ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.643 № 643, (2009) с. 57–63

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 57–63

МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

Р.М. Тацій [a], Т.І. Ушак [b]

[a] *Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська 35, Львів, Україна*
[b] *ЗАТ ЖБК "Ваш дім", Львів*

(Отримано 23 листопада 2008 р.)

Розроблено алгоритм розрахунку стрижневих систем зі змінною жорсткістю на стійкість на базі методу граничних елементів. Застосовано теорію узагальнених квазідиференціальних рівнянь для розрахунку стрижневих систем. Виконано числову реалізацію алгоритму мовою програмування Pascal.

Ключові слова: стрижневі системи, стійкість, квазідиференціальні рівняння

2000 MSC: 74H10,74H15

УДК: 624.075: 539.3

Розглянуто класичну задачу про ейлерову втрату стійкості стрижневих систем змінної жорсткості.

Для розв'язування цієї задачі було розроблено багато методів: варіаційні, скінченно-різницеві, метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ) тощо. Огляд літератури в цьому напрямку та порівняння різних методів можна знайти, наприклад, в монографії [5]. Тут для розв'язування задачі стійкості стрижневих систем пропонується застосувати теорію узагальнених квазідиференціальних рівнянь з мірами, викладену в роботах [7, 10]. Такий підхід природно вписується в схему, що в останні роки запропонована в роботі [1] і дістала назву методу граничних елементів (МГЕ). Зокрема, за нашого підходу використовується алгоритм цієї схеми, що ґрунтується на теорії систем диференціальних рівнянь [7]. Ефективність такого підходу проілюстрована в роботах [2, 3, 8, 9] при дослідженні динамічної стійкості стрижнів з дискретно-неперервним розподілом параметрів при дії неконсервативних сил.

Варто зауважити, що розрахункові схеми, які ґрунтуються на варіаційних методах, не застосовні до стрижневих систем, що описуються диференціалними рівняннями з узагальненими функціями в коефіцієнтах.

У цій роботі використовується метод апроксимації коефіцієнтів квазідиференціальних рівнянь узагальненими функціями [12], який ілюструється на задачі про втрату стійкості стрижневої системи (метод дискретизації).

I. Узагальнене квазідиференціальне рівняння 4-го порядку

На відкритому інтервалі I дійсної осі розглядається рівняння

$$\left(a_0 y''\right)'' + \left(a_1 y'\right)' = 0, \tag{1}$$

де $a_0^{-1}(x)$ – локально-вимірна і обмежена на I функція, $a_1(x)$ – міра на I: $a_1(x) = b_1'(x)$, де $b_1(x)$ – неперервна праворуч функція локально обмеженої на I варіації (клас $BV_{loc}^{+}(I)$[7]), а „штрих" означає узагальнене диференціювання. Для рівняння (1) вводяться квазіпохідні так:

$$y^{[0]} \overset{def}{=} y, y^{[1]} = y', y^{[2]} = a_0 y'', y^{[3]} = a_1 y' + \left(a_0 y''\right)', \tag{2}$$

За допомогою квазіпохідних (2) і вектора $\bar{y} = \left(y,\, y^{[1]},\ y^{[2]},\ y^{[3]}\right)$ рівняння (1) зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{y'} = C' \cdot \bar{y}, \tag{3}$$

де:

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & -a_1(x) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Система (3) коректна [7], оскільки виконується необхідна й достатня умова коректності:

$$(\Delta C(x))^2 = 0 \;\forall\, x \in I, \tag{5}$$

де:

$$\Delta C(x) = C(x) - C(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta b(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– матриця стрибків цієї системи.

Через $B(x,s)$ позначимо фундаментальну матрицю системи (3), структура якої добре вивчена в [7, 11], з такими властивостями:

1. $B(s,s) = E$, де E– одинична матриця;
2. $B(x,s) = (E + \Delta C(x)) \cdot B(x-0,s)$;
3. $\forall x_1, x_2, x_3 \in \ I \ \ B(x_3,x_2) \cdot B(x_2,x_1) = B(x_3,x_1)$.

За допомогою цієї матриці для довільного початкового вектора $\overline{y_0} = \overline{y}(x_0)$, $x_0 \in I$, розв'язок системи (3) записується у вигляді

$$\overline{y}(x) = B(x,x_0) \cdot \overline{y_0}. \tag{6}$$

Зауважимо, що властивість 3 дозволяє "продовжувати" розв'язок $\overline{y}(x)$ при переході через точку $x = x_2$.

