ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 518, 2004, с. 37–50

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 518, 2004, p. 37–50

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНОГО КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НА СКІНЧЕННОМУ ПРОМІЖКУ

О. Махней

Прикарпатський університет імені Василя Стефаника,
м. Івано-Франківськ, вул.Шевченка, 57.

(Отримано 3 вересня 2002 р.)

Побудовано асимптотику при великих значеннях параметра лінійно незалежної системи розв'язків (і їхніх квазіпохідних) сингулярного квазідиференціального рівняння на скінченному проміжку. При дослідженні спочатку методом апроксимації гладкими функціями вивчено простішу задачу без мір, а потім отриману асимптотичну поведінку поширено на загальний випадок.

Ключові слова: квазідиференціальне рівняння, квазіпохідна, асимптотика розв'язків сингулярного квазідиференціального рівняння.

2000 MSC: 34A37

УДК: 517.955.8

Вступ

Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими коефіцієнтами, вивчені досить добре (див., наприклад, [1]). Останнім часом з'явилось досить багато результатів, які тою чи іншою мірою узагальнюють ці оператори. Зокрема, в працях [2, 3] узагальнення здійснюється в напрямку розгляду нестандартних крайових умов. У роботах київських математиків [4, 5] отримано цікаві результати для функціонально-диференціальних рівнянь вигляду $y^{(n)} + Fy + \rho^n y = 0$, де F – лінійний оператор, що діє з простору Гельдера $C^\gamma[0,1]$ в простір $L_1[0,1]$, причому $\gamma < n-1$. Роботи [6–8], як і ця стаття, спрямовані на пом'якшення вимог на коефіцієнти диференціальних виразів. Обширну бібліографію для диференціальних операторів з сингулярностями можна знайти в [9].

У задачах прикладного характеру часто зустрічаються диференціальні вирази, які містять доданки вигляду $\left(p(x)y^{(m)}\right)^{(n)}$. При недостатній гладкості коефіцієнта $p(x)$ такі вирази неможливо за допомогою операції n-кратного диференціювання звести до звичайних диференціальних. Щоб підкреслити цю обставину, їх в літературі прийнято називати квазідиференціальними. Одним зі способів їх дослідження є метод введення квазіпохідних – компонент вектора, за допомогою якого здійснюється зведення квазідиференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Мабуть першим, хто ввів поняття квазіпохідних, яке дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів в квазідиференціальних виразах, був Д. Шин [10]. Однак він і його послідовники вивчали переважно квазідиференціальні вирази з неперервними або, принаймні, сумовними за Лебегом коефіцієнтами. Зокрема в роботі [6] отримано асимптотику фундаментальної системи розв'язків квазідиференціального рівняння з сумовними і абсолютно неперервними коефіцієнтами.

Ця стаття присвячена побудові асимптотики при великих значеннях параметра розв'язків (і їхніх квазіпохідних) квазідиференціального рівняння з розривними чи навіть узагальненими функціями $p(x)$, що узагальнює результати [1, 6]. У частковому випадку цю задачу розглянуто в [11]. За допомогою цих розв'язків можна отримати асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій відповідної крайової задачі, що буде запропоновано в наступних публікаціях. Важливе значення в цій роботі має апроксимація деяких коефіцієнтів гладкими функціями.

I. Постановка задачі

Розглянемо квазідиференціальний вираз

$$L_{mn}(y) \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}y^{(n-i)}\right)^{(m-j)},$$

де m, n – натуральні числа, $a_{00}^{-1}(x)$ – обмежена, вимірна, дійснозначна, $a_{00}(x)$ тримає знак на $[a,b]$, $a_{i0}(x), a_{0j}(x)! \in L_2[a,b]$, $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$, $b_{ij}(x) \in BV^+[a,b]$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ (тут $BV^+[a,b]$ – простір неперервних справа функцій обмеженої на $[a,b]$ варіації, а знак "$'$" означає узагальнене диференціювання). Отже, a_{ij} – міри (див. [12]), тобто узагальнені функції нульового порядку. Крім того, $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$ $\forall i,j$ вважатимемо комплекснозначними функціями дійсної змінної, визначеними на $[a,b]$.

Квазіпохідними функціями $y(x)$, що відповідають квазідиференціальному виразу $L_{mn}(y)$, будемо називати функції $y^{[k]}(x)$, $k=\overline{0,n+m}$, які визначаються формулами

$$\begin{cases} y^{[k]}=y^{(k)}, \ \ k=\overline{0,n-1}; \ \ y^{[n]}=\sum\limits_{i=0}^{n}a_{i0}y^{(n-i)}; \\ y^{[n+k]}=-\left(y^{[n+k-1]}\right)'+\sum\limits_{i=0}^{n}a_{ik}y^{(n-i)}, \ \ k=\overline{1,m}. \end{cases}$$

Поставимо тепер таку початкову задачу:

$$L_{mn}(y)=\lambda\sigma(x)y, \tag{1}$$

$$y^{[\nu-1]}(a)=\tilde{c}_{\nu}, \quad \nu=\overline{1,n+m}, \tag{2}$$

де $\sigma(x)\in L_2[a,b]$, $\sigma^{-1}(x)$ – обмежена, дійснозначна і тримає знак на $[a,b]$, λ – комплексний параметр. Нехай $r=n+m$. За допомогою вектора $Y=\operatorname{colon}\left(y,y^{[1]},...,y^{[r-1]}\right)$ рівняння (1) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y'=C'(x)Y, \tag{3}$$

а рівняння (2) набуває вигляду

$$Y(a)=\tilde{C},$$

де $\tilde{C}=\operatorname{colon}\left(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,...,\tilde{c}_r\right)$, а матриця-міра

$$C'(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{00}^{-1}a_{n0} & -a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & -a_{00}^{-1}a_{10} & a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{n1} & A_{n-1,1} & \cdots & A_{11} & a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{n,m-1} & A_{n-1,m-1} & \cdots & A_{1,m-1} & a_{0,m-1}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & -1 \\ A_{nm}-\lambda\sigma & A_{n-1,m} & \cdots & A_{1m} & a_{0m}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де $A_{ij}=a_{ij}-a_{0j}a_{00}^{-1}a_{i0}$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m})$. Очевидно, що

$$\Delta C(x)=C(x)-C(x-0)=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta b_{n1} & \cdots & \Delta b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta b_{nm} & \cdots & \Delta b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді внаслідок рівності $[\Delta C(x)]^2\equiv 0$, система (3) – коректна [13].

Під розв'язком рівняння (1) будемо розуміти першу координату вектора Y системи (3), що задовольняє його в сенсі теорії узагальнених функцій

$$(L_{mn}(y),\varphi)=(\lambda\sigma y,\varphi),$$

де $\varphi(x)$ – довільна неперервна фінітна функція на $[a,b]$.

За допомогою аналізу системи (3) можна довести [14], що розв'язок початкової задачі (1), (2) існує і єдиний в класі абсолютно неперервних на $[a,b]$ функцій, його квазіпохідні до $(n-1)$-го порядку теж є абсолютно неперервними на $[a,b]$ функціями, а решта квазіпохідних до порядку $r-1$ включно мають обмежену на $[a,b]$ варіацію і неперервні там справа. Аналогічно, існує єдиний розв'язок спряженого до (1) рівняння

$$L_{mn}^{*}(y)\equiv\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\Big(\bar{a}_{ij}y^{(m-j)}\Big)^{(n-i)}=\bar{\lambda}\sigma(x)y, \tag{4}$$

з початковими умовами $y^{\{\nu\}}(a)=\tilde{d}_{\nu}$, $\nu=\overline{0,r-1}$, який разом зі своїми квазіпохідними до $(m-1)$-го порядку є абсолютно неперервним, а решта його квазіпохідних до порядку $r-1$ включно є неперервними справа функціями обмеженої на $[a,b]$ варіації. Тут фігурні дужки визначають квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння (4), вони визначаються однозначно при відомих квазіпохідних у сенсі вихідного рівняння.

