ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.643 № 643, (2009) с. 53–56

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 53–56

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДЛЯ ІНВАРІАНТНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ОПЕРАТОРОМ ЛЕЖАНДРА НА РІМАНОВИХ МНОГОВИДАХ

І. Конет[a], М. Ленюк [b]

[a] *Кам'янець-Подільський державний університет*
вул. Огієнко,61, 32300, Кам'янець-Подільський, Україна
[b] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*
вул. Коцюбинського, 2, 58012, Чернівці, Україна

(Отримано 29 жовтня 2008 р.)

Методом інтегральних перетворень з невідокремленими змінними на ріманових многовидах для інваріантних еліптичних рівнянь з узагальненим оператором Лежандра побудовано фундаментальний розв'язок.

Ключові слова: оператор Лежандра, ріманів многовид, фундаментальний розв'язок, інтегральне перетворення, інваріантні еліптичні рівняння

2000 MSC: 30F20, 44A15, 44A45

УДК: 517.944

I. Аналіз публікацій, в яких започатковано розв'язання проблеми. Новизна одержаних результатів

Нехай E_n n-вимірний евклідів простір, а $\mathcal{R}_2^{(m)}$ – ріманова поверхня функції $w = \sqrt[m]{z}$ ($z = x_1 + ix_2$, $i^2 = -1$). Якщо під $\mathcal{R}_2^{(\infty)}$ розуміти ріманову поверхню функції

$$w = \ln z = \lim_{m\to\infty} m(\sqrt[m]{z} - 1),$$

то для $m \in [2,\infty]$ визначимо ріманів многовид $\mathcal{R}_n^{(m)} = \mathcal{R}_2^{(m)} \times E_{n-2}$. Змінна точка в $\mathcal{R}_n^{(m)}$ має координати $(r, \varphi, x_3, x_4, \dots, x_n)$, а фіксована $(\rho, \varphi_0, \xi_3, \xi_4, \dots, \xi_n)$.

Говоритимемо, що точка з полярними координатами (r,φ) лежить на першому листі $\mathcal{R}_{2,1}^{(m)}$ ріманової поверхні, якщо $|\varphi| < \pi$, і, взагалі, $(k+1)$-му листі $\mathcal{R}_{2,(k+1)}^{(m)}$ $(k = 1, 2, \dots, m-1)$, якщо $(2k-1)\pi < < \varphi < (2k+1)\pi$.

У роботі [1] А.Ф.Шестопалом запроваджено пряме S_{nm} й обернене S_{nm}^{-1} інтегральне перетворення з невідокремленими змінними:

$$S_{nm}[f(\xi)] = \int\limits_{\mathbb{R}_n^{(m)}} f(\xi)\Phi_{nm}(\lambda, R(x,\xi),$$

$$\varphi - \varphi_0)d\xi \equiv \tilde{f}_{nm}(\lambda, x), \qquad (1)$$

$$S_{nm}^{-1}[\tilde{f}_{nm}(\lambda,x)] = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty \tilde{f}_{nm}(\lambda,x)\times$$

$$\times\lambda^{n-1}d\lambda \equiv f(x). \qquad (2)$$

У формулах (1), (2) ω_n – величина площі одиничної сфери в E_n,

$$\Phi_{nm}(\lambda, R(x,\xi), \varphi-\varphi_0) = j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\times$$

$$\times J(\varphi-\varphi_0) - \frac{1}{2\pi m}\int\limits_0^\infty j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R_1)\times$$

$$\times K_m(\beta, \varphi-\varphi_0)d\beta,$$

$$R(x,\xi) = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0) +$$

$$+\sum_{k=3}^n (x_k - \xi_k)^2,$$

$$R_1(x,\xi,\beta) = r^2 + \rho^2 + 2r\rho\,\mathrm{ch}\,\beta +$$

$$+\sum_{k=3}^n (x_k-\xi_k)^2,$$

$$K_m(\beta,\varphi) = \frac{\sin\frac{\pi+\varphi}{m}}{\mathrm{ch}\frac{\beta}{m} - \cos\frac{\pi+\varphi}{m}} +$$

$$+\frac{\sin\frac{\pi-\varphi}{m}}{\mathrm{ch}\frac{\beta}{m} - \cos\frac{\pi-\varphi}{m}},$$

$$K_\infty(\beta,\varphi) = \frac{\pi+\varphi}{\beta^2 + (\pi+\varphi)^2} +$$

$$+\frac{\pi-\varphi}{\beta^2+(\pi-\varphi)^2},$$

$j_\nu(x) = 2^\nu\Gamma(\nu+1)x^{-\nu}J_\nu(x)$ – нормована функція Бесселя 1-го роду,

$$J(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (r,\varphi) \in \mathcal{R}_{2,1}^{(m)}, \\ 0, & \text{якщо } (r,\varphi) \overline{\in} \mathcal{R}_{2,1}^{(m)}. \end{cases}$$