II. Розв'язок задачі про стійкість стрижня змінної жорсткості методом дискретизації

Така задача зводиться до розв'язування квазідиференціального рівняння на проміжку $[0,l]$.

$$(\alpha y'')'' + py'' = 0, \tag{7}$$

де $\alpha(x) = EI(x)$, E – модуль Юнга, $I(x)$ – момент інерції в перетині x стрижня, p – параметр поздовжнього навантаження. До рівняння (7) додаються однорідні крайові умови (умови закріплення),

$$\begin{array}{l} U_s(y) = 0 \\ s = 1,2,3,4 \end{array}, \tag{8}$$

що разом з рівнянням (7) утворюють задачу на власні значення.

Найменше власне значення p_1, задачі (7), (8) і є критичним навантаженням ($p_1 = p_{kp}$), для якого стрижень втрачає стійкість (за Ейлером [4]).

Для конкретності в цій роботі розглядатимемо такі умови закріплення на кінцях стрижня:

1) шарнірне: $y = 0$ і $y^{[2]} = 0$;
2) жорстке: $y = 0$, $y' = 0$;
3) вільний край: $y^{[2]} = 0$ і $y^{[3]} = 0$.

Цим трьом видам закріплень умовно присвоїмо індекси 0, 1, 2 відповідно і розглядатимемо задачі типів (ij), $i,\ j = 0\,,1\,,2$. Так, наприклад, задача типу (01) означає, що на лівому кінці ($x = 0$) стрижень закріплений шарнірно, а на правому ($x = l$) – жорстко.

Відрізок $[0,l]$ точками $x_0 = 0, x_1, x_2, ..., x_n = l$ розіб'ємо на n рівних частин, довжина кожної з яких дорівнює $\frac{l}{n} = h$ (крок розбиття) і замість рівняння (7) розглянемо квазідиференціальне рівняння n-го наближення (метод дискретизації)

$$(a_0 y_n'')'' + p \cdot h \left(\sum_{k=1}^{n} \delta(x - x_k) \cdot y_n' \right)' = 0, \tag{9}$$

де $\delta(x - x_k)$ - δ – функція Дірака з носієм в точці $x = x_k$.

Як відомо [10], при $n \to \infty$ всі розв'язки цього рівняння разом із своїми квазіпохідними $y^{[1]}$, $y^{[2]}$ і $y^{[3]}$ рівномірно прямують до відповідних розв'язків і квазіпохідних рівняння (7):

$$\lim_{n\to\infty} \left| y_n^{[i]}(x) - y(x)^{[i]} \right| = 0, \quad i = \overline{0,3}.$$

Побудуємо фундаментальну матрицю $B_n(l,0)$, системи першого порядку, що відповідає квазідиференціальному рівнянню (7) [7]:

$$B_n(l,0) = (E + \Delta C(x_n))\, B(x_n, x_{n-1})\, (E + \Delta C(x_{n-1})) \times$$
$$\times B(x_{n-1}, x_{n-2}) \times ... \times \cdot (E + \Delta C(x_1)) \cdot B(x_1, 0),$$

де

$$B(x_k; x_{k-1}) = \begin{pmatrix} 1 & x_k - x_{k-1} & f_1 & f_2 \\ 0 & 1 & f_3 & f_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_k - x_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$f_1 = \int_{x_{k-1}}^{x_k} a_0^{-1}(t)\,(x_k - t)\,dt;$$

$$f_2 = \int_{x_{k-1}}^{x_k} a_0^{-1}(t)\,(t - x_{k-1})\,(x_k - t)\,dt;$$

$$f_3 = \int_{x_{k-1}}^{x_k} a_0^{-1}(t)\,dt \quad ; f_4 = \int_{x_{k-1}}^{x_k} a_0^{-1}(t)\,(t - x_{k-1})\,dt.$$

Позначимо через Y_0 початкову матрицю, що враховує умови закріплення в точці $x = 0$. Для шарнірного та жорсткого закріплення, і вільного кінця відповідно

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо:

$$B_n(l,0) \cdot Y_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

Тоді, залежно від умов закріплення на правому кінці ($x = l$), отримуємо характеристичне рівняння для визначення критичного навантаження.

