ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 518, 2004, с. 29–34

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 518, 2004, p. 29–34

КОНСТРУКЦІЯ ЕЛЕМЕНТІВ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В. Кісілевич, М. Стасюк*, Р. Тацій

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 6 липня 2004 р.)

Встановлюється структура елементів фундаментальної матриці системи диференціальних рівнянь першого порядку, що відповідає квазідиференціальному рівнянню з узагальненими коефіцієнтами, та їх конструктивне зображення у вигляді сплайнів.

Ключові слова: квазідиференціальні рівняння, квазіпохідні, функція Дірака.

2000 MSC: 34A37

УДК: 517.91

I. Структура елементів фундаментальної матриці, що відповідає квазідиференціальному рівнянню

На відкритому інтервалі I(скінченному, чи нескінченному) дійсної осі розглядається коректне[1, 2] однорідне квазідиференціальне рівняння (КДР) q-го порядку, $q = m + n$,

$$L_{mn}\left[y\right] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{n-j} \left(a_{ij}\left(x\right) y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = 0, \quad (1)$$

де коефіцієнти $a_{ij}\left(x\right)$ справджують такі умови:

1) $a_{00}^{-1}\left(x\right)$ — локально обмежена і вимірна в I функція;

2) $a_{i0}\left(x\right), a_{0j}\left(x\right) \in L_2\left(I\right), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$;

3) $a_{ij}\left(x\right) = b'_{ij}\left(x\right)$, $b_{ij}\left(x\right) \in BV_{loc} + (I)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Означення розв'язку КДР (1) можна знайти в роботах [1, 2].

Відомо [2], що функцією Коші КДР (1) називається функція двох змінних $K\left(x, \alpha\right)$, яка за змінною x справджує КДР (1) і початкові умови:

$$K_x^{[i]}\left(\alpha, \alpha\right) = 0, \; i = \overline{0, q-2}, \; K_x^{[q-1]}\left(\alpha, \alpha\right) = 1, \quad (2)$$

де символ $^{[i]}$ означає квазіпохідну [1, 2] i-го порядку за змінною x в сенсі КДР (1).

У роботі [3] встановлюється такий результат: нехай $K^{[i]\{j\}}\left(x, \alpha\right)$ – "мішана квазіпохідна" функції $K\left(x, \alpha\right)$, де символ $^{[i]\{j\}}$ $\left(i = \overline{0, q-1}, \quad j = \overline{0, q-1}\right)$ означає, що від функції $K\left(x, \alpha\right)$ спочатку береться i-та квазіпохідна за змінною x в сенсі вихідного КДР (1), а потім j-та квазіпохідна за змінною α в сенсі спряженого до КДР (1) квазідиференціального рівняння $L^*_{mn}\left[z\right] = 0$.

Нехай

$$Y' = C'Y \quad (3)$$

– система диференціальних рівнянь першого порядку, що відповідає КДР (1), де матриця $C\left(x\right)$ розміру $q \times q$ має елементи з класу $BV^+_{loc}\left(I\right)$ і справджує умову коректності:

$$\left(\Delta C\left(x\right)\right)^2 = 0, \quad \forall x \in I, \quad (4)$$

а $Y\left(x\right) = colon\left(y\left(x\right), y^{[1]}\left(x\right), ..., y^{[q-1]}\left(x\right)\right)$, $q = m + n\left[1, 2\right]$. Тоді фундаментальна матриця (матриця Коші) $B\left(x, \alpha\right)$ системи (3) має таку структуру:

$$B\left(x, \alpha\right) = \begin{pmatrix} K^{\{q-1\}}\left(x, \alpha\right) & K^{\{q-2\}}\left(x, \alpha\right) & \dots & K\left(x, \alpha\right) \\ K^{[1]\{q-1\}}\left(x, \alpha\right) & K^{[1]\{q-2\}}\left(x, \alpha\right) & \dots & K^{[1]}\left(x, \alpha\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K^{[q-1]\{q-1\}}\left(x, \alpha\right) & K^{[q-1]\{q-2\}}\left(x, \alpha\right) & \dots & K^{[q-1]}\left(x, \alpha\right) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

*Автор-респондент

Покажемо, що елементи матриці $B(x,\alpha)$ можна виразити через фундаментальну систему розв'язків [2] КДР (1).

