ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 518, 2004, с. 25–29

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 518, 2004, p. 25–29

ОБҐРУНТУВАННЯ ОДНОГО ПІДХОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЗА КРИТЕРІЄМ ЧАСУ

І. Бобик *, І. Олексів

Національний університет "Львівська політехніка"
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 15 червня 2004 р.)

Доведено, що довільний план транспортної задачі можна отримати з будь-якого іншого за допомогою переміщень перевезень вздовж циклів. Обґрунтовано один з відомих раніше підходів до розв'язання транспортної задачі за критерієм часу.

Ключові слова: план, опорний план транспортної задачі, ланцюг клітин, цикл.

2000 MSC: 90C05, 90C08

УДК: 519.852.33

Вступ

Методам розв'язування транспортної задачі та різноманітних її модифікацій присвячена обширна література [1–3]. Ми розглядаємо один з можливих підходів до розв'язання транспортної задачі за критерієм часу. У [3–5] на основі цього підходу описано алгоритм побудови оптимального плану задачі, проте не розглянуто питання про скінченність алгоритму. У статті показано, що розв'язок задачі можна отримати, застосувавши алгоритм скінченну кількість разів; при цьому встановлено також, що довільний план транспортної задачі можна отримати з будь-якого іншого плану за допомогою переміщення перевезень вздовж циклів.

Нехай m баз постачання, на яких зосереджено відповідно $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць однорідного товару, отримали замовлення від n споживачів на перевезення відповідно $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць цього товару за умови, що

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Задача про виконання замовлень споживачів входить як фрагмент до формулювання низки задач лінійного програмування транспортного типу.

Ми користуватимемося звичайними поняттями (див. [розділ 3]) таблиці транспортної задачі (або просто таблиці), величини перевезення, плану, ланцюга клітин, замкненого ланцюга, який називатимемо циклом.

План транспортної задачі задаватимемо матрицею перевезень $X = (x_{ij})\,, i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n,$ і вважатимемо, що величина перевезення x_{ij} від i-го пункту постачання до j-го споживача поставлена у відповідність клітині $(i,\, j)$ таблиці транспортної задачі і записана в цій клітині.

Якщо деякі виділені й записані послідовно клітини таблиці транспортної задачі утворюють ланцюг, то їх назвемо вершинами ланцюга. Ланцюг із послідовними вершинами $K_1, ..., K_r$ позначимо через

$$L\left(K_1, ..., K_r\right). \qquad (1)$$

Вершині K_i, $1 \le i \le r$, ланцюга (1) відповідає клітина $|K_i|$ в таблиці транспортної задачі. Різним вершинам K_i і K_j, $i \ne j$, може відповідати в таблиці одна і та сама клітина $|K_i| = |K_j|$. Якщо $|K_1| = |K_r|$, але $|K_i| \ne |K_j|$, $1 \le i \ne j \le r-1$, то ланцюг (1) називається циклом. Якщо не накладати жодних обмежень на перевезення, то задача про виконання замовлень вирішується тривіально побудовою довільного плану. Плани, які повинні задовольняти додаткові умови, в деяких випадках можна отримати з інших планів за допомогою переміщення перевезень вздовж циклів. Опишемо такі переміщення.

Нехай $X = (x_{ij})\,, i = 1, ...m,\ j = 1, ..., n,$ – план транспортної задачі, для якого з клітин таблиці складено цикл $L\left(K_1, ..., K_r\right)$, $|K_1| = |K_r|$, такий, що вершинам циклу $K_1, K_3, K_5, ...$ відповідають ненульові перевезення, найменше з яких дорівнює $\Delta_0 > 0$. Позначимо ці вершини знаком "$-$", а решту вершин циклу, тобто $K_2, K_4, K_6, ...,$ – знаком "+"і виберемо Δ, $0 < \Delta \le \Delta_0$. Побудуємо новий план $Y = (y_{ij})$, прийнявши

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \Delta, & \text{якщо клітина (i,j) позначена знаком"–"}, \\ x_{ij} + \Delta, & \text{якщо клітина (i,j) позначена знаком"+"}, \\ x_{ij}, & \text{якщо клітина (i,j) не позначена ні знаком"–", ні знаком "+"}, \end{cases}$$

*Автор-респондент

Будемо говорити, що план Y отримано з плану X переміщенням перевезення Δ вздовж циклу.

План Y назвемо еквівалентним плану X, якщо його можна отримати з плану X, виконавши послідовно декілька переміщень перевезень вздовж циклів. Очевидно, що поняття еквівалентності планів симетричне.