Для шарнірного, жорсткого закріплення та для вільного кінця відповідно

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0; \ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = 0;$$
$$\det \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = 0; \tag{10}$$

Аналогічно до попередніх міркувань, фундаментальну матрицю $B_n\left(l,0\right)$, системи першого порядку, що відповідає квазідиференціальному рівнянню :

$$\left(\alpha y''\right)'' = 0, \tag{11}$$

побудуємо згідно з рекурентною формулою

$$B_n\left(l,0\right) = B\left(x_n, x_{n-1}\right) \times B(x_{n-1}, x_{n-2}) \times \ldots \times B(x_1, 0). \tag{12}$$

Чисельна реалізація такого підходу запропонована в роботі [12].

III. Задача про стійкість стрижневої системи змінної жорсткості

Для поширення результатів розрахунку стрижнів з дискретно-неперервним розподілом параметрів за допомогою методу дискретизації на стрижневі системи використаємо алгоритм методу граничних елементів, розроблений авторами [1].

Якщо декілька стрижнів з'єднані в єдину конструкцію ,то для системи стрижнів можна скласти матричне рівняння типу

$$\vec{Y} = A \bullet \vec{Y}_0. \tag{13}$$

Матриця A зводиться до квазідіагонального вигляду, а вектори $\vec{Y}$та $\vec{Y}_0$ міститимуть параметри напружено-деформованого стану всіх стрижнів у поточній та початковій точках.

$$A = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline B_1(x) & & & & \\ \hline & \ddots & & & \\ \hline & & B_i(x) & & \\ \hline & & & \ddots & \\ \hline & & & & B_m(x) \\ \hline\end{array}\right); \tag{14}$$

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1(x) \\ \ldots \\ Y_3(x) \\ \ldots \\ Y_m(x) \end{pmatrix}; \; \vec{Y}_0 = \begin{pmatrix} Y_{01}(x) \\ \ldots \\ Y_{0i}(x) \\ \ldots \\ Y_{0m}(x) \end{pmatrix},$$

де m – число стрижнів у системі.

Діагональні блоки $B_i(x)$ – фундаментальні матриці квазідиференціального рівняння (6) , які описують стан стрижнів.

Така схема формування матричного рівняння потребує дискретизації стрижневої системи в вузлах. Пов'язано це з тим, що вузли є точками розриву кінематичних і статичних параметрів стрижнів, а рівняння (6) справедливе в точках неперервності параметрів напружено-деформованого стану. Порядок розміщення параметрів стрижнів в матрицях (14) довільний, тобто в ланцюжку можуть розміщуватися параметри стрижнів, які розташовані в різних місцях конструкції. Тому будь-яку стрижневу систему можна описати рівняннями типу (13), яке виступає вже як математична модель деформованої лінійної системи. Порядок такого рівняння визначається числом стрижнів, на яке розбивається система, і порядком квазідиференціальних рівнянь, прийнятих для опису стану стрижнів. Сформуємо одне рівняння типу (13) з матрицями (14) при граничному значенні змінної $x = l$ кожного стрижня , тобто сформуємо рівняння крайової задачі. У цьому випадку можна виконати перетворення матриць рівняння (13) за схемою

$$\begin{gathered}\vec{Y}(l){=}A(l,0)\vec{Y}_0(0){\to}A(l,0)\vec{Y}_0(0){-}\vec{Y}(l) = 0 \to \\ \to A^*(l,0)\vec{Y}^*(l,0) = 0,\end{gathered} \tag{15}$$

де вектори $\vec{Y}$, $\vec{Y}_0$ містять параметри стрижнів в граничних точках $x = l$, $x = 0$. Матриця A містить діагональні блоки $B_i(l,0)$ і має квазідіагональну структуру. $B_i(l,0)$ – фундаментальні матриці квазідиференціального рівняння (6) на проміжку $[0, l_i]$ для кожного стрижня стрижневої системи відповідно. Суть схеми перетворення матриць полягає в перенесенні кінцевих параметрів вектора $\vec{Y}(l)$ на місце нульових параметрів вектора $\vec{Y}_0(0)$. Вектор $\vec{Y}(l)$ стає нульовим і виключається з розгляду. Матриця $A^*(l,0)$ обнулюється в окремих стовпцях і до неї вводяться елементи, компенсуючи перенос параметрів. Вектор $\vec{Y}^*(l,0)$ містять вже початкові та кінцеві граничні параметри всіх стрижнів системи, як це існує в методі граничних елементів [1]. Отже, розв'язок задачі на стійкість стрижневих систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів за допомогою методу дискретизації зводиться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих початкових та кінцевих параметрів стрижнів.