Теорема 1. *Нехай $y_k(x)$, $k=\overline{1,q}$ – довільна фундаментальна система розв'язків КДР (1), а*

$$W(y_1(x), y_2(x), ..., y_q(x)) = W(x)$$

– її квазівронскіан [4]. Тоді

$$K^{[i]\{j\}}(x,\alpha)=\frac{1}{W(\alpha)}\begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) & \dots & y_q(\alpha)\\ y_1^{[1]}(\alpha) & y_2^{[1]}(\alpha) & \dots & y_q^{[1]}(\alpha)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{[q-j-2]}(\alpha) & y_2^{[q-j-2]}(\alpha) & \dots & y_q^{[q-j-2]}(\alpha)\\ y_1^{[i]}(x) & y_2^{[i]}(x) & \dots & y_q^{[i]}(x)\\ y_1^{[q-j]}(\alpha) & y_2^{[q-j]}(\alpha) & \dots & y_q^{[q-j]}(\alpha)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{[q-1]}(\alpha) & y_2^{[q-1]}(\alpha) & \dots & y_q^{[q-1]}(\alpha) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

де рядок $\begin{pmatrix} y_1^{[i]}(x) & y_2^{[i]}(x) & \dots & y_q^{[i]}(x)\end{pmatrix}$ *має номер $q-j$ (або $j+1$, рахуючи знизу).*

□ *Доведення.* Позначимо елементи матриці (5) через $C_{ij}(x,\alpha)$ і зауважимо, що $K^{[i]\{j\}}(x,\alpha)\equiv$ $\equiv C_{i+1,q-j}(x,\alpha)$, $\quad i,j=\overline{0,q-1}$. Тоді, якщо

$$Y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_q(x)\\ y_1^{[1]}(x) & y_2^{[1]}(x) & \dots & y_q^{[1]}(x)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{[q-1]}(x) & y_2^{[q-1]}(x) & \dots & y_q^{[q-1]}(x) \end{pmatrix} \tag{7}$$

інтегральна матриця системи диференціальних рівнянь (3), то, як відомо[5],

$$B(x,\alpha)=Y(x)Y^{-1}(\alpha)=\frac{1}{W(\alpha)}Y(x)A(\alpha), \tag{8}$$

де $A(\alpha)=\|a_{lk}(\alpha)\|$, а елементи $a_{lk}(x)$, $\quad l,k=\overline{1,q}$ — алгебраїчні доповнення до елементів $y_k^{[l-1]}(x)$ інтегральної матриці (7). З (8) випливає, що

$$K^{[i]\{j\}}(x,\alpha)\equiv C_{i+1,q-j}(x,\alpha)= \\ =\frac{1}{W(\alpha)}\sum_{k=1}^{q} y_k^{[i]}(x)\,a_{q-j\quad k}(\alpha).$$

Останнє співвідношення є розкладом визначника (6) за елементами $(q-j)$-го рядка. ■

Наслідок 1

$$K(x,\alpha)=\frac{1}{W(\alpha)}\begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) & \dots & y_q(\alpha)\\ y_1^{[1]}(\alpha) & y_2^{[1]}(\alpha) & \dots & y_q^{[1]}(\alpha)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{[q-2]}(\alpha) & y_2^{[q-2]}(\alpha) & \dots & y_q^{[q-2]}(\alpha)\\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_q(x) \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Зауважимо, що (9) — це "квазідиференціальний" аналог відомої формули для функції Коші звичайного диференціального рівняння [6].