Векторне рівняння (3) можна подати у вигляді

$$Y'=M'Y+N'Y,$$

де

$$M'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{00}^{-1}a_{n0} & -a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & -a_{00}^{-1}a_{10} & a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{01}a_{00}^{-1}a_{n0} & -a_{01}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & -a_{01}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ -a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{n0} & -a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & -a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{0,m-1}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & -1 \\ -a_{0m}a_{00}^{-1}a_{n0} - \lambda\sigma & -a_{0m}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & -a_{0m}a_{00}^{-1}a_{10} & a_{0m}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$N'(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nm} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

тоді система

$$Y' = M'Y \tag{5}$$

буде еквівалентною до рівняння

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^m\left(a_{i0}y^{(n-i)}\right)^{(m)} + \sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{0j}y^{(n)}\right)^{(m-j)} = \lambda\sigma y. \tag{6}$$

II. Апроксимація гладкими функціями рівняння без мір

Введемо позначення $d_{00}(x) = a_{00}^{-1}(x)$, $d_{i0}(x) = -a_{00}^{-1}(x)a_{i0}(x)$, $d_{0j}(x) = a_{0j}(x)a_{00}^{-1}(x)$, $d_{ij}(x) = -a_{0j}(x)a_{00}^{-1}(x)a_{i0}(x)$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},\ i + j < r)$, $d_{nm}(x) = -a_{0m}(x)a_{00}^{-1}(x)a_{n0}(x) - \lambda\sigma(x)$. Нехай матриця

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & x-\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & x-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I_{n0} & I_{n-1,0} & \cdots & I_{10} & I_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ I_{n1} & I_{n-1,1} & \cdots & I_{11} & I_{01} & \alpha - x & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ I_{n,m-1} & I_{n-1,m-1} & \cdots & I_{1,m-1} & I_{0,m-1} & 0 & \cdots & \alpha - x \\ I_{nm} & I_{n-1,m} & \cdots & I_{1m} & I_{0m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}(x) & \cdots & m_{1r}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{r1}(x) & \cdots & m_{rr}(x) \end{pmatrix},$$

де $I_{ij} = \int\limits_{\alpha}^{x} d_{ij}(t)dt$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$. Довизначимо $m_{ij}(x) \equiv m_{ij}(b)$ при $x > b$ $(i,j = \overline{1,r})$. Нехай

$$m_{ijk}(x) = k^{r+1}\int\limits_{x}^{x+\frac{1}{k}}\int\limits_{s_{r+1}}^{s_{r+1}+\frac{1}{k}}\ldots\int\limits_{s_2}^{s_2+\frac{1}{k}} m_{ij}(s_1)ds_1\ldots ds_r ds_{r+1} \in C^{r+1}[a,b], \quad i,j = \overline{1,r}, \quad k = 1,2,\ldots;$$

$$M_k(x) = \left(m_{ijk}(x)\right)_{i,j=1}^{r}.$$

Неважко переконатись за допомогою математичної індукції по r, що $m_{ijk}(x) \to m_{ij}(x)$ поточково при $k \to \infty$ $(i,j = \overline{1,r})$. Для цього можна скористатись правилом Лопіталя, прийнявши $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$. Внаслідок твердження Д 2.3 [15, с.397]

$$V_a^b m_{ijk} \le V_a^b m_{ij}.$$

Отже, $\overline{\lim_{k\to\infty}} \overset{b}{\underset{a}{V}} m_{ijk} \le \overset{b}{\underset{a}{V}} m_{ij}$, звідки, врахувавши збіжність $m_{ijk}(x) \underset{k\to\infty}{\to} m_{ij}(x)$, отримаємо, що $\overset{b}{\underset{a}{V}} m_{ijk} \underset{k\to\infty}{\to} \overset{b}{\underset{a}{V}} m_{ij}$ $(i,j=\overline{1,r})$.

З властивостей елементів матриць $M_k(x)$ $(M_k(x) \to M(x), \overset{b}{\underset{a}{V}} m_{ijk} \underset{k\to\infty}{\to} \overset{b}{\underset{a}{V}} m_{ij},\ i,j=\overline{1,r})$ випливає [16], що $Y_k(x) \to Y(x)$ поточково при $k\to\infty$, де $Y_k(x)$ – розв'язок системи

$$Y_k' = M_k' Y_k, \tag{7}$$

а $Y(x)$ – розв'язок системи (5).

Введемо тепер позначення $d_{ijk}(x) = m'_{n+j,n+1-i,k}(x)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$. Виявляється, що $d_{ijk}(x) \to d_{ij}(x)$ при $k\to\infty$ поточково на $[a,b]$ $(i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m})$, що легко доводиться методом математичної індукції по r з використанням правила Лопіталя і позначення $\varepsilon = \frac{1}{k}$.

Нехай тепер $a_{00k}(x) = d_{00k}^{-1}(x)$, $a_{i0k}(x) = -\frac{d_{i0k}(x)}{d_{00k}(x)}$, $a_{0jk}(x) = \frac{d_{0jk}(x)}{d_{00k}(x)}$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m})$, $\sigma_k(x) = -\frac{1}{\lambda}\left[d_{nmk}(x) + a_{0mk}(x)d_{00k}(x)a_{n0k}(x)\right]$, $k=1,2,\ldots$. Тоді за властивостями границі $a_{00k}(x)\to a_{00}(x)$, $a_{i0k}(x)\to a_{i0}(x)$, $a_{0jk}(x)\to a_{0j}(x)$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m})$, $\sigma_k(x)\to\sigma(x)$ при $k\to\infty$ поточково.

III. Рівняння з гладкими коефіцієнтами

Система (7) відповідає квазідиференціальному рівнянню

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^m \left(a_{i0k} y_k^{(n-i)}\right)^{(m)} + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j}\left(a_{0jk} y_k^{(n)}\right)^{(m-j)} = \lambda \sigma_k y_k. \tag{8}$$

Внаслідок гладкості функцій a_{i0k} і a_{0jk} останнє рівняння можна записати так:

$$\sum_{j=0}^{r} g_{jk}(x) y_k^{(r-j)} = \lambda \sigma_k(x) y_k, \tag{9}$$

де $g_{0k}(x) = (-1)^m a_{00k}(x) \in C^r[a,b]$, $g_{1k}(x) = (-1)^m\left[a_{10k}(x) - a_{01k}(x) + m a'_{00k}(x)\right] \in C^{r-1}[a,b]$, $g_{jk}(x)$ $(j=\overline{2,r})$ є принаймні неперервними, а $\sigma_k(x)\in C^r[a,b]$. Поділивши (9) на $(-1)^m a_{00k}(x)$, ми отримаємо

$$y_k^{(r)} + \tilde g_{1k}(x) y_k^{(r-1)} + \tilde g_{2k}(x) y_k^{(r-2)} + \ldots + \tilde g_{kr}(x) y_k = (-1)^m \lambda \frac{\sigma_k(x)}{a_{00k}(x)} y_k, \tag{10}$$

де $\tilde g_{1k}(x) = \frac{a_{10k}(x)}{a_{00k}(x)} - \frac{a_{01k}(x)}{a_{00k}(x)} + m\frac{a'_{00k}(x)}{a_{00k}(x)}$. З того, що $a_{00}(x)>0$ (<0) на $[a,b]$, $\sigma(x)>0$ (<0) на $[a,b]$ випливає, що $a_{00k}(x)>0$ (<0), $\sigma_k(x)>0$ (<0) на $[a,b]$.