Для реалізації методу граничних елементів (МГЕ) на персональному комп'ютері необхідно сформувати систему алгебраїчних рівнянь (13). Ця система має свої особливості, які істотно відрізняються від параметрів системи методу сил, переміщень, методу скінченних елементів та інших методів. У варіанті МГЕ, який розглядається, матриця коефіцієнтів A^* буде дуже розрідженою матрицею загального вигляду. Розв'язок системи рівнянь з такою матрицею можна здійснити за допомогою методу виключення Гаусса. Однією з особливостей матриці є наявність нульових ведучих елементів. Сильна розрідженість матриці A^* є позитивним фактором, який істотно покращує стійкість числових операцій і забезпечує точність результату [1].

Розглянемо формування матриці A^*, яке передбачає такі етапи:

1. Формується квазідіагональна матриця A (14). Нульова матриця A заповнюється блоками $B_i(l,0)$ – фундаментальними матрицями квазідиференціальних рівнянь типу (6) .

2. Обнулюються стовпці матриці A, номери яких дорівнюють номерам нульових рядків матриці Y_0.

Нульові початкові параметри стрижнів є вихідними даними і номери нульових рядків матриці Y_0 визначаються під час її формування. Обнулену в окремих стовпцях матрицю позначимо A_0.

3. Визначаються компенсуючі елементи, пов'язані з переносом кінцевих параметрів з Y в Y_0. Всі компенсуючі елементи одержують з аналізу матриць Y і Y_0 і можуть бути введені в матрицю A_0 як вихідні дані. Для наочності алгоритму МГЕ, компенсуючі елементи зведені в допоміжну матрицю C .

4. Матриця A^* отримується підсумовуванням

$$A^* = A_0 + C.$$

Матриця C характеризує топологію стрижневої системи і є інваріантною щодо виду розрахунку.

IV. Приклад реалізації методу дискретизації для розв'язку задач стійкості стрижневих систем з рухомими вузлами

Розрахуємо на стійкість раму, зображену на рис. 1.

Знайдемо 3 перші критичні сили вільної рами, стрижні якої мають жорсткість [4]: $EI\,(x) = \frac{1}{1+\alpha\sin(x)}$, (рис. 1), де α – параметр, $0 \le \alpha \le 1$, довжину стрижнів приймаємо $l = 1$.

Втрата стійкості стрижневої системи характеризується виникненням повздовжньо-поперечного і поперечного згину стрижнів. Повздовжньо-поперечний і поперечний згин стрижнів описується рівняннями (7) і (11) відповідно.

Матричне рівняння (13) системи в нашому випадку матиме вигляд

$$\vec{Y}(l) = A(l,0)\vec{Y}_0(0);$$

де

$$A(l,0) = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B_1(l,0) & & & \\ \hline & B_2(l,0) & & \\ \hline & & B_3(l,0) & \\ \hline & & & B_4(l,0) \\ \hline \end{array}\right)$$

– квазідіагональна матриця.

Діагональні блоки $B_i(l,0)$ – фундаментальні матриці квазідиференціальних рівнянь (7), (11), які описують стан стрижнів, а вектори $\vec{Y}(l)$, $\vec{Y}_0(0)$ містять параметри деформованого стану всіх стрижнів в кінцевій та початковій точках. Здійснимо перетворення матричного рівняння за схемою (15).

Записуємо алгоритм розв'язку задачі :

1. Розбиваємо раму на 4 стержня, нумеруємо вузли і позначаємо початок і кінець кожного стрижня .

2. Формуємо матрицю стійкості $A^*(l,0)$. Фундаментальні матриці квазідиференціальних рівнянь для стрижнів 0–1, 1–2, 2–4 запозичуємо з рівняння згину (11), а елементи матриці позначаємо через $\overset{\leftrightarrow}{B}_{ij}$. Для стрижня 3–1 – з рівняння (7) з врахуванням нормальних сил, а елементи матриці позначаємо через B_{ij}.

Рівняння рівноваги вузлів 1 і 2 складаємо для недеформованого стану рами, а рівняння сумісності переміщень відповідно до деформованого стану по рис. 2.