Наслідок 2

$$K^{\{j\}}(x,\alpha)=\frac{1}{W(\alpha)}\begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) & \dots & y_q(\alpha)\\ y_1^{[1]}(\alpha) & y_2^{[1]}(\alpha) & \dots & y_q^{[1]}(\alpha)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{[q-j-2]}(\alpha) & y_2^{[q-j-2]}(\alpha) & \dots & y_q^{[q-j-2]}(\alpha)\\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_q(x)\\ y_1^{[q-j]}(\alpha) & y_2^{[q-j]}(\alpha) & \dots & y_q^{[q-j]}(\alpha)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{[q-1]}(\alpha) & y_2^{[q-1]}(\alpha) & \dots & y_q^{[q-1]}(\alpha) \end{vmatrix}, \qquad j=\overline{0,q-1} \tag{10}$$

утворюють нормальну для $x=\alpha$ фундаментальну систему розв'язків КДР (1). Це випливає з того факту, що $K^{\{j\}}(x,\alpha)$, $\quad j=\overline{0,q-1}$ є елементами першого рядка матриці Коші (5).

II. Конструктивна побудова елементів фундаментальної матриці

Уточнимо тепер структуру коефіцієнтів КДР (1). Припустимо, що $a_{00}(x)$, $a_{i0}(x)$, $a_{0j}(x)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ – кусково-неперервні на інтервалі $[a,b)$ функції, які можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} a_{00}(x) &= \sum_{s=0}^{p} a_{00}^{s}(x)\,\theta_s(x), \\ a_{i0}(x) &= \sum_{s=0}^{p} a_{i0}^{s}(x)\,\theta_s(x), \\ a_{0j}(x) &= \sum_{s=0}^{p} a_{0j}^{s}(x)\,\theta_s(x), \end{aligned} \tag{11}$$

де $x_1,...,x_s,...,x_p(a=x_0<x_1<x_2<...<x_s<...<x_p<x_{p+1}=b)$ — точки розривів коефіцієнтів $a_{00}(x)$, $a_{i0}(x)$, $a_{0j}(x)$, а

$$\theta_s(x)=\begin{cases} 1, & x\in[x_s,x_{s+1}), \\ 0, & x\notin[x_s,x_{s+1}) \end{cases} \tag{12}$$

– характеристична функція проміжку $[x_s,x_{s+1})$, $s=\overline{0,p}$. Коефіцієнти ж $a_{ij}(x)$, $i,j\neq 0$ мають такий вигляд:

$$a_{ij}(x)=\alpha_{ij}(x)+\sum_{s=1}^{p}\beta_{ij}^{s}\delta(x-x_s), \tag{13}$$

де $\alpha_{ij}(x)=\sum\limits_{s=0}^{p}a_{ij}^{s}(x)\,\theta_s(x)$ – кусково-неперервна компонента коефіцієнта $a_{ij}(x)$, а $\delta(x-x_s)$ – функція Дірака з носієм в точці x_s, β_{ij}^{s} – дійсні числа. Зауважимо [7], що структура коефіцієнтів (11), (13) дозволяє встановити й структуру фундаментальної системи розв'язків $y_1(x), y_2(x), \dots y_q(x)$ КДР (1) та її квазіпохідних і подати їх у вигляді сплайнів

$$y_k^{[i]}(x)=\sum_{s=0}^{p}y_{ks}^{[i]}(x)\,\theta_s(x), \quad k=\overline{1,q}\ , \quad i=\overline{0,q-1}, \tag{14}$$

де функції $y_{ks}^{[i]}(x)$ – неперервні на проміжках $[x_s,x_{s+1})$.

Використовуючи вигляд функцій (14), можемо встановити структуру елементів $K^{[i]\{j\}}(x,\alpha)$ фундаментальної матриці (5) в квадраті $a\le x<b$, $a\le\alpha<b$.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти КДР (1) справджують умови (11), (13) і довільна фундаментальна система розв'язків* $y_1(x), y_2(x), ..., y_q(x)$ *цього рівняння та її квазіпохідні* $y_1^{[i]}(x), y_2^{[i]}(x), ..., y_q^{[i]}(x)$, $i=\overline{0,q-1}$, *зображаються у вигляді (14), тобто*

$$y_k^{[i]}(x)=\sum_{s=0}^{p}y_{ks}^{[i]}(x)\,\theta_s(x), \qquad k=\overline{1,q}\ , \qquad i=\overline{0,q-1}.$$