Нижче ми покажемо, що будь-які два плани транспортної задачі еквівалентні і обґрунтуємо один з підходів до розв'язання транспортної задачі за критерієм часу.

I. Еквівалентність планів транспортної задачі

Лема 1. *Нехай* $X^{(0)} = \left(x_{ij}^{(0)}\right)$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$, *- неопорний план транспортної задачі і* $x_{i_0j_0}^{(0)} > 0$. *Тоді план* $X^{(0)}$ *еквівалентний такому опорному плану* $X^{(1)} = \left(x_{ij}^{(1)}\right)$, *множина ненульових компонент якого є правильною підмножиною ненульових компонент плану* $X^{(0)}$ *і* $0 \leq x_{i_0j_0}^{(1)} \leq x_{i_0j_0}^{(0)}$.

Лема 1 відразу випливає з того, що для неопорного плану (яким є план $X^{(0)}$) завжди існує цикл, складений з клітин таблиці, яким відповідають ненульові перевезення [4, с.119].

Нехай тепер $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$, – два плани транспортної задачі. Назвемо клітину (i,j) таблиці транспортної задачі перевантаженою планом X стосовно плану Y, якщо $x_{ij}-y_{ij} > 0$ і недовантаженою, якщо $x_{ij} - y_{ij} < 0$. Якщо не виникатиме непорозумінь, то говоритимемо коротко "перевантажена"або "недовантажена"клітина (або вершина, якщо її розглядаємо у складі деякого циклу).

Лема 2. *Якщо* $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ *– два різні плани транспортної задачі, то з клітин таблиці можна скласти цикл, у якому послідовно чергуються перевантажені і недовантажені вершини планом* X *стосовно плану* Y.

□ *Доведення.* Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_{ij'} - y_{ij'}) = \sum\limits_{j=1}^{n}(x_{i'j} - y_{i'j}) = 0$, $j' = 1,\ldots,n$, $i' = 1,\ldots,m$, і плани X та Y різні, то в таблиці існують перевантажені і недовантажені клітини, а також разом з кожною перевантаженою (недовантаженою) клітиною (i,j) існують принаймні дві клітини недовантажені (перевантажені), одна з яких розташована в i-му рядку, а інша – в j-му стовпці.

Виберемо одну з перевантажених клітин, нехай $|K_1| = (i_1,j_1)$. Далі у рядку i_1 знайдемо недовантажену клітину $|K_2| = (i_1,j_2)$, $j_2 \neq j_1$, у стовпці j_2 – перевантажену клітину $|K_3| = (i_2,j_2)$, $i_2 \neq i_1$, і т. д. Нехай $|K_r|$ – перша з клітин послідовності $|K_1|, |K_2|, |K_3|, \ldots$, яка збігається з однією з попередніх клітин, наприклад, з клітиною $|K_q|$, $1 \leq q < r$. Очевидно , що цикл $L(K_q, K_{q+1}, \ldots, K_r)$ задовольняє умови леми. ■

Теорема. *Будь-які два плани транспортної задачі еквівалентні.*

□ *Доведення.* Нехай $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, – два різні плани транспортної задачі. За лемою 2 знайдемо в таблиці транспортної задачі цикл L, у якому послідовно чергуються перевантажені і недовантажені вершини (планом X стосовно плану Y), і позначимо через Δ – найменше серед чисел $|x_{ij} - y_{ij}| \neq 0$, які відповідають вершинам циклу. Перемістивши вздовж циклу L перевезення величиною Δ від перевантажених до недовантажених клітин, отримаємо новий план X'. Якщо $X' = Y$, то теорема доведена. Інакше, застосувавши до плану X' одне або декілька перетворень, аналогічних тому, яке описане для плану X, отримаємо план, однаковий з планом Y. Теорема доведена. ■

Із побудов у теоремі випливає, що цикли, які використовуються для перетворень планів, можна також використати для перетворення будь-якого з попередніх побудованих планів, а отже, і початкового плану X. Тому маємо такий наслідок.

Наслідок. Нехай задано два плани транспортної задачі, які відрізняються значеннями компонент, що відповідають клітині (i_0, j_0) таблиці транспортної задачі. Тоді в таблиці існує цикл, у якому послідовно чергуються перевантажені і недовантажені вершини одним планом стосовно іншого і який має вершину у клітині (i_0, j_0).