В основі застосувань запроваджених формулами (1), (2) інтегральних перетворень з невідокремленими змінними лежить основна тотожність

$$S_{nm}[\Delta_n[f(\xi)]] \equiv S_{nm}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2}\right] =$$

$$= -\lambda^2 \tilde{f}_{nm}(\lambda, x). \qquad (3)$$

У роботі [2] запроваджено на полярній вісі $y \geq 0$ інтегральне перетворення типу Мелера-Фока 1-го роду, породжене узагальненим диференціальним оператором Лежандра.

Поєднання цих інтегральних перетворень дозволило визначити новий клас інтегральних перетворень з невідокремленими змінними. Це дало можливість побудувати фундаментальний розв'язок (а, отже, й розв'язок) для введеного в розгляд авторами інваріантного відносно групи обертань еліптичного рівняння з узагальненим оператором Лежандра (Λ_μ-еліптичні рівняння).

Наведений приклад, ілюструючи запропонований метод, є новим результатом в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

II. Основний матеріал дослідження

Розглянемо в евклідовому просторі $E_{n+1}^{+} = \{(x, y) : x \in E_n, y \in (0, \infty)\}$ інваріантне відносно групи обертань $O(E_n)$ еліптичне рівняння з узагальненим оператором Лежандра

$$L[u] = \sum_{k=0}^{l} A_k(\Delta_n, \Lambda_{(\mu)})u = -f(x, y), \qquad (4)$$

де $A_l = I$, Δ_n – n-вимірний оператор Лапласа, $\Lambda_{(\mu)}$ – узагальнений оператор Лежандра:

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\right); (\mu) = (\mu_1, \mu_2); \mu_1 \geq \mu_2 \geq 0.$$

Вважаємо, що $A_k(z_1, z_2)$ зображаються всюди збіжними рядами в просторі $\mathbb{C}^2$ комплексних змінних (z_1, z_2).

Згідно з роботою [2] запровадимо на полярній осі $y \geq 0$ пряме $\mathcal{M}_{(\mu);10}$ та обернене $\mathcal{M}_{(\mu);10}^{-1}$ узагальнені інтегральні перетворення типу Мелера-Фока 1-го роду:

$$\mathcal{M}_{(\mu);10}[g(y)] = \int_0^\infty g(y) P_{-1/2+i\tau}^{\mu_1,\mu_2}(\operatorname{ch} y)\times$$

$$\times \operatorname{sh} y dy \equiv \tilde{g}(\tau), \qquad (5)$$

$$\mathcal{M}_{(\mu);10}^{-1}[\tilde{g}(\tau)] = \int_0^\infty \tilde{g}(\tau) P_{-1/2+i\tau}^{\mu_1,\mu_2}(\operatorname{ch} y)\times$$

$$\times \Omega_{(\mu)}(\tau) d\tau \equiv g(y), \qquad (6)$$

$$\mathcal{M}_{(\mu);10}[\Lambda_{(\mu)}[g]] = -\tau^2 \tilde{g}(\tau). \qquad (7)$$

У рівностях (5), (6) бере участь узагальнена приєднана функція Лежандра 1-го роду $P_{-1/2+i\tau}^{\mu_1,\mu_2}(\operatorname{ch} y)$ і спектральна густина

$$\Omega_{(\mu)}(\tau) = \tau 2^{\mu_1-\mu_2}\frac{\operatorname{sh} 2\pi\tau}{2\pi^2}\times$$

$$\times \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_1+\mu_2}{2} + i\tau\right)\right|^2 \times$$

$$\times \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_1-\mu_2}{2} + i\tau\right)\right|^2,$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функція Ейлера.

Застосуємо до рівняння (4) інтегральні оператори S_{nm} та $\mathcal{M}_{(\mu);10}$. Внаслідок тотожностей (3) та (7) одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{k=0}^{l} A_k(-\lambda^2, -\tau^2)\approx{u}(\lambda, \tau) = -\approx{f}_{nm}(\lambda, \tau).$$

Звідси знаходимо:

$$\approx{u}_{nm}(\lambda, \tau) = -\frac{\approx{f}_{nm}(\lambda, \tau)}{P_l(\lambda^2, \tau^2)},$$

$$P_l(\lambda^2, \tau^2) = \sum_{k=0}^{l} A_k(-\lambda^2, -\tau^2) \neq 0 \qquad (8)$$

в силу еліптичності рівняння.