Тоді

$$K^{[i]\{j\}}(x,\alpha)=\sum_{s=0}^{p}\sum_{l=0}^{p}K_{sl}^{[i]\{j\}}(x,\alpha)\,\theta_{sl}(x,\alpha), \tag{15}$$

де

$$K_{sl}^{[i]\{j\}}(x,\alpha)=\frac{1}{W_l(\alpha)}\begin{vmatrix} y_{1l}(\alpha) & y_{2l}(\alpha) & \dots & y_{ql}(\alpha) \\ y_{1l}^{[1]}(\alpha) & y_{2l}^{[1]}(\alpha) & \dots & y_{ql}^{[1]}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{1l}^{[q-j-2]}(\alpha) & y_{2l}^{[q-j-2]}(\alpha) & \dots & y_{ql}^{[q-j-2]}(\alpha) \\ y_{1s}^{[i]}(x) & y_{2s}^{[i]}(x) & \dots & y_{qs}^{[i]}(x) \\ y_{1l}^{[q-j]}(\alpha) & y_{2l}^{[q-j]}(\alpha) & \dots & y_{ql}^{[q-j]}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{1l}^{[q-1]}(\alpha) & y_{2l}^{[q-1]}(\alpha) & \dots & y_{ql}^{[q-1]}(\alpha) \end{vmatrix}, \tag{16}$$

$W_l(\alpha)$ *– квазівронскіан фундаментальної системи розв'язків КДР (1) на проміжку* $[x_l,x_{l+1})$, *а* $\theta_{sl}(x,\alpha)$ *– характеристична функція прямокутника* $\Omega_{sl}=\{(x,\alpha):\ x_s\le x<x_{s+1},\ x_l\le\alpha<x_{l+1}\}$, $s,l=\overline{0,p}$, *а саме:*

$$\theta_{sl}(x,\alpha)=\begin{cases} 1, & (x,\alpha)\in\Omega_{sl}, \\ 0, & (x,\alpha)\notin\Omega_{sl}. \end{cases} \tag{17}$$

□ *Доведення.* Припустимо спочатку, що сплайн (14) має лише два доданки $\left(s=\overline{0,1}\right)$. Тоді за теоремою 1 маємо

$$K^{[i]\{j\}}(x,\alpha)=\frac{1}{W(\alpha)}\sum_{k=1}^{q}y_k^{[i]}(x)\left(\sum_{l=0}^{1}\Delta_{kl}^{j}(\alpha)\,\theta_l(\alpha)\right)=$$

$$=\frac{1}{W(\alpha)}\sum_{k=1}^{q}\left(\left(\sum_{s=0}^{1}y_{ks}^{[i]}(x)\,\theta_s(x)\right)\left(\sum_{l=0}^{1}\Delta_{kl}^{j}(\alpha)\,\theta_l(\alpha)\right)\right)= \tag{18}$$

$$=\sum_{s=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}\left(\sum_{k=1}^{q}y_{ks}^{[i]}(x)\,\Delta_{kl}^{j}(\alpha)\,\frac{1}{W_l(\alpha)}\right)\theta_s(x)\,\theta_l(\alpha),$$

де

$$\Delta_{kl}^{j}(\alpha)=\begin{vmatrix} y_{1l}(\alpha) & \dots & y_{k-1\;l}(\alpha) & y_{k+1\;l}(\alpha) & \dots & y_{ql}(\alpha)\\ y_{1l}^{[1]}(\alpha) & \dots & y_{k-1\;l}^{[1]}(\alpha) & y_{k+1\;l}^{[1]}(\alpha) & \dots & y_{ql}^{[1]}(\alpha)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_{1l}^{[q-j-2]}(\alpha) & \dots & y_{k-1\;l}^{[q-j-2]}(\alpha) & y_{k+1\;l}^{[q-j-2]}(\alpha) & \dots & y_{ql}^{[q-j-2]}(\alpha)\\ y_{1l}^{[q-j]}(\alpha) & \dots & y_{k-1\;l}^{[q-j]}(\alpha) & y_{k+1\;l}^{[q-j]}(\alpha) & \dots & y_{ql}^{[q-j]}(\alpha)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_{1l}^{[q-1]}(\alpha) & \dots & y_{k-1\;l}^{[q-1]}(\alpha) & y_{k+1\;l}^{[q-1]}(\alpha) & \dots & y_{ql}^{[q-1]}(\alpha) \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{W(\alpha)}=\sum_{l=0}^{1}\frac{1}{W_l(\alpha)}\theta_l(\alpha).$$