За допомогою заміни [1]

$$t_k = \frac{1}{h_k}\int_a^x \sqrt[r]{\left|\frac{\sigma_k(\xi)}{a_{00k}(\xi)}\right|}d\xi, \quad h_k = \int_a^b \sqrt[r]{\left|\frac{\sigma_k(\xi)}{a_{00k}(\xi)}\right|}d\xi$$

рівняння (10) зводиться до вигляду

$$\begin{gathered}[\hat y_k^{(r)}(t_k) + \gamma_{1k}(t_k)\hat y_k^{(r-1)}(t_k) + \gamma_{2k}(t_k)\hat y_k^{(r-2)}(t_k) + \ldots + \gamma_{rk}(t_k)\hat y_k(t_k) + \\ +(-1)^{m+1}\operatorname{sgn}(a_{00k}\sigma_k)\lambda h_k^r \hat y_k(t_k) = 0,\end{gathered} \tag{11}$$

де $\hat y(t_k) = y(x(t_k))$,

$$\gamma_{1k}(t_k) = \frac{r-1}{2} h_k \left(\left|\frac{\sigma_k(x(t_k))}{a_{00k}(x(t_k))}\right|\right)'_x \sqrt[r]{\left|\frac{a_{00k}(x(t_k))}{\sigma_k(x(t_k))}\right|}\left|\frac{a_{00k}(x(t_k))}{\sigma_k(x(t_k))}\right| + h_k \tilde g_{1k}(x(t_k)) \sqrt[r]{\left|\frac{a_{00k}(x(t_k))}{\sigma_k(x(t_k))}\right|},$$

$\gamma_{1k}(t_k)\in C^{r-1}[0,1]$, $\quad \gamma_{jk}(t_k)(j=\overline{2,r})$ є принаймні неперервними. У цьому випадку заміна

$$\hat y_k(t_k) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{r}\int_0^{t_k}\gamma_{1k}(\xi)d\xi}\tilde y_k(t_k)$$

зводить рівняння (11) до вигляду

$$\tilde{y}_k^{(r)}(t_k) + \tilde{\gamma}_{2k}(t_k)\tilde{y}_k^{(r-2)}(t_k) + \tilde{\gamma}_{3k}(t_k)\tilde{y}_k^{(r-3)}(t_k) + \ldots + \\ +(-1)^{m+1}\operatorname{sgn}(a_{00k}(x(t_k))\sigma_k(x(t_k)))\lambda h_k^r \tilde{y}_k(t_k) = 0, \tag{12}$$

$\tilde{\gamma}_{jk}(t_k)$ є принаймні неперервними ($j = \overline{2, r}$).

Введемо тепер для спрощення викладення заміни

$$\lambda = (-1)^{m+1}\operatorname{sgn}(a_{00k}\sigma_k)\rho_k^r h_k^{-r} = (-1)^{m+1}\operatorname{sgn}(a_{00k}\sigma_k)\rho_k^r \left(\int_a^b \sqrt[r]{\left|\frac{\sigma_k(\xi)}{a_{00k}(\xi)}\right|}d\xi\right)^{-r}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тоді (12) запишеться у вигляді

$$\tilde{y}_k^{(r)} + \tilde{\gamma}_{2k}(t_k)\tilde{y}_k^{(r-2)} + \tilde{\gamma}_{3k}(t_k)\tilde{y}_k^{(r-3)} + \ldots + \rho_k^r \tilde{y}_k = 0. \tag{13}$$

Розіб'ємо кожну комплексну ρ_k-площину ($k = 1, 2, ...$) на $2r$ секторів S_ν, $\nu = \overline{0, 2r-1}$, де $S_\nu = \{\rho_k : \nu\pi/r \leq \leq \arg\rho_k \leq (\nu+1)\pi/r\}$. Через T_ν позначимо сектор (з вершиною в точці $\rho_k = -c$), що утворюється з S_ν за допомогою зсуву $\rho_k \to \rho_k + c$. Області S_ν і T_ν називатимемо просто областями S і T.

Згідно з [1], рівняння (13) у всій області T комплексної ρ_k-площини має r лінійно незалежних розв'язків $\tilde{y}_{1k}(t_k)$, $\tilde{y}_{2k}(t_k)$, $\ldots$, $\tilde{y}_{rk}(t_k)$, регулярних відносно $\rho_k \in T$ при досить великому $|\rho_k|$ і таких, що задовольняють співвідношення

$$\tilde{y}_{sk}(t_k, \rho_k) = \rho_k^\nu e^{\rho_k \omega_s t_k}\left[\omega_s^\nu + O\left(\frac{1}{\rho_k}\right)\right], \quad \nu = \overline{0, r-1}, \quad s = \overline{1, r}, \quad k = 1, 2, ...$$

Отже, рівняння (9) має r лінійно незалежних розв'язків, для яких є справедливими асимптотичні формули при великих $|\rho_k|$,

$$y_{sk}^{(\nu)}(x, \rho_k) = \rho_k^\nu e^{\rho_k\omega_s t_k(x)}\left(\frac{1}{h_k}\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma_k(x)}{a_{00k}(x)}\right|}\right)^\nu E_{1k}(x)\left[\omega_s^\nu + O\left(\frac{1}{\rho_k}\right)\right], \ \nu = \overline{0, r-1}, \ s = \overline{1, r}, \ k = 1, 2, ..., \tag{14}$$

де, оскільки $x = a$ при $t_k = 0$ і $x = x(t_k)$ при $t_k = t_k(x)$,

$$E_{1k}(x) = \exp\{-\frac{1}{r}\int_0^{t_k(x)}\gamma_{1k}(\xi)d\xi\} = \exp\left\{-\frac{1}{r}\int_a^x\left\{\frac{r-1}{2}h_k\left(\left|\frac{\sigma_k(\zeta)}{a_{00k}(\zeta)}\right|\right)'_\zeta \sqrt[r]{\left|\frac{a_{00k}(\zeta)}{\sigma_k(\zeta)}\right|}\left|\frac{a_{00k}(\zeta)}{\sigma_k(\zeta)}\right| + \right.\right.$$

$$\left.\left. +h_k\left[\frac{a_{10k}(\zeta)}{a_{00k}(\zeta)} - \frac{a_{01k}(\zeta)}{a_{00k}(\zeta)} + m\frac{a'_{00k}(\zeta)}{a_{00k}(\zeta)}\right]\sqrt[r]{\left|\frac{a_{00k}(\zeta)}{\sigma_k(\zeta)}\right|}\right\}\frac{1}{h_k}\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma_k(\zeta)}{a_{00k}(\zeta)}\right|}d\zeta\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{r-1}{2r}\int_a^x\left|\frac{a_{00k}(\zeta)}{\sigma_k(\zeta)}\right|\left(\left|\frac{\sigma_k(\zeta)}{a_{00k}(\zeta)}\right|\right)'_\zeta d\zeta - \frac{1}{r}\int_a^x\frac{a_{10k}(\zeta) - a_{01k}(\zeta)}{a_{00k}(\zeta)}d\zeta - \frac{m}{r}\int_a^x\frac{a'_{00k}(\zeta)}{a_{00k}(\zeta)}d\zeta\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{r-1}{2r}\left(\ln\left|\frac{\sigma_k(x)}{a_{00k}(x)}\right| - \ln\left|\frac{\sigma_k(a)}{a_{00k}(a)}\right|\right) - \frac{1}{r}\int_a^x\frac{a_{10k}(\zeta) - a_{01k}(\zeta)}{a_{00k}(\zeta)}d\zeta - \right.$$

$$\left. -\frac{m}{r}\left(\ln|a_{00k}(x)| - \ln|a_{00k}(a)|\right)\right\} = \left(\frac{\sigma_k(x)a_{00k}(a)}{a_{00k}(x)\sigma_k(a)}\right)^{-\frac{r-1}{2r}}\left(\frac{a_{00k}(x)}{a_{00k}(a)}\right)^{-\frac{m}{r}} e^{-\frac{1}{r}\int_a^x\frac{a_{10k}(\zeta) - a_{01k}(\zeta)}{a_{00k}(\zeta)}d\zeta}.$$

Зі структури матриці $M_k(x)$ і системи (7) можна визначити квазіпохідні в сенсі рівняння (8)

$$\begin{cases} y_k^{[l]} = y_k^{(l)}, \ \ l = \overline{0, n-1}; \ \ y_k^{[n]} = \sum\limits_{i=0}^n a_{i0k}y_k^{(n-i)}; \\ y_k^{[n+l]} = -\left(y_k^{[n+l-1]}\right)' + a_{0lk}y_k^{(n)}, \ \ l = \overline{1, m-1}, \ \ k = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{15}$$

