ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 518, 2004, с. 67–69

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 518, 2004, p. 67–69

ТЕПЛОВА ЗАДАЧА ТЕРТЯ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ВКЛЮЧЕННЯМ

С. Матисяк[a], В. Зеленяк [b], *, Л. Лібацький [b]

[a] *Варшавський університет, Польща*
[b] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 6 листопада 2002 р.)

Плоскі задачі стаціонарної теплопровідності і термопружності для півпростору з циліндричним включенням зведені до двох сингулярних інтегральних рівнянь по замкнутому контуру включення (границі розділу матеріалів).

Ключові слова: теплопровідність, термопружність, інтегральні рівняння, включення.

2000 MSC: 74F05

УДК: 539.3

I. Постановка задачі

Згідно з [1] теплова задача тертя зводиться до визначення температурного поля та ініційованого ним напруженого стану в тілі при нагріванні частини його граничної поверхні (ділянки контакту) розподіленим тепловим потоком, пропорційним питомій роботі тертя. Таку задачу для півпростору з однією внутрішньою або крайовою тріщиною розглянуто в роботах [2,3], а з періодичною системою таких тріщин – в [4,5]. У цій роботі одержані інтегральні рівняння відповідної теплової задачі для півобмеженого тіла з циліндричним чужорідним включенням у випадку плоскої деформації.

Розглянемо пружний півпростір, в якому знаходиться включення, що має форму нескінченного циліндра, твірні якого паралельні межі півпростору, а напрямною є еліпс з півосями a і b. Введемо прямокутну декартову систему координат xyz так, щоб площина xOz збігалася з межею півпростору, вісь Oz була паралельна твірним включення, а вісь Oy збігалася із зовнішньою нормаллю до межі півпростору. Маючи на увазі розгляд плоскої задачі, коли напружено-деформований стан однаковий в усіх площинах, паралельних площині xOy, ми не зображаємо взагалі вісь Oz, а буквою z будемо позначати комплексну змінну $z = x + iy$. Крім системи координат xOy розглядатимемо також локальну систему $x_1O_1y_1$, одержану із системи xOy паралельним переносом так, щоб точка збігалася з центром еліпса O_1. Тоді комплексна координата точки O_1 буде $z_1^0 = -d - ih$, а зв'язок між комплексними координатами точок в різних системах задається співвідношенням $z = z_1 + z_1^0$.

Нехай ділянка $|x| \le c, y = 0$ поверхні півпростору нагрівається, внаслідок тертя тепловим потоком інтенсивності $Q(x)$, а решта поверхні – теплоізольована

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \begin{cases} -Q(x), & |x| \le c, \\ 0, & |x| > c. \end{cases} \tag{1}$$

Поверхня півпростору вважається ненавантаженою, і напруження та температура на безмежності $(x \to \pm\infty,\ y \to -\infty)$ – відсутні. Припустимо також, що на контурі спряження L (межа еліпса) включення і матриці існують умови ідеального теплового контакту

$$\lambda_1 \frac{\partial T^+}{\partial n} = \lambda \frac{\partial T^-}{\partial n}, \quad T^+ = T^-, \quad t \in L, \tag{2}$$

та ідеального механічного контакту

$$\begin{aligned} &(N + iM)^+ = (N + iM)^-, \\ &(u + iv)^+ = (u + iv)^-, \qquad t \in L. \end{aligned} \tag{3}$$

Тут n – зовнішня нормаль до контуру L; λ, λ_1 – коефіцієнти теплопровідності матриці і включення відповідно; $T(x, y)$ – температура; N, M – нормальна і дотична компоненти зусиль; u, v – компоненти переміщень.

Індекси "+" і "–" вказують на граничні значення відповідних величин зліва і справа від контуру L.