У результаті застосування до функції $\approx{u}_{nm}(\lambda, \tau)$, визначеної формулою (8), операторів S_{nm}^{-1} та $\mathcal{M}_{(\mu);10}^{-1}$ згідно з правилами (2) та (6) маємо єдиний розв'язок рівняння (4)

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}_n^{(m)}} \int_0^\infty E_{nm,(\mu)}(x, \xi; y, \eta)\times$$

$$\times f(\xi, \eta) \operatorname{sh} \eta d\eta d\xi. \qquad (9)$$

Тут бере участь фундаментальна функція

$$E_{nm;(\mu)}(x, \xi; y, \eta) =$$

$$= -\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi_{nm}(\lambda, R(x, \xi), \varphi - \varphi_0)\times$$

$$\times P_{-1/2+i\tau}^{\mu_1,\mu_2}(\operatorname{ch} y) P_{-1/2+i\tau}^{\mu_1,\mu_2}(\operatorname{ch} \eta)\Omega_{(\mu)}(\tau)\times$$

$$\times P_l^{-1}(\lambda^2, \tau^2)\lambda^{n-1} d\lambda d\tau \qquad (10)$$

диференціального оператора L на рімановому многовиді $\overset{+}{\mathcal{R}}\,{}_{n+1}^{(m)} = \mathcal{R}_2^{(m)} \times E_{n-2} \times E_1^{+}$,

$$E_{n-2} = \{(x_3, x_4, \ldots, x_n);$$

$$x_j \in (-\infty, +\infty); j = \overline{3, n}\},$$

$$E_1^{+} = \{y : y \in (0, \infty)\}.$$

Приклад. Для стаціонарного рівняння теплопровідності

$$(\Delta_n + \Lambda_{(\mu)})u = -f(x, y), \tag{11}$$

многочлен

$$P_l(\lambda^2, \tau^2) = -(\lambda^2 + \tau^2),$$

а фундаментальна функція

$$E_{nm,(\mu)}(x, \xi; y, \eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_{nm}(\lambda, R(x, \xi), \varphi - \varphi_0) \times \tag{12}$$

$$\times P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} y) P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) \Omega_{(\mu)}(\tau) \times \frac{\lambda^{n-1} d\lambda d\tau}{\lambda^2 + \tau^2}.$$

Відомо [2], що

$$\int_0^\infty P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} y) P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) \times$$

$$\times \frac{\Omega_{(\mu)}(\tau) d\tau}{\lambda^2 + \tau^2} = G_{(\mu)}(y, \eta, \lambda) \equiv B_{(\mu)}(\lambda) \times$$

$$\times \begin{cases} P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} y) \mathcal{L}^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} \eta), \\ P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} \eta) \mathcal{L}^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} y), \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 0 < y < \eta < \infty, \\ 0 < \eta < y < \infty. \end{array} \tag{13}$$

У формулі (13) $\mathcal{L}^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} y) = \frac{2}{\pi} e^{-i\mu_1\pi} \theta^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} y)$, $\theta^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} y)$ – узагальнена приєднана функція Лежандра 2-го роду [2],

$$B_{(\mu)}(\lambda) = \frac{\pi}{2} 2^{\mu_1 - \mu_2} \frac{\Gamma(1/2 + \lambda - \nu^+)}{\Gamma(1/2 + \lambda + \nu^+)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(1/2 + \lambda - \nu^-)}{\Gamma(1/2 + \lambda + \nu^-)}, \quad \nu^\pm = \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2).$$

В силу співвідношення (13) рівність (12) набуває вигляду

$$E_{nm,(\mu)}(x, \xi; y, \eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \times$$

$$\times \int_0^\infty \Phi_{nm}(\lambda, R(x, \xi), \varphi - \varphi_0) \times$$

$$\times G_{(\mu)}(y, \eta, \lambda) \lambda^{n-1} d\lambda. \tag{14}$$

Рівності (10), (14) визначають структуру m-розгалужених фундаментальних розв'язків. Для $m = \infty$ треба в рівностях (10), (14) ядро $\Phi_{nm}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0)$ замінити на ядро

$$\Phi_{n,(\infty)} = j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R) J(\varphi - \varphi_0) -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R_1) K_\infty(\beta, \varphi - \varphi_0) d\beta. \tag{15}$$

Тоді матимемо

$$E_{n,(\infty)}(x, \xi; y, \eta) =$$

$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_{n,(\infty)}(\lambda, R(x, \xi), \varphi - \varphi_0) \times$$

$$\times P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} y) P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) \Omega_{(\mu)}(\tau) \times$$

$$\times \frac{\lambda^{n-1} d\lambda d\tau}{\lambda^2 + \tau^2}.$$

Точку, яка лежить в k-му екземплярі $\overset{+}{\mathcal{R}}{}^{(m)}_{n+1,(k)}$ ріманового многовиду $\overset{+}{\mathcal{R}}{}^{(m)}_{n+1}$ позначимо через $(x^k; y)$, причому перший екземпляр ріманового многовиду $\overset{+}{\mathcal{R}}{}^{(m)}_{n+1}$ ототожнюватимемо з евклідовим простором $E^+_{n+1} = E_n \times E^+_1$.