На підставі формул (14), (15) зрозумілою є асимптотична поведінка при великих $|\rho_k|$, $\rho_k \in T$, квазіпохідних, відповідних розв'язкам $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{rk}$,

$$y_{sk}^{[\nu]}(x,\rho_k) = \rho_k^\nu \mathrm{e}^{\rho_k\omega_s \frac{1}{h_k}\int_a^x \sqrt[r]{\left|\frac{\sigma_k(\xi)}{a_{00k}(\xi)}\right|}d\xi} \left(\frac{1}{h_k}\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma_k(x)}{a_{00k}(x)}\right|}\right)^\nu E_{1k}(x)\left[\omega_s^\nu + O\left(\frac{1}{\rho_k}\right)\right], \quad \nu=\overline{0,n-1},$$

$$y_{sk}^{[\nu]}(x,\rho_k) = (-1)^{\nu-n}a_{00k}(x)\rho_k^\nu \mathrm{e}^{\rho_k\omega_s \frac{1}{h_k}\int_a^x \sqrt[r]{\left|\frac{\sigma_k(\xi)}{a_{00k}(\xi)}\right|}d\xi} \left(\frac{1}{h_k}\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma_k(x)}{a_{00k}(x)}\right|}\right)^\nu E_{1k}(x)\left[\omega_s^\nu + O\left(\frac{1}{\rho_k}\right)\right], \quad \nu=\overline{n,r-1},$$

$$s=\overline{1,r}, \quad k=1,2,\ldots.$$

IV. Асимтотика розв'язків рівняння без мір

Врахувавши, що $\sigma_k(x)\to\sigma(x)$, $a_{00k}(x)\to a_{00}(x)$ $(k\to\infty)$, властивості границь і теорему Лебега, отримаємо $\rho_k\to\rho$ $(k\to\infty)$, де ρ визначається співвідношенням

$$\lambda = (-1)^{m+1}\mathrm{sgn}(a_{00}\sigma)\rho^r\left(\int_a^b \sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}d\xi\right)^{-r}. \tag{16}$$

Комплексна ρ-площина розбивається на такі ж сектори S_ν, T_ν. Внаслідок $Y_k(x)\to Y(x)$, а також $\sigma_k(x)\to$ $\to\sigma(x)$, $a_{ijk}(x)\to a_{ij}(x)$ при $k\to\infty$, у всій області T комплексної ρ-площини існує r розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_r$ рівняння (6), таких, що при досить великому $|\rho|$ задовольняють співвідношення $(s=\overline{1,r})$

$$\begin{cases} y_s^{[\nu]}(x,\rho) = \rho^\nu \mathrm{e}^{\rho\omega_s t(x)}\left(\frac{1}{h}\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^\nu E_1(x)\left[\omega_s^\nu + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \ \ \nu=\overline{0,n-1}, \\ y_s^{[n+\nu]}(x,\rho) = (-1)^\nu\rho^{n+\nu}\mathrm{e}^{\rho\omega_s t(x)}\left(\frac{1}{h}\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{n+\nu} a_{00}(x)E_1(x)\left[\omega_s^{n+\nu} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \ \ \nu=\overline{0,m-1}, \end{cases} \tag{17}$$

де

$$t(x) = \frac{1}{h}\int_a^x \sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}d\xi, \quad h=\int_a^b \sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}dx,$$

$$E_1(x) = \left(\frac{\sigma(x)a_{00}(a)}{a_{00}(x)\sigma(a)}\right)^{-\frac{r-1}{2r}}\left(\frac{a_{00}(x)}{a_{00}(a)}\right)^{-\frac{m}{r}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{r}\int_a^x \frac{a_{10}(\zeta)-a_{01}(\zeta)}{a_{00}(\zeta)}d\zeta}.$$

Хоча асимптотичні формули (17) мають розриви в точках втрати неперервності функціями $a_{00}(x)$ і $\sigma(x)$, при великих $|\rho|$ вони наближають неперервні функції $y_s^{[\nu]}(x)$ скрізь на $[a,b]$, крім цих точок розриву. З самих формул (17) випливає лінійна незалежність розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Ці розв'язки будуть регулярними як розв'язки початкової задачі (6), (2) внаслідок [17].

V. Оцінка квазіпохідних функції Коші

Нехай $K(x,z)$ – функція Коші рівняння (6), тобто вона за першою змінною задовольняє це рівняння, $K^{[i]}(z,z)=0$ $(i=\overline{0,r-2})$, $K^{[r-1]}(z,z)=1$. Квадратні дужки тут позначають квазіпохідні в сенсі рівняння (6) за першою змінною. За допомогою фігурних дужок ми позначатимемо квазіпохідні в сенсі спряженого до (6) рівняння, їх можна відчитати з відповідної йому спряженої системи $Z' = -(M^*)' Z$. Відомо [14], що

$$\begin{cases} z^{\{k\}} = z^{(k)}, \ \ k=\overline{0,m-1}; \ \ z^{\{m\}} = -\sum_{j=0}^m \bar{a}_{0j}z^{(m-j)}; \\ z^{\{m+k\}} = -\left(z^{\{m+k-1\}}\right)' - \bar{a}_{k0}z^{(m)}, \ \ k=\overline{1,n-1} \end{cases} \tag{18}$$

(тут риски над a_{ij} означають комплексне спряження). Від функції Коші квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння братимуться за другою змінною.

Лемма 1. *Функцію Коші рівняння (6) і її квазіпохідні можна подати у вигляді [18]*

$$K^{[i]\{j\}}(x,z)=\frac{1}{W(z)}\begin{vmatrix} y_1(z) & \cdots & y_r(z)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{[r-j-2]}(z) & \cdots & y_r^{[r-j-2]}(z)\\ y_1^{[i]}(x) & \cdots & y_r^{[i]}(x)\\ y_1^{[r-j]}(z) & \cdots & y_r^{[r-j]}(z)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{[r-1]} & \cdots & y_r^{[r-1]}(z)\end{vmatrix},\quad i,j=\overline{0,r-1}, \tag{19}$$

де

$$W(z)=\begin{vmatrix} y_1(z) & \cdots & y_r(z)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{[r-1]}(z) & \cdots & y_r^{[r-1]}(z)\end{vmatrix}, \tag{20}$$

а $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_r$ – лінійно незалежна система розв'язків рівняння (6).

☐ *Доведення.* Нехай $R(x)=\left(y_q^{[p-1]}(x)\right)_{p,q=1}^{r}$ – інтегральна матриця рівняння (6). Тоді $B(x,z)=$ $=R(x)R^{-1}(z)$ – еволюційний оператор, який має структуру [19]

$$B(x,\xi)=\begin{pmatrix} K^{\{r-1\}}(x,\xi) & \cdots & K^{\{1\}}(x,\xi) & K(x,\xi)\\ K^{[1]\{r-1\}}(x,\xi) & \cdots & K^{[1]\{1\}}(x,\xi) & K^{[1]}(x,\xi)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K^{[r-1]\{r-1\}}(x,\xi) & \cdots & K^{[r-1]\{1\}}(x,\xi) & K^{[r-1]}(x,\xi)\end{pmatrix}, \tag{21}$$

де $K(x,\xi)$ – функція Коші рівняння (6). Ми можемо записати (21) у вигляді

$$\begin{pmatrix} K^{\{r-1\}}(x,z) & \cdots & K(x,z)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ K^{[r-1]\{r-1\}}(x,z) & \cdots & K^{[r-1]}(x,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_r(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{[r-1]}(x) & \cdots & y_r^{[r-1]}(x)\end{pmatrix}\frac{1}{W(z)}\begin{pmatrix} A_{11}(z) & \cdots & A_{r1}(z)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1r}(z) & \cdots & A_{rr}(z)\end{pmatrix},$$

де $A_{ij}(z)$ – алгебраїчне доповнення до елемента $y_j^{[i-1]}(z)$ у визначнику $W(z)$. На підставі останньої рівності ми маємо

$$K^{[i]\{j\}}(x,z)=\frac{1}{W(z)}\sum_{k=1}^{r}y_k^{[i]}(x)A_{r-j,k}(z),$$

а, отже, і (19). Лема доведена. ■

Нехай лінійно незалежною системою розв'язків рівняння (6) в (19), (20) використовується та фундаментальна система розв'язків, асимптотична поведінка якої при великих значеннях параметра $|\rho|$ подається формулами (17). Підставивши (17) в (19), (20) і скоротивши на $\mathrm{e}^{\rho\omega_1 t(z)}$, $\mathrm{e}^{\rho\omega_2 t(z)}$, $\ldots$, $\mathrm{e}^{\rho\omega_r t(z)}$, $\rho^{\nu}\left(\frac{1}{h}\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(z)}{a_{00}(z)}\right|}\right)^{\nu}E_1(z)$ ($\nu=\overline{0,n-1}$, $v\neq r-j-1$), а також на $(-1)^{\nu}\rho^{n+\nu}\left(\frac{1}{h}\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(z)}{a_{00}(z)}\right|}\right)^{n+\nu}a_{00}(z)E_1(z)$ ($\nu=\overline{0,m-1}$, $v\neq r-j-1$), отримаємо

$$K^{[i]\{j\}}(x,z)=\rho^{i+j+1-r}\sum_{k=1}^{r}\mathrm{e}^{\rho\omega_k(t(x)-t(z))}Q_{ij}(x,z)(-1)^{r-j+k}\frac{\alpha_{kj}}{\alpha}[\omega_k^i]_x,$$