Позначимо $\sum_{k=1}^{q}y_{ks}^{i}(x)\,\Delta_{kl}^{j}(\alpha)\,\frac{1}{W_l(\alpha)}$ через $K_{sl}^{[i]\{j\}}(x,\alpha)$ і зауважимо, що добуток $\theta_s(x)\,\theta_l(\alpha)$ є характеристичною функцією (17). Тоді, використавши (18), приходимо до зображення елементів фундаментальної матриці $K^{[i]\{j\}}(x,\alpha)$ у вигляді двовимірних сплайнів (15) з компонентами $K_{sl}^{[i]\{j\}}(x,\alpha)$, які є розкладами визначників (16) за елементами $(q-j)$-го рядка. На завершення доведення досить скористатись методом математичної індукції за індексом s. ■

Властивості функції $K(x,\alpha)$ та її квазіпохідних для КДР (1) детально описані у [8].

III. Побудова фундаментальної системи розв'язків КДР (1)

Попередні викладення передбачали, що фундаментальна система розв'язків КДР (1) – відома. Покажемо, як її знайти за умов (11), (13) на коефіцієнти рівняння $a_{ij}(x)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$. Для цього розглянемо систему диференціальних рівнянь першого порядку (3), що відповідає КДР (1). Зауважимо, що стрибки $\Delta C(x)$ матриці $C(x)$ з (3) за умов (11) і (13) на коефіцієнти КДР (1) є тільки в носіях x_s функцій Дірака $\delta(x-x_s)$. Поряд з системою (3) розглянемо систему диференціальних рівнянь першого порядку, що відповідає КДР (1) з коефіцієнтами $a_{ij}(x)=\alpha_{ij}(x)$, які не містять узагальнених складових (див. формулу (13)). Цю систему можна записати [9] у вигляді

$$Y'=\left(\sum_{s=0}^{p}A_s(x)\,\theta_s(x)\right)Y, \tag{19}$$

де матриці $A_s(x)$ – неперервні на проміжках $[x_s,x_{s+1})$, а $\theta_s(x)$ – характеристичні функції (12) цих проміжків. Система (19) індукує на кожному з проміжків $[x_s,x_{s+1})$ систему диференціальних рівнянь

$$Y'=A_s(x)\,Y,\qquad s=\overline{0,p}. \tag{20}$$

Позначимо матрицю Коші системи (20) через $\tilde{B}_s(x,\alpha)$ і вважатимемо її відомою для довільного $s=\overline{0,p}$. Тоді рекурентні співвідношення

$$B_0(x,a)=\tilde{B}_0(x,a),\qquad x\in[a,x_1)$$

$$B_s(x,a)=\tilde{B}_s(x_1,x_s-0)\,(E+\Delta C(x_s))\,B_{s-1}(x_s,a),\qquad x\in[x_s,x_{s+1}) \tag{21}$$

реалізують склеювання розв'язків [10] системи диференціальних рівнянь (3) в точках x_s і дозволяють подати її матрицю Коші $B(x,\alpha)$ на проміжку $[a,b)$ у вигляді сплайну за змінною x, тобто

$$B(x,a)=\sum_{s=0}^{p}B_s(x,a)\,\theta_s(x). \tag{22}$$

Елементи першого рядка матриці (22) утворюють нормальну в точці $x=a$ фундаментальну систему розв'язків КДР (1), а наступні рядки – її квазіпохідні.