II. Температурне поле

Подамо загальну стаціонарну температуру $T(x, y)$ в півпросторі з включенням у вигляді

$$T(x, y) = T_0(x, y) + T_*(x, y), \tag{4}$$

де $T_0(x, y)$ – температура в однорідному півпросторі; $T_*(x, y)$ – збурене температурне поле, зумовлене наявністю включення.

Температура $T_0(x, y)$ визначається із рівності [1]

*Автор-респондент

$$T_0\left(x,y\right)=-\frac{1}{\pi\lambda}\int\limits_{-c}^{c}Q\left(\xi\right)\cdot\ln\sqrt{\left(x-\xi\right)^2+y^2}d\xi+C,\quad(5)$$

де C – довільна стала.

Для знаходження температури $T\left(x,y\right)$ подамо її у вигляді $T\left(x,y\right)=Ref\left(z\right)$ (оскільки $T\left(x,y\right)$ – гармонічна функція), і скористаємося інтегральним зображенням комплексного потенціалу температури в формі [6].

$$F\left(z\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\frac{\mu\left(t\right)\mathrm{e}^{-i\Theta}}{\xi-z}dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\frac{\mu\left(t\right)\mathrm{e}^{i\Theta}}{\overline{\xi}-z}\overline{dt}+F_0\left(z\right),\quad(6)$$

де $\xi=t+z_1^0$, $\mathrm{e}^{i\Theta}=\dfrac{dt}{dS}$, Θ – кут між додатною дотичною до контуру L і віссю O_1x_1; $F_0\left(z\right)$– визначає температуру $T_0\left(x,y\right)$ згідно з залежністю

$$T_0\left(x,y\right)=\mathrm{Re}\,f_0\left(z\right),\quad f_0'\left(z\right)=F_0\left(z\right)=\frac{\partial T_0\left(x,y\right)}{\partial x}-i\frac{\partial T_0\left(x,y\right)}{\partial y}.\quad(7)$$

Тут і нижче штрихом позначена похідна, а рискою зверху – спряжена величина.

Задовольнивши за допомогою потенціалу (6) граничні умови (2), одержимо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) відносно невідомої функції $\mu\left(t\right)$

$$\mu\left(\tau\right)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\mathrm{Im}\left[K\left(t,\tau\right)\mu\left(t\right)dt\right]=-\Delta\cdot\mathrm{Im}\left[F_0\left(\eta\right)\mathrm{e}^{i\beta}\right],\quad\tau\in L.\quad(8)$$

Тут $K\left(t,\tau\right)=\dfrac{\Delta\cdot\mathrm{e}^{i(\beta-\Theta)}}{\xi-\eta}+\dfrac{\Delta\cdot\mathrm{e}^{i(\beta+\Theta)}}{\overline{\xi}-\eta}\cdot\dfrac{\overline{dt}}{dt}$,

$$\Delta=\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1+\lambda},\quad\eta=\tau+z_1^0,\quad\mathrm{e}^{i\beta}=\frac{d\tau}{ds},$$

$$F_0\left(\eta\right)=\left.\left(\frac{\partial T_0\left(x,y\right)}{\partial x}-i\frac{\partial T_0\left(x,y\right)}{\partial y}\right)\right|_{\substack{x=x_1-d\\ y=y_1-h}}.$$

Рівняння (8) має розв’язок для довільної правої частини. У випадку отвору для існування єдиного розв’язку до лівої частини рівняння (8) необхідно додати деякий нульовий функціонал [7].