де

$$Q_{ij}(x,z)=\begin{cases}\tilde{Q}_{ij}(x,z), & i<n,\ \ r-j-1<n;\\ (-1)^{i-n}a_{00}(x)\tilde{Q}_{ij}(x,z), & i\geq n,\ \ r-j-1<n;\\ (-1)^{r-j-1-n}a_{00}^{-1}(z)\tilde{Q}_{ij}(x,z), & i<n,\ \ r-j-1\geq n;\\ (-1)^{r-j-1+i-2n}a_{00}(x)a_{00}^{-1}(z)\tilde{Q}_{ij}(x,z), & i\geq n,\ \ r-j-1\geq n;\end{cases}$$

$$\tilde{Q}_{ij}(x,z)=h^{r-j-1-i}\left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{i}\left(\left|\frac{a_{00}(z)}{\sigma(z)}\right|\right)^{r-j-1}\frac{E_1(x)}{E_1(z)},$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} [1]_z & \dots & [1]_z \\ \dots & \dots & \dots \\ [\omega_1^{r-1}]_z & \dots & [\omega_r^{r-1}]_z \end{vmatrix}, \quad \alpha_{kj} = \begin{vmatrix} [1]_z & \dots & [1]_z & [1]_z & \dots & [1]_z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\omega_1^{r-j-2}]_z & \dots & [\omega_{k-1}^{r-j-2}]_z & [\omega_{k+1}^{r-j-2}]_z & \dots & [\omega_r^{r-j-2}]_z \\ [\omega_1^{r-j}]_z & \dots & [\omega_{k-1}^{r-j}]_z & [\omega_{k+1}^{r-j}]_z & \dots & [\omega_r^{r-j}]_z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\omega_1^{r-1}]_z & \dots & [\omega_{k-1}^{r-1}]_z & [\omega_{k+1}^{r-1}]_z & \dots & [\omega_r^{r-1}]_z \end{vmatrix},$$

$[a] = a + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$, причому для достатньо великих $|\rho|$ $\exists N > 0$ таке, що $[a]_z = a + \frac{f_1(z,\rho)}{\rho}$, $[a]_x = a + \frac{f_2(x,\rho)}{\rho}$, $[a]_{x,z} = a + \frac{f_3(x,z,\rho)}{\rho}$, а $f_1(z,\rho) \le N$, $f_2(x,\rho) \le N$, $f_3(x,z,\rho) \le N$.

Зрозуміло, що $\alpha = \prod\limits_{1 \le q < p \le r} (\omega_p - \omega_q)[1]_z$ як визначник Вандермонда, можна переконатись, що $\alpha_{kj} = M_{kj} \prod\limits_{\substack{1 \le q < p \le r \\ p \ne k,\ q \ne k}} (\omega_p - \omega_q)[1]_z$, причому M_{kj} ($j = \overline{0, r-1}$, $k = \overline{1, r}$) – скінченне, відмінне від нуля комплексне число, зокрема $M_{k0} = 1$. Тоді

$$K^{[i]\{j\}}(x,z) = \rho^{i+j+1-r} Q_{ij}(x,z) \sum_{k=1}^{r} \frac{M_{kj}(-1)^{r-j+k} e^{\rho\omega_k(t(x)-t(z))}[\omega_k^i]_x[\omega_k]_z}{(\omega_k - \omega_1)\dots(\omega_k - \omega_{k-1})(\omega_{k+1} - \omega_k)\dots(\omega_r - \omega_k)[\omega_k]_z}.$$

Врахувавши, що для функції Коші $K^{[r-1]}(z,z) = 1$, $Q_{r-1,0}(z,z) = 1$, а $\omega_k^r = -1$, припустимо, що

$$\frac{[1]_{x,z}}{(\omega_k - \omega_1)\dots(\omega_k - \omega_{k-1})(\omega_k - \omega_{k+1})\dots(\omega_k - \omega_r)[\omega_k]_z} = -\frac{1}{r}, \tag{22}$$

що не суперечить іншим властивостям функції Коші: $K^{[i]}(z,z) = 0$, $i = \overline{0, r-2}$, бо $\sum\limits_{k=1}^{r} \omega_k^{i+1} = 0$. (Якби права частина (22) залежала від k, ця властивість не виконувалась би). Отже, врахувавши єдиність функції Коші,

$$K^{[i]\{j\}}(x,z) = (-1)^{j+1} \frac{Q_{ij}(x,z)}{r\rho^{r-1-i-j}} \sum_{k=1}^{r} M_{kj} e^{\rho\omega_k(t(x)-t(z))}[\omega_k^{i+1}]_{x,z}, \quad i,j = \overline{0, r-1}. \tag{23}$$

VI. Перехід до рівняння з мірами

Якщо праву частину рівності

$$Y' - M'Y = N'Y$$

розглядати як "неоднорідність", то за формулою Коші для неоднорідного рівняння [14]

$$Y(x) = B(x,a)Y(a) + \int_a^x B(x,\xi)\,dN(\xi)Y(\xi), \tag{24}$$

де $B(x,\xi)$ – фундаментальна матриця "однорідної" системи $Y' = M'Y$. Використавши (21), можемо розписати (24) у вигляді

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ \dots \\ y^{[r-1]}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{s=1}^{r} \tilde{c}_s K^{\{r-s\}}(x,a) \\ \dots \\ \sum\limits_{s=1}^{r} \tilde{c}_s K^{[r-1]\{r-s\}}(x,a) \end{pmatrix} + \int_a^x \begin{pmatrix} K^{\{r-1\}}(x,\xi) & \dots & K(x,\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ K^{[r-1]\{r-1\}}(x,\xi) & \dots & K^{[r-1]}(x,\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \sum\limits_{s=1}^{n} y^{(n-s)}(\xi)db_{s1}(\xi) \\ \dots \\ \sum\limits_{s=1}^{n} y^{(n-s)}(\xi)db_{sm}(\xi) \end{pmatrix},$$

звідки

$$y^{[\nu]}(x) = \sum_{s=1}^{r} \tilde{c}_s K^{[\nu]\{r-s\}}(x,a) + \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \int_a^x K^{[\nu]\{m-p\}}(x,\xi) y^{(n-s)}(\xi)\,db_{sp}(\xi), \quad \nu = \overline{0, r-1}. \tag{25}$$

Тут $y(x)$ – розв'язок рівняння (1), яке, з врахуванням (16), записується у вигляді

$$L_{mn}(y) = (-1)^{m+1}\mathrm{sgn}(a_{00}\sigma)\rho^r h^{-r}\sigma(x)y. \tag{26}$$

Підставивши (23) в (25), отримаємо

$$y^{[\nu]}(x) = \sum_{s=1}^{r}\tilde{c}_s(-1)^{r-s+1}\frac{Q_{\nu,r-s}(x,a)}{r\rho^{s-\nu-1}}\sum_{k=1}^{r}M_{k,r-s}\mathrm{e}^{\rho\omega_k t(x)}[\omega_k^{\nu+1}]_x+$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_a^x(-1)^{m-p+1}\frac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}}\sum_{k=1}^{r}M_{k,m-p}\mathrm{e}^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}[\omega_k^{\nu+1}]_{x,\xi}y^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi), \quad \nu=\overline{0,r-1}.$$

Виберемо c_j так, щоб

$$y^{[\nu]}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{r} h^{-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{\nu}\rho^{\nu}\omega_k^{\nu}[c_k]_x E_1(x)\mathrm{e}^{\rho\omega_k t(x)} + S_\nu(x), & 0\le\nu<n,\\ \sum\limits_{k=1}^{r} (-1)^{\nu-n}a_{00}(x)h^{-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{\nu}\rho^{\nu}\omega_k^{\nu}[c_k]_x E_1(x)\mathrm{e}^{\rho\omega_k t(x)} + S_\nu(x), & n\le\nu\le r-1,\end{cases} \tag{27}$$

де

$$S_\nu(x) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_a^x(-1)^{m-p+1}\frac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}}\sum_{k=1}^{r}M_{k,m-p}\mathrm{e}^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}[\omega_k^{\nu+1}]_{x,\xi}y^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi), \quad \nu=\overline{0,r-1}.$$