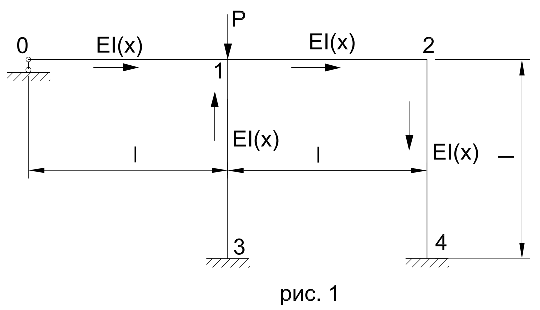

рис. 1

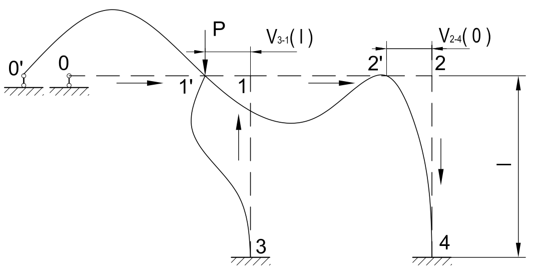

рис.2

1	$EI(x)V^{0-1}(0); M^{2-4}(l)$	1	$EI(x)V^{0-1}(l) = 0$
2	$EI(x)\varphi^{0-1}(0)$	2	$EI(x)\varphi^{0-1}(l) = EI(x)\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(0) = 0; Q^{2-4}(l)$	3	$M^{0-1}(l) = M^{1-2}(0) - M^{3-1}(l)$
4	$Q^{0-1}(0)$	4	$Q^{0-1}(l) = Q^{1-2}(0) + N^{3-1}(l)$
5	$N^{0-1}(0) = 0; N^{2-4}(l)$	5	$N^{0-1}(l) = N^{1-2}(0) - Q^{3-1}(l)$
6	$EI(x)V^{1-2}(0) = 0; M^{3-1}(l)$	6	$EI(x)V^{1-2}(l) = 0$
7	$EI(x)\varphi^{1-2}(0)$	7	$EI(x)\varphi^{1-2}(l) = EI(x)\varphi^{2-4}(0)$
8	$M^{1-2}(0)$	8	$M^{1-2}(l) = M^{2-4}(0)$
9	$Q^{1-2}(0)$	9	$Q^{1-2}(l) = N^{2-4}(0)$
$\vec{Y}* = 10$	$N^{1-2}(0)$	$\vec{Y}$(l)= 10	$N^{1-2}(l) = -Q^{2-4}(0)$
11	$EI(x)V^{2-4}(0)$	11	$EI(x)V^{2-4}(l) = 0$
12	$EI(x)\varphi^{2-4}(0);$	12	$EI(x)\varphi^{2-4}(l) = 0$
13	$M^{2-4}(0)$	13	$M^{2-4}(l)$
14	$Q^{2-4}(0)$	14	$Q^{2-4}(l)$
15	$N^{2-4}(0)$	15	$N^{2-4}(l)$
16	$EI(x)V^{3-1}(0) = 0; Q^{3-1}(l)$	16	$EI(x)V^{3-1}(l) = -EI(x)V^{2-4}(0)$
17	$EI(x)\varphi^{3-1}(0) = 0; N^{3-1}(l)$	17	$EI(x)\varphi^{3-1}(l) = EI(x)\varphi^{1-2}(0)$
18	$M^{3-1}(0)$	18	$M^{3-1}(l)$
19	$Q^{3-1}(0)$	19	$Q^{3-1}(l)$
20	$N^{3-1}(0)$	20	$N^{3-1}(l)$

