{1km}h)+c^i_{2km}\mathrm{ch}(\omega_{1km}h)\right)+$$

$$+\frac{1}{2\omega_{2km}}\left[c^i_{5km}\left(\omega^2_{2km}+\lambda^2_{m2}\right)+c^i_{3km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]\mathrm{sh}\,(\omega_{2km}h)+$$

$$+\frac{1}{2\omega_{2km}}\left[c^i_{6km}\left(\omega^2_{2km}+\lambda^2_{m2}\right)+c^i_{4km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]\mathrm{ch}\,(\omega_{2km}h)=\delta_{2i},$$

$$\left(-\frac{\lambda}{2G}+\frac{2G+\lambda}{G}\frac{\omega^2_{1km}}{\omega_0^2}\right)\left(c^i_{1km}ch\,(\omega_{1km}h)+c^i_{2km}\mathrm{sh}\,(\omega_{1km}h)\right)+$$

$$+\left(c^i_{3km}\lambda_{k1}+c^i_{5km}\lambda_{m2}\right)\;\mathrm{ch}\,(\omega_{2km}h)+\left(c^i_{4km}\lambda^+_{k1}c^i_{6km}\lambda_{m2}\right)sh\,(\omega_{2km}h)=\delta_{3i}.$$

Розв'язки систем рівнянь (14) існують за умови не рівних нулю визначників системи (не рівності значень частоти вимушуючої сили і власних частот коливань шару). З рівностей нулю визначників систем одержуємо рівняння для визначення власних частот коливань шару.

Підставивши числові значення сталих інтегрування у формули (13), а потім – у формули (12), одержимо відповідні розв'язки задачі. Ряди (12) при $\varepsilon \neq 0$ рівномірно збігаються внаслідок порядку росту гіперболічних функцій і рівномірної збіжності рядів (11).

Границя при $\varepsilon \to 0$ сум рядів (12) називається узагальненим (в розумінні слабкої збіжності [4]) розв'язком задачі про навантаження шару зусиллями, зосередженими в точці$\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h\right)$. Для амплітуд переміщень маємо такі подання:

$$U_j^i = \frac{P^i}{2G} \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k,m=0}^{\infty} c_{km}\left(\varepsilon\right) u^i_{jkm}(\alpha_3) \Phi^i_{km}\left(\alpha^0\right) \Phi^j_{km}\left(\alpha\right) \quad (i,j = 1,2,3)\,,$$

які ще можна записати у вигляді границь узагальнених часткових сум рядів

$$U_j^i = \frac{P^i}{2G} \lim_{n \to \infty} \sum_{k,m=0}^{n} c_{km}\left(\varepsilon\right) u^i_{jkm}(\alpha_3) \Phi^i_{km}\left(\alpha^0\right) \Phi^j_{km}\left(\alpha\right) \quad (i,j = 1,2,3)\,, \tag{15}$$

де

$$\varepsilon = \varepsilon\left(n\right) = \varepsilon_0 / n^{\gamma}, \;\; \varepsilon_0 = const, \;\; 0 < \gamma < 1. \tag{16}$$

Зауважимо, що послідовності (15) збігаються рівномірно в будь-якій області, що належить паралелепіпеду Π і не містить точки $\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h\right)$.

III. Побудова розв'язку задачі

Сформулюємо задачу про динамічну взаємодію шару і абсолютно твердого тіла в інтегральній формі. Використавши зображення (15), запишемо амплітуди компонент переміщення точок шару, навантаженого контактними напруженнями $\sigma^+_{3i}\left(\alpha\right) \; (i = 1,2,3, \;\; \alpha\left(\alpha_1, \alpha_2\right))$

$$u_j\left(\alpha, \alpha_3\right) = \iint\limits_D \sum_{i=1}^{3} \bar{U}_j^i \left(\alpha, \alpha^0, \alpha_3\right) \sigma^+_{3i}\left(\alpha^0\right) ds\left(\alpha^0\right) \quad (j = 1,2,3)\,, \tag{17}$$

де $\bar{U}_j^i\left(\alpha, \alpha^0, \alpha_3\right) = \dfrac{1}{2G} \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k,m=0}^{n} c_{km}\left(\varepsilon\right) u^i_{jkm}(\alpha_3) \Phi^i_{km}\left(\alpha^0\right) \Phi^j_{km}\left(\alpha\right)$.

Підставивши вирази (17) в умови контакту (5), одержимо систему трьох інтегральних рівнянь:

$$\iint\limits_D \sum_{i=1}^{3} \bar{U}_3^i \left(\alpha, \alpha^0, h\right) \sigma^+_{3i}\left(\alpha^0\right) ds\left(\alpha^0\right) = u_0 + \psi_1 \alpha_1 + \psi_2 \alpha_2, \tag{18}$$

$$\iint\limits_D \sum_{i=1}^{3} \bar{U}_j^i \left(\alpha, \alpha^0, h\right) \sigma^+_{3i}\left(\alpha^0\right) ds\left(\alpha^0\right) = 0, \quad \alpha\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \in D, \quad (j = 1,2)$$

і трьох інтегральних співвідношень (7), що містять невідомі контактні напруження$\sigma^+_{3i}\left(\alpha^0\right)$ і параметри $\psi_1, \; \psi_2, \; u_0$.