Нехай точка $(\xi, y_0) \equiv (\xi^1, y_0) \in \overset{+}{\mathcal{R}}{}^{(m)}_{n+1,(1)}$ і має координати $(\rho; \varphi_0, \xi_3, \ldots, \xi_n, y_0)$. Тоді точки $(\xi^k, y_0) \in \overset{+}{\mathcal{R}}{}^{(m)}_{2,(k)} \times E^+_{n-1}$ $(k = \overline{1, m})$ і матимуть координати $(\rho, 2(k-1)\pi + \varphi_0, \xi_3, \ldots, \xi_n, y_0)$. У результаті одержимо

$$\sum_{k=1}^m E_{nm;(\mu)}(x, \xi^k; y, \eta) = E_{n;(\mu)}(x, \xi; y, \eta),$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} E_{n(\infty);(\mu)}(x, \xi^k; y, \eta) =$$

$$= E_{n;(\mu)}(x, \xi; y, \eta).$$

Тут $E_{n,(\mu)}(x, \xi; y, \eta)$ – звичайний (не розгалужений) фундаментальний розв'язок:

$$E_{n;(\mu)}(x, \xi; y, \eta) = -\frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \times$$

$$\times \int_0^\infty j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda, R(x, \xi)) P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} y) \times$$

$$\times P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) \Omega_{(\mu)}(\tau) [P_l(\lambda^2, \tau^2)]^{-1} \times$$

$$\times \lambda^{n-1} d\lambda, \tag{16}$$

$$E_{n;(\mu)}(x, \xi; y, \eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \times$$

$$\times \int_0^\infty j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda, R(x, \xi)) G_{(\mu)}(y, \eta, \lambda) \lambda^{n-1} d\lambda. \tag{17}$$

При $m = 2$ маємо структуру двічі розгалуженого фундаментального розв'язку

$$E_{n,2;(\mu)}(x, \xi; y, \eta) = \frac{\omega_{n+1}}{(2\pi)^{n+1}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^q j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda \sqrt{R^2 + s^2}) P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} y) \times$$

$$\times P^{\mu_1,\mu_2}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \eta) [P_l(\lambda^2, \tau^2)]^{-1} \Omega_{(\mu)}(\tau) \times$$

$$\times \lambda^n ds d\lambda d\eta, \tag{18}$$

$$E_{n,2;(\mu)}(x, \xi; y, \eta) = \frac{\omega_{n+1}}{(2\pi)^{n+1}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_{-\infty}^q j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda \sqrt{R^2 + s^2}) G_{(\mu)}(y, \eta, \lambda) \times$$

$$\times \lambda^n ds d\lambda, \tag{19}$$

$q = 2\sqrt{r\rho} \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$; (r, φ) і (r, φ_0) полярні координати точок (x_1, x_2) і (ξ_1, ξ_2) відповідно.

Література

[1] Шестопал А.Ф. Интегральные преобразования с неразделенными переменными. – К., 1973. – 46 с. – (Препринт. АН УССР. Ин-т математики; 73.6).

[2] Конет І.М., Ленюк М.П., Нікітіна О.М. Деякі узагальнення інтегральних перетворень типу Мелера-Фока. – К., 1998. – 56 с. (Препринт. НАН України. Ін-т математики; 98.6).

FUNDAMENTAL SOLUTION FOR INVARIANT ELLIPTIC EQUATIONS WITH GENERALIZED LEGENDRE OPERATOR ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

I. Konet[a], M. Lenjuk[b]

[a] *Kamyanets-Podilsky State University*
Ohiyenko Str., 61, 32300, Kamyanets-Podilsky, Ukraine
[b] *Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,*
Kotsubinsky Str., 2, 58012, Chernivtsi, Ukraine

Fundamental solution of invariant elliptic equations with generalized Legandres operator is constructed by the method of integral transformations with nondeparated variables on Rimannian manifolds.

Keywords: Legendre operator, Riemannian manifold, integral transformation, invoriant ellipt equations

2000 MSC: 30F20, 44A15, 44A45

УДК: 517.944