$$A^* = \left(\begin{array}{c|ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \hline
1 & & \overleftrightarrow{B}_{11} & & \overleftrightarrow{B}_{14} & & & & & & & & & & & & & & & & \\
2 & & \overleftrightarrow{B}_{21} & & \overleftrightarrow{B}_{24} & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
3 & & \overleftrightarrow{B}_{31} & & \overleftrightarrow{B}_{34} & & 1 & & -1 & & & & & & & & & & & & \\
4 & & \overleftrightarrow{B}_{41} & & \overleftrightarrow{B}_{44} & & & & & -1 & & & & & & & & -1 & & & \\
5 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & 1 & & & & \\ \hline
6 & & & & & & & \overleftrightarrow{B}_{12} & \overleftrightarrow{B}_{13} & \overleftrightarrow{B}_{14} & & & & & & & & & & & \\
7 & & & & & & & \overleftrightarrow{B}_{22} & \overleftrightarrow{B}_{23} & \overleftrightarrow{B}_{24} & & & -1 & & & & & & & & \\
8 & & & & & & & \overleftrightarrow{B}_{32} & \overleftrightarrow{B}_{33} & \overleftrightarrow{B}_{34} & & & & -1 & & & & & & & \\
9 & & & & & & & \overleftrightarrow{B}_{42} & \overleftrightarrow{B}_{43} & \overleftrightarrow{B}_{44} & & & & & & -1 & & & & & \\
10 & & & & & & & & & & 1 & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
11 & & & & & & & & & & & \overleftrightarrow{B}_{11} & \overleftrightarrow{B}_{12} & \overleftrightarrow{B}_{13} & \overleftrightarrow{B}_{14} & & & & & & \\
12 & & & & & & & & & & & \overleftrightarrow{B}_{21} & \overleftrightarrow{B}_{22} & \overleftrightarrow{B}_{23} & \overleftrightarrow{B}_{24} & & & & & & \\
13 & -1 & & & & & & & & & & \overleftrightarrow{B}_{31} & \overleftrightarrow{B}_{32} & \overleftrightarrow{B}_{33} & \overleftrightarrow{B}_{34} & & & & & & \\
14 & & & -1 & & & & & & & & \overleftrightarrow{B}_{41} & \overleftrightarrow{B}_{42} & \overleftrightarrow{B}_{43} & \overleftrightarrow{B}_{44} & & & & & & \\
15 & & & & & -1 & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
16 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & B_{13} & B_{14} & \\
17 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & & & B_{23} & B_{24} & \\
18 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & & & B_{33} & B_{34} & \\
19 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 & & B_{43} & B_{44} & \\
20 & & & & & & & & & & & & & & & & & -1 & & & 1
\end{array}\right)$$

Із аналізу вектора $\vec{Y}^*(0,l)$ очевидно, що в матриці $A(0,l)$ потрібно обнулити 1, 3, 5, 6, 16 і 17 стовпці. У векторі $\vec{Y}^*(0,l)$ число нульових параметрів дорівнює 6. Стільки ж незалежних параметрів у матриці $\vec{Y}(l)$, так що можна виконати ланцюжок перетворень за схемою (15), згідно з [1]. Підсумовуючи топологічну матрицю C з обнуленою матрицею A_0, отримаємо матрицю стійкості нашої рами (див. метод граничних елементів) [1].

3. Для обчислення визначника матриці A^* методом Гаусса потрібно переставити рядки. Визначивши значення параметра α і задаючи значення P з визначеним кроком, за допомогою персонального комп'ютера отримуємо графік залежності (для $\alpha = 0;\ 0,5;\ 1$) визначника $|A^*(P)|$ (див. рис. 3).

Як можна побачити, характер кривої є аналогічним до графіку залежності $|A^*(P)|$ для стрижневої системи сталої жорсткості [1].

При обчисленнях з кроком розбиття $1/1000000$ і $1/2000000$ значення критичної сили P на шостому знаку після коми не змінювалось, тому зменшення кроку розбиття не має сенсу.