Значення контактних напружень на лицевій поверхні S^- шукаємо за відповідними формулами (12) при $\alpha_3 = h$.

Числовий розв'язок системи рівнянь (7), (18) шукаємо методом колокацій. ОбластьD наближуємо системою квадратів $D^r = \left\{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_i - \alpha_i^r| < s\right\} \; r = \overline{1,N}$), на кожному з яких $\sigma^+_{3i} = \sigma^r_{3i} = const$, а також справджуємо рівняння (7), (18) у контрольних точках$\alpha^q\left(\alpha_1^q, \alpha_2^q\right)$ $\left(q = \overline{1,N}\right)$, які збігаються з центрами квадратів D^q. Після дискретизації рівнянь і обчислення відповідних інтегралів прийдемо до такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно$3N + 3$ невідомих $\sigma^r_{3i} \;\; (i = 1,2,3)\,, \;\;\; \psi_1, \; \psi_2, \; u_0$:

$$4s^2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{r=1}^{N} \bar{\bar{U}}{}_3^i \left(\alpha^q, \alpha^r, h\right) \sigma^r_{3i} - u_0 - \alpha_1^q \psi_1 - \alpha_2^q \psi_2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{r=1}^{N} \bar{\bar{U}}{}_j^i \left(\alpha^q, \alpha^r, h\right) \sigma^r_{3i} = 0, \quad (j = 1,2)\,, \quad \left(q = \overline{1,N}\right), \tag{19}$$

$$4s^2\sum_{r=1}^{N}\sigma_{33}^{r}-m\omega^2u_0=P_{30},\quad 4s^2\sum_{r=1}^{N}\sigma_{33}^{r}\alpha_2^{r}-i_1\omega^2\psi_1=M_{10},\quad 4s^2\sum_{r=1}^{N}\sigma_{33}^{r}\alpha_1^{r}-i_2\omega^2\psi_2=M_{20},$$

де

$$\bar{\bar{U}}_j^{\,i}\left(\alpha^q,\alpha^r,h\right)=\tfrac{1}{2G}\lim_{n\to\infty}\sum_{k,m=0}^{n}c_{km}\left(\varepsilon\right)c_{km}^{0}\left(s\right)\,u_{jkm}^{i}(h)\Phi_{km}^{i}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{j}\left(\alpha^q\right);\quad c_{km}^{0}\left(s\right)=\tfrac{\sin(\lambda_k s)}{\lambda_k s}\tfrac{\sin(\lambda_m s)}{\lambda_m s}. \qquad (20)$$

Розв'язок системи рівнянь (19) існує, якщо визначник системи не дорівнює нулю. З рівності нулю визначника системи (при змінній частоті вимушених коливань) одержуємо рівняння для визначення власних частот коливань шару з масивним тілом.

Для обчислення коефіцієнтів системи (19) використовуємо часткові суми рядів (20). При цьому довжини відрізків частинних сум рядів вибираємо з умови $\varepsilon \le s$, в якій параметр $\varepsilon=\varepsilon\left(n\right)$ визначається за формулою (16). Наприклад, зафіксувавши числове значення параметра s, що характеризує дискретизацію області D, і прийнявши $\varepsilon_0=0,1$, $\gamma\approx 1$, одержимо нижню межу номера $n>10/s$.

IV. Висновки

Для випадку плоскої задачі про взаємодію масивного тіла з ізотропним шаром для великих значень параметрів $l_1,\ l_2$ порівняно з шириною області контакту розподіл контактних напружень, знайденим у роботах [1,5] для випадку плоскої задачі про взаємодію масивного тіла з ізотропним півпростором. У приграничній зоні області контакту числовим методом одержуються усереднені у цій зоні значення контактних напружень.

Зауважимо, що наближений розв'язок систем рівнянь (19) для скінченних значень номера N є також математичною моделлю дискретної взаємодії масивного тіла з шаром через N опор. При цьому розподіл контактного тиску на кожній з опор модулюється інтегральною згорткою двох дельтоподібних функцій типу (10), базовими для яких є системи (функцій, параметр): $g\left(t\right)=1+\cos\left(\pi t\right)$, ε; $g\left(t\right)=1$; s.

Література

[1] Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука. 1980. – 304 с.

[2] Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

[3] Кубенко В. Д., Попов С. Н. Осесимметричная задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого простанства // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 7. – С. 16 – 24.

[4] Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач / Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Сухорольський М. А. та інші. – Львів: Національний ун-т "Львівська політехніка", 2002. – 226 с.

[5] Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. – К.: Наук. думка, 1976. – 284 с.

STABLE TRANSVERSAL OSCILATIONS OF THE LAYER WITH MASSIVE BODY

O. Mikituk, M. Sukhorolsky*

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

The problem of stable oscillations of the elastic layer with the absolutely solid is considered. The constructing of the numerical solution of the corresponding mixed problem for the system of equation of the theory of elasticity is based on the sequential presentation of the generalized functions and function approximation by means of sequences generalized partial sums of Fourier series.

Keywords: theory of elasticity, oscillations of the layer, sequential presentation of the generalized functions, Fourier series.

2000 MSC: 74H30

UDK: 539.3

*Corresponding author