IV. Приклад побудови функції Коші квазідиференціального рівняння другого порядку

Знайдемо функцію Коші $K(x,\alpha)$ частково виродженого КДР

$$(a(x)\,y')'+M\delta(x-x_1)\,y=0,\qquad x\in[0,b) \tag{23}$$

з коефіцієнтом

$$a(x)=\sum_{s=0}^{1}a_s(x)\,\theta_s(x),$$

де $a_s^{-1}(x)$ — неперервні функції на проміжках $[x_s,x_{s+1})$, $\quad s=\overline{0,1},\quad 0=x_0<x_1<b.$

Спочатку відшукаємо фундаментальну систему розв'язків КДР (23) за схемою попереднього пункту. Система (3) в цьому випадку має матрицю C' вигляду

$$C'(x)=\begin{pmatrix}0 & a^{-1}(x)\\ -M\delta(x-x_1) & 0\end{pmatrix},$$

тому матриця $C(x)$має стрибок $\Delta C(x)$ тільки в точці x_1, тобто

$$\Delta C(x_1)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -M & 0\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриця $\Delta C(x)$ справджує умову коректності (4), а матриці A_s з формули (20) для системи диференціальних рівнянь першого порядку, що відповідає КДР (23) мають вигляд

$$A_s(x)=\begin{pmatrix}0 & a_s^{-1}(x)\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad s=\overline{0,1}.$$

Якщо ввести позначення

$$\varphi_s(x,\alpha)=\int_{\alpha}^{x}a_s^{-1}(t)\,dt,$$

то матриці Коші $\tilde{B}_s(x,\alpha)$ легко знаходяться, а саме:

$$\tilde{B}_s(x,\alpha)=\begin{pmatrix}1 & \varphi_s(x,\alpha)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad s=\overline{0,1}.$$

Записавши рекурентні співвідношення (21) в цьому випадку, отримаємо

$$B_0(x,0)=\begin{pmatrix}1 & \varphi_0(x,0)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad x\in[0,x_1),$$

$$B_1(x,0)=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1(x,x_1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -M & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \varphi_0(x_1,0)\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(x) & \alpha_2(x)\\ \alpha_1^{[1]}(x) & \alpha_2^{[1]}(x)\end{pmatrix},\qquad x\in[x_1,b),$$

де $\alpha_1(x)=1-M\varphi_1(x,x_1)$, $\alpha_2(x)=\varphi_0(x_1,0)+\varphi_1(x,x_1)(1-M\varphi_0(x_1,0))$, $\alpha_1^{[1]}(x)=-M$, $\alpha_2^{[1]}(x)=1-M\varphi_0(x_{1,0})$.

Отже, матрицю Коші для КДР (23) можна подати у вигляді

$$B(x,0)=\begin{pmatrix}1 & \varphi_0(x,0)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\theta_0(x)+\begin{pmatrix}\alpha_1(x) & \alpha_2(x)\\ \alpha_1^{[1]}(x) & \alpha_2^{[1]}(x)\end{pmatrix}\theta_1(x),$$

а тому функції

$$y_1(x)=1\cdot\theta_0(x)+(1-M\varphi_1(x,x_1))\,\theta_1(x),$$

$$y_2(x)=\varphi_0(x,0)\,\theta_0(x)+[\varphi_0(x_1,0)+\varphi_1(x,x_1)(1-M\varphi_0(x_1,0))]\,\theta_1(x) \tag{24}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків КДР (23), нормальну в точці$x=0$.

