ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 518, 2004, с. 35–36

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 518, 2004, p. 35–36

ДО ПИТАННЯ АПРОКСИМАЦІЇ ОДНОГО ЯДРА СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

М. Кривцун[a], М. Фис[a, *], І. Лисий[a], М. Грилицький[b]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна
[b] *Дніпропетровський національний університет*
залізничного транспорту

(Отримано 18 листопада 2004 р.)

Уточнено апроксимацію ядра сингулярного інтегрального рівняння для півплощини з прямолінійною тріщиною, перпендикулярною до границі.

Ключові слова: апроксимація, ядро, сингулярний, функція, інтегральне рівняння.

2000 MSC: 34A37

УДК: 519.2, 517.9

Вступ

Проблема розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь першого роду за допомогою апроксимації ядра є актульною, оскільки при вдалій апроксимації можна знайти наближений розв'язок рівняння, тобто формулу обернення. Публікації, в яких досліджено залежність точності розв'язку сингулярних інтегральних рівняннь від точності апроксимації ядра, авторам не відомі. У цій роботі зазначену проблему певною мірою проаналізовано.

Ядро сингулярного рівняння задачі термопружності для площини із прямолінійною тріщиною, перпендикулярною до границі, має вигляд [1]

$$K(t,x)=\frac{8t^2x}{(t-x)(t+x)^3},\ t\geq 0,\ x\geq 0. \tag{1}$$

Функція $tK(t,x)$ є однорідною функцією нульового порядку, тобто є по суті функцією однієї змінної

$$tK(t,x)=f(u)=\frac{8u}{(1-u)(1+u)^3},\ u=\frac{x}{t}, u\geq 0. \tag{2}$$

Наблизимо функцію f(u) найпростішою функцією φ(u), що адекватно відтворює поведінку функції f(u) на кінцях проміжків неперервності, а отримана при цьому апроксимація ядра (1) дає можливість обернення сингулярного інтегрального рівняння першого роду, тобто

$$f(u)\approx\varphi(u)=\frac{au^b}{1-u^c}, \tag{3}$$

де a, b, c – деякі додатні сталі, причому b<c.

Функція f(u) задовольняє умову $f\left(\frac{1}{u}\right)=-u^2f(u)$, внаслідок якої $\int\limits_0^1 f(u)\,du=-\int\limits_1^\infty f(u)\,du$. Вимагаючи виконання аналогічної умови для функції φ(u), отримуємо, що $b=\frac{c}{2}-1$.

Параметри a і c знайдемо із умови рівності деяких інтегральних характеристик функцій f(u) і φ(u), якими, враховуючи властивості цих функцій, логічно вибрати обчислені із точністю O(ε^2) невласні інтеграли

$$\begin{aligned} I(\varepsilon,f)&=\int\limits_0^{1-\varepsilon} f(u)\,du=\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}+O\left(\varepsilon^2\right),\\ I(\varepsilon,\varphi)&=\int\limits_0^{1-\varepsilon}\varphi(u)\,du=\frac{a}{c}\left[\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\ln\left(\frac{c}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}+O\left(\varepsilon^2\right)\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Вимагаючи рівності цих інтегралів, із вказаною точністю знаходимо, що a=c, $c=2\sqrt{e}$.

Отже, враховуючи (2) і (3), знаходимо

$$K(t,x)\approx\frac{cx^{0.5c-1}t^{0.5c}}{t^c-x^c}. \tag{5}$$

По суті справи, аналогічну апроксимацію ядра отримано іншим способом в роботі [1]. Але легко переконатись, що при знайденій у цій роботі сталій $c=\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}$ члени порядку O(1) в інтегралах (4) не збігаються. Хоча порівняно з $c=2\sqrt{e}$ відносна похиб-

*Автор-респондент

ка цієї сталої становить тільки 2%.

З метою дослідження впливу величини сталої на точність апроксимації (4) обчислимо середнє квадратичне відхилення функції f(u) від φ(u), яке з урахуванням їх властивостей можна записати так:

$$I(c) = \int_0^1 \left[f_0(u) - \varphi_0(u)\right]^2 \cdot \left(1+u^2\right) du,$$

де

$$f_0(u) = \frac{u^2+4u-1}{(1+u)^3}, \quad \varphi_0(u) = \frac{c \cdot u^{0.5c-1}}{1-u^c} - \frac{1}{1-u}.$$

При обчисленнях для функції φ_0(u), яка має в точці u=1 усувну особливість, використовувалось асимптотичне зображення

$$\varphi_0(1-\varepsilon) \cong \frac{1}{2} + \frac{10-c^2}{24}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Внаслідок обчислень знайдено, що

$$I\left(2\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 0.001523, \quad I\left(\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}\right) = 0.001773, \qquad (6)$$

тобто середнє квадратичне відхилення апроксимації, знайденої в роботі [1] в 1.18 разів є більшим, а відносна похибка становить 18%. Тому знайдену в роботі апроксимацію можна вважати точнішою. Про це також свідчать обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень

$$k_1 = \sqrt{\frac{2c}{\pi}} \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t^c}}, \quad n = \overline{0,\ 9}, \qquad (7)$$

для крайової тріщини, на берегах якої задані напруження x^n, точні значення яких знайдено в роботі [2].

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Точне	1.1213	0.6828	0.5254	0.4409	0.3867	0.3484	0. 3196	0.2968	0,2782	0,2627
$c=2\sqrt{\mathrm{e}}$	1,1198	0,6828	0,5269	0,4420	0,3870	0,3486	0,3197	0,2969	0,2784	0,2629
$c=\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}$	1,1256	0,6851	0,5269	0,4420	0,3876	0,3491	0,3201	0,2972	0,2786	0,2631

Наведені в таблиці значення k_1 для сталої $c=\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}$ отримані в роботі [1], а для сталої $c=2\sqrt{\mathrm{e}}$ обчислені з використанням формули

$$\int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t^c}} = \frac{c+2(n+1)}{c} \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^c} dt. \qquad (8)$$

при цьому значення k_1 для $c=\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}$, знайдені за формулою (8), збігаються із отриманими в [1].

Варто відзначити той факт, що сталі відрізняються значно більше, ніж коефіцієнти інтенсивності. Аналіз показує, що максимальна відмінність k_1 при n=0 становить всього 0,5%.

Література

[1] Саврук М.П. Напряжения около трещины в упругой полуплоскости // Физ.-хим. механика материалов. – 1975, – 11, – № 5. – с. 59–64.

[2] Stallybrass M.P. A crack perpendicular to an elastic half-plane. // Int. J. Eng. Sci., – 1970, 8, – № 5, – p. 351–362.

TO THE QUESTION OF ONE NUCLEUS APPROXIMATION OF THE SINGULAR INTEGRAL EQUATION

M. Kryvtsun[a], M. Phis[a, *], I. Lisyy[a], M. Hrylytskyy[b]

[a] *Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine
[b] *Dnipropetrovsk National University*
of raiway transportation

Approximation of the nucleus of the singular integral equation for a half-plane with a rectilinear crack perpendicular to the boundary is specified in the paper.

Keywords: approximation, nucleus, singular, function, integral equation.

2000 MSC: 34A37

UDK: 519.2, 517.9

*Corresponding author