Тоді для c_k справджується система

$$\sum_{s=1}^{n}\tilde{c}_s(-1)^{r-s+1}\frac{h^{s-1}}{r\rho^{s-1}}\left(\sqrt[r]{\left|\frac{a_{00}(a)}{\sigma(a)}\right|}\right)^{s-1}\frac{1}{E_1(a)}M_{k,r-s}\omega_k+$$

$$+\sum_{s=n+1}^{r}\tilde{c}_s(-1)^{r-s+1}\frac{h^{s-1}}{r\rho^{s-1}}(-1)^{s-1-n}a_{00}^{-1}(a)\left(\sqrt[r]{\left|\frac{a_{00}(a)}{\sigma(a)}\right|}\right)^{s-1}\frac{1}{E_1(a)}M_{k,r-s}\omega_k = c_k, \quad k=\overline{1,r}. \tag{28}$$

Приймемо для деякого фіксованого q, $q=\overline{1,r}$,

$$c'_k = c_k \quad \text{при} \;\; k=\overline{1,q}, \tag{29}$$

$$c'_k = c_k + \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{(-1)^m h^{n+p-1}}{r\rho^{n+p-1}}M_{k,m-p}\int\limits_a^b\left(\sqrt[r]{\left|\frac{a_{00}(\xi)}{\sigma(\xi)}\right|}\right)^{n+p-1}\frac{\mathrm{e}^{-\rho\omega_k t(\xi)}}{E_1(\xi)a_{00}(\xi)}[\omega_k]_\xi y^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi) \tag{29б}$$

при $k=\overline{q+1,r}$.

Внаслідок того, що при $p\ge 1$

$$Q_{\nu,m-p}(x,\xi) = \begin{cases} h^{n+p-1-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{a_{00}(\xi)}{\sigma(\xi)}\right|}\right)^{n+p-1}\dfrac{E_1(x)}{E_1(\xi)}(-1)^{p-1}a_{00}^{-1}(\xi), & \nu<n;\\ (-1)^{\nu-n}a_{00}(x)h^{n+p-1-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{a_{00}(\xi)}{\sigma(\xi)}\right|}\right)^{n+p-1}\dfrac{E_1(x)}{E_1(\xi)}(-1)^{p-1}a_{00}^{-1}(\xi), & n\le\nu\le r-1,\end{cases}$$

ввівши позначення

$$K_{1\nu p}(x,\xi,\rho) = \sum_{k=1}^{q}(-1)^{m-p+1}\rho^\nu Q_{\nu,m-p}(x,\xi)M_{k,m-p}\mathrm{e}^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}\omega_k^{\nu+1},$$

$$K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)=\sum_{k=q+1}^{r}(-1)^{m-p+1}\rho^{\nu}Q_{\nu,m-p}(x,\xi)M_{k,m-p}\mathrm{e}^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}\omega_k^{\nu+1},\quad \nu=\overline{0,r-1},\quad p=\overline{1,m},$$

і підставивши (29) в (27), отримаємо

$$\begin{aligned} y^{[\nu]}(x) &= \sum_{k=1}^{r} h^{-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{\nu}\rho^{\nu}\omega_k^{\nu}[c_k']_x E_1(x)\mathrm{e}^{\rho\omega_k t(x)}+\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{r\rho^{n+p-1}}\int_a^x K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi}\times \\ &\times y^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi)-\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{r\rho^{n+p-1}}\int_x^b K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi}y^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi),\quad \nu=\overline{0,n-1}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} y^{[\nu]}(x) &= \sum_{k=1}^{r}(-1)^{\nu-n}a_{00}(x)h^{-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{\nu}\rho^{\nu}\omega_k^{\nu}[c_k']_x E_1(x)\mathrm{e}^{\rho\omega_k t(x)}+\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{r\rho^{n+p-1}}\int_a^x K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)\times \\ &\times[1]_{x,\xi}y^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi)-\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{r\rho^{n+p-1}}\int_x^b K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi}y^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi),\quad \nu=\overline{n,r-1}. \end{aligned} \tag{31}$$

VII. Асимптотика розв'язків рівняння з мірами

Спостерігається така властивість коренів n-го степеня з -1, [1]: для кожного сектора T_ν існує таке розташування чисел $\omega_1,\,\omega_2,\,\ldots,\,\omega_r$, що для всіх $\rho\in T_\nu$ виконуються нерівності

$$\mathrm{Re}\,((\rho+c)\omega_1)\le \mathrm{Re}\,((\rho+c)\omega_2)\le\ldots\le\mathrm{Re}\,((\rho+c)\omega_r). \tag{32}$$

Лема 2. *Існує така стала C, що для всіх $\rho\in T$ мають місце нерівності*

$$|K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)|\le C\,|\rho|^{\nu}\,q\left|\mathrm{e}^{\rho\omega_q(t(x)-t(\xi))}\right|\quad \textit{при}\quad a\le\xi\le x\le b, \tag{33}$$

$$|K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)|\le C\,|\rho|^{\nu}\,(r-q)\left|\mathrm{e}^{\rho\omega_q(t(x)-t(\xi))}\right|\quad \textit{при}\quad a\le x\le\xi\le b, \tag{34}$$

$$\nu=\overline{0,r-1},\quad p=\overline{1,m}.$$

□ *Доведення.* Виберемо сталу C так, щоб

$$\left|\mathrm{e}^{c(\omega_j-\omega_q)(t(x)-t(\xi))}\right|\le C_1 \tag{35}$$

для всіх $j,q=\overline{1,r}$ і всіх x і ξ з інтервалу $[a,b]$; це можливо, бо ліва частина (35) є неперервною функцією змінних x і ξ. Якщо $\rho\in T$, то з рівностей (32) випливає, що при $\alpha\le q$ справджується нерівність $\mathrm{Re}\,(\rho\omega_\alpha)\le$ $\le\mathrm{Re}\,(\rho\omega_\alpha+(\rho+c)(\omega_q-\omega_\alpha))$; звідки при $a\le\xi\le x\le b$ отримуємо

$$\left|\mathrm{e}^{\rho\omega_\alpha(t(x)-t(\xi))}\right|\le\left|\mathrm{e}^{[\rho\omega_\alpha+(\rho+c)(\omega_q-\omega_\alpha)](t(x)-t(\xi))}\right|\le C_1\left|\mathrm{e}^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}\right|,$$

бо $t(x)$ – монотонна функція. Оскільки $a_{00}(x)$, $a_{00}^{-1}(x)$, $\sigma(x)$, $\sigma^{-1}(x)$ – обмежені на $[a,b]$ $\;Q_{\nu,m-p}(x,\xi)$ теж є там обмеженими і

$$|K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)|=\left|\sum_{k=1}^{q}(-1)^{m-p+1}\rho^{\nu}Q_{\nu,m-p}(x,\xi)M_{k,m-p}\mathrm{e}^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}[\omega_k^{\nu+1}]_{x,\xi}\right|\le Cq\,|\rho|^{\nu}\left|\mathrm{e}^{\rho\omega_q(t(x)-t(\xi))}\right|.$$

Аналогічно доводиться нерівність (34). ■

У наступній теоремі на основі аналізу інтегро-квазідиференціальних рівнянь (30), (31) встановлюються асимптотичні формули для розв'язків рівняння (1).