III. Температурні напруження

Припустимо, що пружний півпростір з циліндричним включенням знаходиться під дією стаціонарного температурного поля $T\left(x,y\right)$. Комплексні потенціали напружень виберемо у формі [6]

$$\Phi\left(z\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\frac{g\left(t\right)dt}{\xi-z}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\left[\frac{g\left(t\right)dt}{z-\overline{\xi}}-\frac{\left(\xi-\overline{\xi}\right)\overline{g\left(t\right)dt}}{\left(\overline{\xi}-z\right)^2}\right],$$
$$\Psi\left(z\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\left[\frac{\overline{g\left(t\right)dt}}{\xi-z}-\frac{\overline{\xi}g\left(t\right)dt}{\left(\xi-z\right)^2}\right]+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\left\{\frac{\overline{\xi}g\left(t\right)dt}{\left(\overline{\xi}-z\right)^2}+\left[\frac{\left(\overline{\xi}-\xi\right)\left(\overline{\xi}+z\right)}{\left(\overline{\xi}-z\right)^3}-\frac{1}{\overline{\xi}-z}\right]\cdot\overline{g\left(t\right)dt}\right\}.\quad(9)$$

Задовольнивши за допомогою інтегрального зображення (9) граничні умови (3), одержимо СІР відносно невідомої функції $g\left(t\right)$.

$$A\cdot g\left(\tau\right)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l}\left[R\left(t,\tau\right)g\left(t\right)dt+S\left(t,\tau\right)\overline{g\left(t\right)dt}\right]=\mathrm{P}\left(\tau\right),\quad\tau\in L.\quad(10)$$

Тут $R\left(t,\tau\right)=R_1\left(t,\tau\right)+R_2\left(t,\tau\right)$, $S\left(t,\tau\right)=S_1\left(t,\tau\right)+S_2\left(t,\tau\right)$, $R_1\left(t,\tau\right)=\frac{B}{\xi-\eta}-\frac{D}{\overline{\xi}-\overline{\eta}}\cdot\frac{\overline{d\tau}}{d\tau}$,

$$R_2\left(t,\tau\right)=\left\{\frac{B}{\eta-\overline{\xi}}-D\cdot\frac{\overline{\xi}-\xi}{\left(\xi-\overline{\eta}\right)^2}+D\cdot\frac{\overline{d\tau}}{d\tau}\left[\frac{1}{\xi-\overline{\eta}}-\frac{2\eta\left(\overline{\xi}-\xi\right)-\left(\xi-\overline{\xi}\right)\left(\xi+\overline{\tau}\right)}{\left(\xi-\overline{\eta}\right)^3}\right]\right\},$$

$$S_1\left(t,\tau\right)=-D\cdot\left[\frac{1}{\overline{\xi}-\overline{\eta}}-\cdot\frac{\xi-\eta}{\left(\xi-\overline{\eta}\right)^2}\cdot\frac{\overline{d\tau}}{d\tau}\right],\quad S_2\left(t,\tau\right)=B\cdot\left[\frac{\xi-\overline{\xi}}{\left(\overline{\xi}-\eta\right)^2}-\frac{D}{\eta-\xi}-D\cdot\frac{\overline{d\tau}}{d\tau}\cdot\frac{\xi-\eta}{\left(\xi-\overline{\eta}\right)^2}\right],$$

$$A=i\cdot\frac{1+\chi_1+\Gamma\left(1+\chi\right)}{2},\quad B=\chi_1-\Gamma\chi,\quad D=1-\Gamma,\quad\Gamma=\frac{G_1}{G},\quad\chi=3-4\nu,\quad\chi_1=3-4\nu_1;$$

$$\mathrm{P}\left(\tau\right)=\Gamma\cdot\beta_tf^-\left(\eta\right)-\beta_t^1\cdot f^+\left(\eta\right),\quad f^{\pm}\left(\eta\right)\equiv\pm ir\left(\tau\right)+f\left(\eta\right),$$

$$r\left(\tau\right)=\int\mu\left(\tau\right)ds+C_1,\quad\beta_t=\alpha_t\cdot E,\beta_t^1=\alpha_t^1\cdot E_1;$$

$\alpha_t,\ E,\ \nu,\ G\left(\alpha_t^1, E_1, \nu_1, G_1\right)$ – відповідно коефіцієнт лінійного теплового розширення, модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву матриці (включення). При цьому вважається, що α_t і α_t^1 в напрямі твірних циліндричного включення рівні між собою. У загальному випадку коли така вимога не накладається, задача термопружності для кусково-однорідного циліндричного тіла складається з двох: плоскої і антиплоскої задач термопружності.