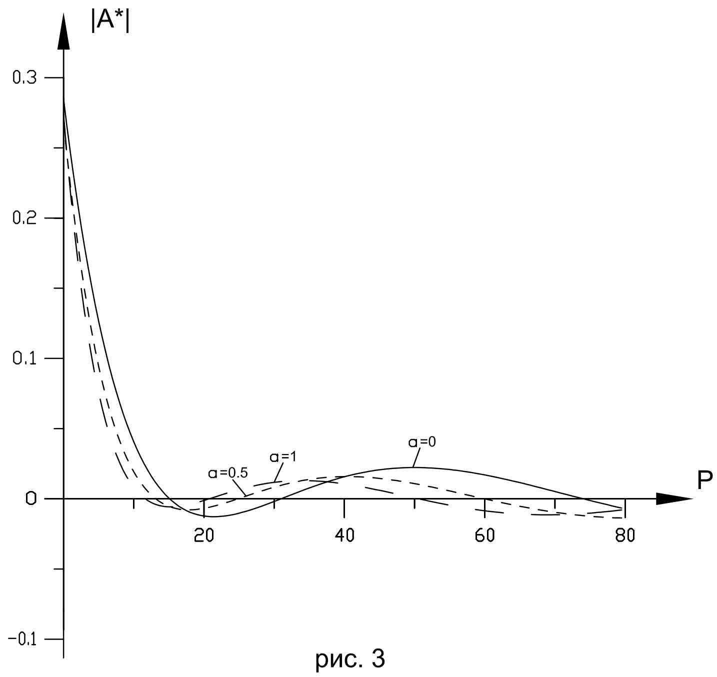

рис. 3

	метод	авторський	авторський	авторський	Метод скінченних елементів			Метод граничних елементів		
Ркр										
		α=0	α=0.5	α=1	α=0	α=0.5	α=1	α=0	α=0.5	α=1
1 Ркр		15,099172	12,164206	10,263299	15.14	–	–	15.1	–	–
2 Ркр		30,978847	25,725842	22,107146	59.32	–	–	30.9	–	–
3 Ркр		73,909025	61,062821	52,257154	–	–	–	73.9	–	–

За значення параметра $\alpha = 0$, отримаємо значення критичної сили для стрижнів постійної жорсткості. Отримані результати узгоджуються з результатами, отриманими класичними методами (див. таблицю). За значень параметра $\alpha = 0,5$; 1 отримані нові числові результати для стрижнів змінної жорсткості.

V. Висновки

Запропоновано новий метод обчислення критичного навантаження за втрати стійкості стрижневої системи з змінною жорсткістю на базі методу граничних елементів, в основу якого покладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальbних рівнянь узагальненими функціями.

Отримані числові результати добре узгоджуються з відомими в літературі.

Зауважимо, що метод відзначається простотою і універсальністю алгоритму та швидкістю збіжності.

Тут розглядається найпростіша класична задача втрати стійкості за сталого навантаження на одному з вузлів стрижневої системи. Однак проілюстрований тут метод апроксимації без ускладнень може бути поширений і на складніші задачі теорії стійкості, а також на динамічні задачі для стрижневих систем за наявності узагальнених факторів.

Література

[1] Баженов В.А., А.Ф. Дащенко , Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничних елементов. – Одеса: Астропринт, 2001 р. – 240 с.

[2] Давидчак О.Р., Тацій Р.М., Ушак Т.І. Розв'язок задач динаміки дискретно-неперервних стрижневих систем методом граничних елементів з апроксимацією коефіцієнтів диференціальних рівнянь. – Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка», Теорія та практика будівництва. – 2004. – №495. – С.62–64.

[3] Давидчак О.Р., Тацій Р.М. Розв'язок задач динаміки і стійкості стержневих систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів. – ZESZYTY NAUKOWE Politechniki Rzeshowskiej. Budownictwo i inzynieria srodowiska. – Rzezow, 2004. – Z.37. – С.57–60.

[4] Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. – М.: Наука, 1968. – 503 с.

[5] Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами. – Л.: Изд.-во Ленингр. ун.-та, 1987. – 225 с.

[6] Строительная механика Динамика и устойчивость сооружений / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.

[7] Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. Науково-учбовий Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача АН України. – Львів, 1994. – 54 с.

[8] Тацій Р.М., Давидчак О.Р. Розрахунок дискретно-неперервних стрижневих систем // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Теорія та практика будівництва. – 2002. – №462. – С.145–149.

[9] Тацій Р.М., Пахолок Б.Б. Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С.27–30.

[10] Тацій Р.М., Іщук В.В., Кісілевич В.В. Про апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь з мірами. // Вісн. Київ. ун-ту: Математика і механіка. – К.: Либідь, 1990. – № 32. – С.128–131.

[11] Тацій Р.М., Пахолок Б.Б. Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С.27–30.

[12] Тацій Р.М., Ушак Т.І. Метод дискретизації в задачах стійкості стрижнів змінної жорсткості / Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка". Теорія та практика будівництва. – 2005. – №545. – С.178–181.

METHOD OF DIGITATION IN PROBLEMS ON RESISTANCE OF ROD SYSTEMS OF CHANGE STIFFNESS

R.M. Tatsij[a], T.I. Ushak[b]

[a] *Lviv State University of Vital Activity Safety*
35 Kleparivska Str., Lviv city, 79007
[b] *LBC „Vash Dim" Lviv city*

Algorithm of calculating the rod systems with change stiffness is developed on the basis of the method of boundary elements. Theory of generalized quazidifferential equations is used for calculating the rod systems. Numerical realization of the language of programming Pascal is made.

Keywords: rod systems, resistance, quazidifferential equations

2000 MSC: 74H10,74H15

УДК: 624.075: 539.3