Теорема 1. *За вищезгаданих умов на коефіцієнти квазідиференціального рівняння (1), воно у всій області T комплексної ρ-площини має r лінійно незалежних розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_r$, регулярних відносно $\rho \in T$ при досить великому $|\rho|$ і таких, що задовольняють співвідношення (при великих $|\rho|$)*

$$\begin{cases} y_q^{[\nu]}(x,\rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_q t(x)} \left(\dfrac{1}{h}\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^\nu E_1(x)\left[\omega_q^\nu + O\left(\dfrac{1}{\rho}\right)\right], \ \ \nu=\overline{0,n-1}, \\ y_q^{[\nu]}(x,\rho) = (-1)^{\nu-n}\rho^\nu e^{\rho\omega_q t(x)} \left(\dfrac{1}{h}\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^\nu a_{00}(x)E_1(x)\left[\omega_q^\nu + O\left(\dfrac{1}{\rho}\right)\right], \ \ \nu=\overline{n,r-1}, \end{cases} \quad q=\overline{1,r}. \tag{36}$$

□ *Доведення.* Припустимо, що рівняння (1) має такий розв'язок y_q, що $c'_\nu = 0$ при $\nu \neq q$, $c'_q = 1$. Отже,

$$y_q^{[\nu]}(x) = h^{-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^\nu \rho^\nu\omega_q^\nu E_1(x)e^{\rho\omega_q t(x)}[1]_x + \sum_{p=1}^m\sum_{s=1}^n \frac{1}{r\rho^{n+p-1}}\int_a^x K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi}y_q^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi) -$$

$$-\sum_{p=1}^m\sum_{s=1}^n \frac{1}{r\rho^{n+p-1}}\int_x^b K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi}y_q^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi), \quad \nu=\overline{0,n-1}, \tag{37}$$

$$y_q^{[\nu]}(x) = (-1)^{\nu-n}a_{00}(x)h^{-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^\nu \rho^\nu\omega_q^\nu E_1(x)e^{\rho\omega_q t(x)}[1]_x + \sum_{p=1}^m\sum_{s=1}^n \frac{1}{r\rho^{n+p-1}}\int_a^x K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi}\times$$

$$\times y_q^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi) - \sum_{p=1}^m\sum_{s=1}^n \frac{1}{r\rho^{n+p-1}}\int_x^b K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi}y_q^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi), \quad \nu=\overline{n,r-1}. \tag{38}$$

Приймемо

$$z_{q\nu}(x) = \begin{cases} y_q^{[\nu]}(x)h^\nu\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu}\rho^{-\nu}E_1^{-1}(x)e^{-\rho\omega_q t(x)}, \ \ \nu=\overline{0,n-1}, \\ (-1)^{\nu-n}a_{00}^{-1}(x)y_q^{[\nu]}(x)h^\nu\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu}\rho^{-\nu}E_1^{-1}(x)e^{-\rho\omega_q t(x)}, \ \ \nu=\overline{n,r-1} \end{cases} \tag{39}$$

і введемо позначення при $\nu=\overline{0,n-1}$

$$K_{qp\nu s}(x,\xi,\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{r}K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}\right)^{n-s}\dfrac{\rho^{2-p-s-\nu}}{h^{n-\nu-s}}\dfrac{E_1(\xi)}{E_1(x)}e^{-\rho\omega_q(t(x)-t(\xi))}, \ \ \xi<x, \\ -\dfrac{1}{r}K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}\right)^{n-s}\dfrac{\rho^{2-p-s-\nu}}{h^{n-\nu-s}}\dfrac{E_1(\xi)}{E_1(x)}e^{-\rho\omega_q(t(x)-t(\xi))}, \ \ \xi>x \end{cases}$$

і при $\nu=\overline{n,r-1}$

$$K_{qp\nu s}(x,\xi,\rho) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\nu-n}\dfrac{1}{r}K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}\right)^{n-s}\dfrac{\rho^{2-p-s-\nu}}{h^{n-\nu-s}}\dfrac{E_1(\xi)}{E_1(x)}e^{-\rho\omega_q(t(x)-t(\xi))}a_{00}^{-1}(x), \ \ \xi<x, \\ (-1)^{\nu-n+1}\dfrac{1}{r}K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu}\left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}\right)^{n-s}\dfrac{\rho^{2-p-s-\nu}}{h^{n-\nu-s}}\dfrac{E_1(\xi)}{E_1(x)}e^{-\rho\omega_q(t(x)-t(\xi))}a_{00}^{-1}(x), \ \ \xi>x; \end{cases}$$

$$q=\overline{1,r}, \quad p=\overline{1,m}, \quad s=\overline{1,n};$$

тоді для функцій $z_{q\nu}(x,\rho)$ ми отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$z_{q\nu}(x,\rho)=\omega_q^{\nu}[1]_x+\frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_a^b K_{qp\nu s}(x,\xi,\rho)z_{q,n-s}(\xi,\rho)[1]_{x,\xi}db_{sp}(\xi),\quad q=\overline{1,r},\quad \nu=\overline{0,r-1}. \tag{40}$$

Якщо ця система має розв'язок $z_{q\nu}$, то, використавши метод послідовних підстановок, отримаємо

$$z_{q\nu}(x,\rho)=[\omega_q^{\nu}]_x+\frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_a^b K_{qp\nu s}(x,\xi,\rho)[\omega_q^{n-s}]_{x,\xi}db_{sp}(\xi)+\frac{1}{\rho^2}\times$$

$$\times\sum_{p_1,p_2=1}^{m}\sum_{s_1,s_2=1}^{n}\int\limits_a^b\int\limits_a^b K_{qp_1\nu s_1}(x,\xi,\rho)K_{qp_2,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)z_{q,n-s_2}(\xi_2)[1]_{x,\xi}db_{s_1p_1}(\xi_1)db_{s_2p_2}(\xi_2)=\ldots=[\omega_q^{\nu}]_x+$$

$$+\frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_a^b K_{qp\nu s}(x,\xi,\rho)[\omega_k^{n-s}]_{x,\xi}db_{sp}(\xi)+\ldots+\frac{1}{\rho^d}\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_d=1}^{m}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_d=1}^{n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K_{qp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\ldots\times$$

$$\times K_{q,p_d,n-s_{d-1},s_d}(\xi_{d-1},\xi_d,\rho)[\omega_q^{n-s_d}]_{x,\xi}db_{s_1p_1}(\xi_1)\ldots db_{s_dp_d}(\xi_d)+$$

$$+\frac{1}{\rho^{d+1}}\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_{d+1}=1}^{m}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_{d+1}=1}^{n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K_{qp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\ldots K_{q,p_{d+1},n-s_d,s_{d+1}}(\xi_d,\xi_{d+1},\rho)z_{q,n-s_{d+1}}(\xi_{d+1})[1]_{x,\xi}\times$$

$$\times db_{s_1p_1}(\xi_1)\ldots db_{s_{d+1},p_{d+1}}(\xi_{d+1}). \tag{41}$$

Приймемо $B=\max\limits_{a\le x\le b}|\,z_{qj}(x)\,|$, $j=\overline{0,r-1}$. З леми і обмеженості функцій $\sigma(x)$, $a_{00}(x)$, $\sigma^{-1}(x)$, $a_{00}^{-1}(x)$ на $[a,b]$ випливає, що існують такі сталі L і R, що при $|\,\rho\,|>R\ \forall q,p,\nu,s$ маємо $|\,[1]_{x,\xi}K_{qp\nu s}(x,\xi,\rho)\,|\le L$. Введемо позначення $v_{sp}=\overset{b}{\underset{a}{V}}\,b_{sp}(x)$, $s=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$; тоді останній доданок в (41) за модулем не перевищує

$$B\frac{L^{d+1}}{|\,\rho\,|^{d+1}}\sum_{p_1,p_2,\ldots p_{d+1}=1}^{m}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_{d+1}=1}^{n}\prod_{j=1}^{d+1}v_{s_jp_j}=B\frac{L^{d+1}}{|\,\rho\,|^{d+1}}\sum_{s_{ij}\ge 0,\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}s_{ij}=d+1}\frac{(d+1)!}{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m}s_{ij}!}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}v_{ij}^{s_{ij}},$$

що можна записати за формулою полінома у вигляді $B\left[\dfrac{L}{|\,\rho\,|}\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m}v_{sp}\right]^{d+1}$.