$f(\eta)$– пряме значення потенціалу $f(z)$, який на основі (6) можна записати у вигляді

$$f(z)=f_0(z)+\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{r(t)\,dt}{\xi - z}+\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{r(t)\,\overline{dt}}{\overline{\xi} - z}+C+iC_2, \quad (11)$$

де C – дійсна стала інтегрування, що визначається через відому температуру на безмежності, а сталі C_1 і C_2, які не впливають на температуру, вважатимемо такими, що дорівнюють нулю.

У випадку отвору ($G_1 = 0$) для існування єдиного розв'язку рівняння (10) необхідно до його лівої частини додати деякий нульовий фунціонал [7].

Нормальні і дотичні напруження в півпросторі з включенням знаходимо за формулами [6]

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2\mathrm{Re}\,\Phi(z) - x\cdot\mathrm{Re}\,\Phi'(z) - y\cdot\mathrm{Im}\,\Phi'(z) - \mathrm{Re}\,\Psi(z)\,,\\
\sigma_{yy} &= 2\mathrm{Re}\,\Phi(z) + x\cdot\mathrm{Re}\,\Phi'(z) + y\cdot\mathrm{Im}\,\Phi'(z) + \mathrm{Re}\,\Psi(z)\,,\\
\sigma_{xy} &= x\cdot\mathrm{Im}\,\Phi'(z) - y\cdot\mathrm{Re}\,\Phi'(z) + \mathrm{Im}\,\Psi(z)\,,
\end{aligned} \qquad (12)$$

IV. Алгоритм розв'язання задачі

Із рівняння (8), враховуючи (7), знаходимо функцію $\mu(t)$. Потім підставляємо $\mu(t)$ з врахуванням співвідношення (11) в праву частину рівняння (10) і розв'язуємо його відносно функції $g(t)$. Використовуючи розв'язок $g(t)$, за формулами (9), (12) визначаємо температурні напруження у всьому кусково-однорідному півпросторі.

Література

[1] Коровчинский М.В. Основы теории термического контакта при локальном трении // Вопросы трения и проблемы смазки. – М., 1968.

[2] Евтушенко А.А, Зеленяк В.М. Тепловая задача трения для полупространства с трещиной // ИФЖ. 1999. т. 72. № 1. – С. 164–169.

[3] S. Matysiak, A. Yevtushenko, V. Zelenjak. Frictional heating of a half-space with on edge crack // Мат. методи та фіз-мех. поля. 2000. Т. 43. № 2. – С. 127–134.

[4] S. Matysiak, A. Yevtushenko, V. Zelenjak. Frictional heating of a half-space with cracks. I. Single or periodic system of subsurface cracks // Tribology International. 1999. V. 32. № 5. – P. 237–243.

[5] С. Конечны, А. Евтушенко, В. Зеленяк. Фрикционный нагрев полупространства с краевыми трещинами // Трение и износ. 2001. Т. 22. № 1. – С. 39–45.

[6] Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка. 1981.

[7] Панасюк В.В., Саврук М.П. Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами // Успехи механики. 1984. Т. 7. № 2. – С. 60–65.

FRICTIONAL HEATING OF A HALF-SPACE WITH INCLUSION

S. Matysiak[a], V. Zeleniak[b, *], L. Libatskij[b]

[a] *Varshavsk'y University, Poland*
[b] *Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

Plane problems of steady-state heat conduction and thermoelastisity for a half-space which include an elliptical inclusion are reduced to two of singular integral equations on cloused contour (boundary of inclusion).

Keywords: heat conduction, thermoclastisity, integral equations, inclusion.

2000 MSC: 74F05

UDK: 539.3

*Corresponding author