Використовуючи вигляд фундаментальної системи розв'язків (24) і теорему 2, знайдемо компоненти сплайну (15) за формулами (16)

$$K_{00}(x,\alpha)=\begin{vmatrix}1 & \varphi_0(\alpha,0)\\ 1 & \varphi_0(x,0)\end{vmatrix}=\varphi_0(x,\alpha),$$

$$K_{10}(x,\alpha)=\begin{vmatrix}1 & \varphi_0(\alpha,0)\\ 1-M\varphi_1(x,x_1) & \varphi_0(x_1,0)+\varphi_1(x,x_1)(1-M\varphi_0(x_1,0))\end{vmatrix}=$$

$$=\varphi_0(x_1,\alpha)+\varphi_1(x,x_1)-M\varphi_0(x_1,\alpha)\,\varphi_1(x,x_1),$$

$$K_{01}(x,\alpha) = \begin{vmatrix} 1 - M\varphi_1(\alpha, x_1) & \varphi_0(x_1,0) + \varphi_1(\alpha,x_1)(1 - M\varphi_0(x_1,0)) \\ 1 & \varphi_0(x,0) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi_0(x,x_1) - \varphi_1(\alpha,x_1) - M\varphi_0(x,x_1)\varphi_1(\alpha,x_1),$$

$$K_{11}(x,\alpha) = \begin{vmatrix} 1 - M\varphi_1(\alpha, x_1) & \varphi_0(x_1,0) + \varphi_1(\alpha,x_1)(1 - M\varphi_0(x_1,0)) \\ 1 - M\varphi_1(x, x_1) & \varphi_0(x_1,0) + \varphi_1(x,x_1)(1 - M\varphi_0(x_1,0)) \end{vmatrix} = \varphi_1(x,\alpha).$$

Отже, функцію $K(x,\alpha)$ КДР (23) в квадраті $0 \le x < b, \quad 0 \le \alpha < b$ можна подати у вигляді сплайну

$$K(x,\alpha) = \varphi_0(x,\alpha)\theta_{00}(x,\alpha) + [\varphi_0(x_1,\alpha) + \varphi_1(x,x_1) - M\varphi_0(x_1,\alpha)\varphi_1(x,x_1)]\theta_{10}(x,\alpha) +$$

$$+ [\varphi_0(x,x_1) - \varphi_1(\alpha,x_1) - M\varphi_0(x,x_1)\varphi_1(\alpha,x_1)]\theta_{01}(x,\alpha) + \varphi_1(x,\alpha)\theta_{11}(x,\alpha).$$

Зауважимо, що зображення функції $K(x,\alpha)$ у вигляді сплайну (15) дозволяє конструктивно будувати розв'язок неоднорідного рівняння $L_{mn}[y] = f(x)$.

Література

[1] Стасюк М.Ф., Таций Р.М. Корректные дифференциальные уравнения с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та "Дифференциальные уравнения и их приложения". – 1988 .– № 222. – С. 89–90.

[2] Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння // АНУ ІППММ ім. Я.С. Підстригача. – Препринт № 2–94. – 1994. – 53 С.

[3] Тацій Р.М., Пахолок Б.Б. Структура фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 25–28.

[4] Шин Д.Ю. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – 7(49). – № 3. – С. 479–532.

[5] Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко П.С. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища школа. 1974. – 474 С.

[6] Коддингтон Е.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изво ИЛ. 1958. – 474 С.

[7] Стасюк М.Ф. Структура розв'язків звичайних диференціальних і квазідиференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1982. – № 12. – С.33–36.

[8] Тацій Р.М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами // Автореф. дис. ... д-ра ф.-м.наук. 01.01.02. Львів. держ. ун-т ім. І. Франка. – Львів. – 1994. – 37 С.

[9] Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – Львів. Видавництво НУ "Львівська політехніка". – 2001. – 244 С.

[10] Стасюк М.Ф. Неклассический интеграл Римана-Стильтьеса и его применение в теории линейных систем // Львов. – 1985. – 25 С.– Деп. в Укр. НИИНТИ, № 2383.

ON CONSTRUCTION OF ELEMENTS OF FUNDAMENTAL MATRIX FOR QUASI-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GENERALIZED COEFFICIENTS

V. Kisilevich, M. Stasyuk*, R. Tacij

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

The structure of elements of the fundamental matrix of the system of differential equations of 1-st order with generalized coefficients and their representation as splines are established.

Keywords: quasi-differential equations, quasi-derivatives, Dirac function.

2000 MSC: 34A37

UDK: 517.91

*Corresponding author