При $|\,\rho\,|>R_0$, де $R_0=\max\left\{R,L\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m}v_{sp}\right\}$, функція $z_{q\nu}(x)=z_{q\nu}(x,\rho)$ є сумою ряду

$$z_{q\nu}(x,\rho)=[\omega_q^{\nu}]_x+\frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_a^b K_{qp\nu s}(x,\xi,\rho)\,[\omega_q^{n-s}]_{x,\xi}\,db_{sp}(\xi)+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{p_1,p_2=1}^{m}\sum_{s_1,s_2=1}^{n}\int\limits_a^b\int\limits_a^b K_{qp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)K_{qp_2,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\,[\omega_q^{n-s_2}]_{x,\xi}\,db_{s_1p_1}(\xi_1)\,db_{s_2p_2}(\xi_2)+\ldots,$$

оскільки він мажорується сумою геометричної прогресії зі знаменником, меншим від одиниці. Навпаки, легко побачити, що в кожній області $|\,\rho\,|\ge R_1>R_0,\ a\le x\le b$ цей ряд збігається рівномірно і є розв'язком системи (40). Отже, ця система має один і тільки один розв'язок $z_{q\nu}=z_{q\nu}(x,\rho)$, аналітичний відносно ρ, причому

$$z_{q\nu}(x,\rho)=\omega_q^{\nu}+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Звідси і з (39) випливають співвідношення (36), з яких можна зробити висновок про лінійну незалежність функцій $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_r$. Залишається довести, що існує розв'язок $y_q(x,\rho)$ рівняння (1), що задовольняє (37), (38). Для цього досить показати, що якими б не були сталі c'_ν, існує розв'язок y рівняння (1), що задовольняє (30), (31) при цих значеннях c'_ν. Очевидно, досить довести, що визначник лінійного перетворення від сталих

$\tilde{c}_j$ до c'_j (добуток двох перетворень від $\tilde{c}_j$ до c_j та від c_j до c'_j) при достатньо великих $|\rho|$, $\rho \in T$, відрізняється від нуля; в цьому випадку системи (28), (29) можна розв'язати відносно $\tilde{c}_j$ при довільно заданих c'_j. Розв'язок y рівняння (1), рівносильного першому рівнянню системи (27), що відповідає цим значенням $\tilde{c}_j$, буде тоді шуканим.

Але якщо визначник перетворення (28), (29) дорівнює нулю при як завгодно великих $|\rho|$, $\rho \in T$ (детермінант хоча б одного з перетворень (28), (29) дорівнює нулю), то для цих значень ρ системи (28), (29) мають нетривіальні розв'язки відносно $\tilde{c}_j$ при $c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_r = 0$. Відповідна функція y буде тоді нетривіальним розв'язком першого рівняння системи, яку можна отримати з (30), (31) при $c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_r = 0$.

Доведемо, що це неможливо методом, запропонованим в [1]. Скориставшись заміною

$$z_\nu(x) = \begin{cases} y^{[\nu]}(x)h^\nu \left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu} \rho^{-\nu} E_1^{-1}(x) \mathrm{e}^{-\rho\omega_q t(x)}, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \\ (-1)^{\nu-n} a_{00}^{-1}(x) y^{[\nu]}(x) h^\nu \left(\sqrt[r]{\left|\dfrac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu} \rho^{-\nu} E_1^{-1}(x) \mathrm{e}^{-\rho\omega_q t(x)}, \quad \nu = \overline{n, r-1}, \end{cases} \tag{42}$$

отримаємо для функцій z_ν систему рівнянь

$$z_\nu(x,\rho) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \frac{h^{\nu-n+s}}{r\rho^{s+\nu+p-1}} \int_a^x K_{1\nu p}(x,\xi,\rho) \left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu} \left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}\right)^{n-s} \mathrm{e}^{\rho\omega_q(t(\xi)-t(x))} \frac{E_1(\xi)}{E_1(x)} z_{n-s}(\xi,\rho) \times$$

$$\times [1]_{x,\xi} db_{sp}(\xi) - \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \frac{h^{\nu-n+s}}{r\rho^{s+\nu+p-1}} \int_x^b K_{2\nu p}(x,\xi,\rho) \left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu} \left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}\right)^{n-s} \mathrm{e}^{\rho\omega_q(t(\xi)-t(x))} \frac{E_1(\xi)}{E_1(x)} \times$$

$$\times z_{n-s}(\xi,\rho)[1]_{x,\xi} db_{sp}(\xi), \quad \nu = \overline{0, n-1},$$

$$z_\nu(x,\rho) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \frac{h^{\nu-n+s}}{r\rho^{s+\nu+p-1}} \int_a^x K_{1\nu p}(x,\xi,\rho) \left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu} \left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}\right)^{n-s} \times$$

$$\times \mathrm{e}^{\rho\omega_q(t(\xi)-t(x))} \frac{E_1(\xi)(-1)^{\nu-n}}{E_1(x)a_{00}(x)} z_{n-s}(\xi,\rho)[1]_{x,\xi} db_{sp}(\xi) - \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \frac{h^{\nu-n+s}}{r\rho^{s+\nu+p-1}} \int_x^b K_{2\nu p}(x,\xi,\rho) \times$$

$$\times \left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|}\right)^{-\nu} \left(\sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}\right)^{n-s} \mathrm{e}^{\rho\omega_q(t(\xi)-t(x))} \frac{E_1(\xi)(-1)^{\nu-n}}{E_1(x)a_{00}(x)} z_{n-s}(\xi,\rho)[1]_{x,\xi} db_{sp}(\xi), \quad \nu = \overline{n, r-1}.$$

Прийнявши $m(\rho) = \max |z_\nu(x,\rho)|$, $a \le x \le b$, $\nu = \overline{0, r-1}$ і застосувавши лему до правої частини останньої системи, можемо прийти до оцінки

$$|z_\nu(x,\rho)| \le \frac{C_1}{r\,|\rho|}(q + r - q) \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \int_a^b |\rho|^{2-p-s} \, |db_{sp}(\xi)| m(\rho).$$

Оскільки ліва частина досягає свого максимуму $m(\rho)$, то $m(\rho) \le m(\rho)\dfrac{C_2}{|\rho|}$, де C_1, C_2 – сталі.

При великих значеннях $|\rho|$ ця нерівність можлива лише тоді, коли $m(\rho) = 0$; отже, $z_\nu(x,\rho) = 0$. Звідси на основі (42) при $\nu = 0$ $\quad y \equiv 0$, і теорема повністю доведена. ■

Література

[1] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

[2] Кесельман Г. М., Креховецкая Л. М. О корневых векторах оператора Штурма-Лиувилля с нелокальными краевыми условиями // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Дифференциальные уравнения и их приложения. – 1984. – № 182. – С. 69–71.

[3] Шувар О. Б. Асимптотичні формули для власних значень диференціально-граничного оператора непарного порядку в просторі векторфункцій // Вісн. НУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 2000, № 407. – С. 54–57.

[4] Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 11. – С. 1460–1469.

[5] Радзиевский Г.В. Асимптотика по параметру фундаментальной системы решений линейного функционально-дифференциального уравнения // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 6. – С. 811–836.

[6] Рыхлов В. С. Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 1. – С. 96–108.

[7] Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 735–751.

[8] Махней О. В. Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 17–25.

[9] Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. – М.: Мир, 1991. – 566 с.

[10] Шин Д. Ю. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7(49), № 3. – С. 479–532.

[11] Махней А. В., Тацийй Р. М. Асимптотика собственных значений и собственных функций сингулярного квазидифференциального оператора // Дифференциальные уравнения. — 2003. – Т. 39, № 8. – С. 1044–1051.

[12] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

[13] Стасюк М. Ф., Таций Р. М. Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Дифференц. уравнения и их приложения. – 1988. – № 222. – С. 89–90.

[14] Тацій Р. М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. держ. ун-т ім. І. Франка. – Львів, 1994. – 37 с.

[15] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения – М.: Наука, 1987. – 424 с.

[16] Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения, II // Вестн. Ярославского ун-та. – 1974. – Вып. 8. – С. 122–144.

[17] Тацій Р. М., Кісілевич В. В., Пахолок Б. Б., Стасюк М. Ф. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинський математичний вісн. – 1995. – Вип. 2. – С. 165–167.

[18] Стасюк М. Ф. Структура елементів фундаментальної матриці, що відповідає скалярному квазідиференціальному рівнянню // Матер. IX-ї Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (16–19 травня 2002 р., Київ). – К., 2002. – С. 369.

[19] Таций Р. М., Пахолок Б. Б. О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 25–28.

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF THE SINGULAR QUASI-DIFFERENTIAL EQUATION IN ON THE FINITE INTERVAL

O. Makhney

Prikarpatsky University from V. Stephanyk
57 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, Ukraine

The asymptotic behaviour under the large values of the parameter of the linearly independent system of solutions (and their quasiderivatives) of the singular quasidifferential equation on a finite interval is constructed. At first under investigation the simpler problem without measures is studied by the method of approximation by smooth functions and then the obtained asymptotic behaviour is extended to a more general case.

Keywords: quasi-differential equations, quasi-derivatives, the asymptotic behaviour of solutions of the singular quasi-differential equation.

2000 MSC: 34A37

UDK: 517.955.8