II. Транспортна задача за критерієм часу

A

Нехай у транспортній задачі про виконання замовлень (вступ) задано час t_{ij}, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, за який можна перевезти товар (незалежно від його кількості) від i-го пункту постачання до j-го споживача. Розглянемо тепер задачу про побудову такого плану перевезень, який можна було б реалізувати за найкоротший час.

Якщо $X = (x_{ij})$ – деякий план перевезень, то його можна виконати за час $t(X) = \max\limits_{x_{ij}>0} t_{ij}$. Серед усіх планів X потрібно вибрати той, назвемо його оптимальним, для якого величина $t(X)$ є найменшою, $T = \min\limits_{X} t(X)$.

Ця задача не вкладається в межі задач лінійного програмування, оскільки функція мети $t(X)$ нелінійна.

Відомі різні підходи до розв'язання задачі за критерієм часу ([1, с. 164], [6, с. 250]). Розглянемо метод який, в основному, описаний в [4, с. 164] (див. також [3, с. 59], [5, с. 115]). У цьому методі використовуються попередній крок і загальний, який повторюється.

Попередній крок. Будуємо довільний опорний план перевезень (наприклад, методом північно-західного кута) $X^{(0)} = \left(x_{ij}^{(0)}\right)$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,...,n$.

Нехай $t_0 = t\left(X^{(0)}\right)$ – час, за який можна реалізувати план $X^{(0)}$. Назвемо забороненими для плану $X^{(0)}$ ті клітини $(i,\ j)$ таблиці транспортної задачі, для яких одночасно $x_{ij}^{(0)} = 0$ і $t_{ij} \geq t_0$; всі інші клітини будуть незабороненими. Виберемо в таблиці одну клітину, нехай $(i_0,\ j_0)$, для якої $x_{i_0j_0}^{(0)} > 0$ і $t_{i_0j_0} = t_0$ (таких клітин може бути декілька), і назвемо її головною для плану $X^{(0)}$.

Загальний крок. Випадок 1. Припустимо, що з незаборонених клітин таблиці можна скласти цикл, одна з вершин якого розташована в головній клітині $(i_0,\ j_0)$ і який має таку властивість : якщо вершини циклу позначити по черзі знаками "$-$"(ним позначається головна клітина) і "+", то виявиться, що для вершин, позначених знаком "$-$", $x_{ij}^{(0)} > 0$, а для вершин, позначених знаком "+", $t_{ij} < t_0$. Якщо існує декілька таких циклів, то вибираємо один з них, а якщо не існує зовсім, то переходимо до випадку 2. Нехай Δ – найменше перевезення, яке відповідає вершинам циклу, позначеним знаком "$-$". Виконавши переміщення перевезення Δ вздовж циклу, отримаємо план $X^{(1)} = \left(x_{ij}^{(1)}\right)$ такий, що : 1) $0 \leq x_{i_0j_0}^{(1)} < x_{i_0j_0}^{(0)}$; 2) $t_1 = t\left(X^{(1)}\right) \leq t_0$; 3) клітини, заборонені для плану $X^{(0)}$, є також забороненими для плану $X^{(1)}$. За лемою 1 можна вважати, що план $X^{(1)}$ опорний.

Далі для плану $X^{(1)}$ визначаємо множину заборонених клітин (аналогічно, як це зроблено для плану $X^{(0)}$). Головною для плану $X^{(1)}$ будемо вважати клітину $(i_0,\ j_0)$, якщо $x_{i_0j_0}^{(1)} > 0$, або будь-яку іншу клітину $(i_1,\ j_1)$, для якої $x_{i_1j_1}^{(1)} > 0$ і $t_{i_1j_1} = t_1$, якщо $x_{i_0j_0}^{(1)} = 0$. До плану $X^{(1)}$, якщо можливо, застосуємо перетворення, описане у випадку 1, і повторимо це перетворення стільки разів, доки не отримаємо опорний план, для якого справджуватимуться умови випадку 2.

Випадок 2. Для плану $X^{(0)}$ не існує циклу, про який йдеться у випадку 1. Тоді побудова припиняється, план $X^{(0)}$ оптимальний і задача розв'язана.

Зауважимо, що оптимальний план побудовано за допомогою опорних планів (вони потрібні для обґрунтування методу), тоді як в [3, 4, 5] використання опорних планів не вимагається.

B

Обґрунтуємо описані побудови.

Покажемо спочатку, що до неоптимального плану транспортної задачі $X^{(0)} = \left(x_{ij}^{(0)}\right)$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, завжди можна застосовувати перетворення загального кроку, а саме, що існує цикл, який задовольняє умови випадку 1. Неважко показати, що оптимальний план транспортної задачі завжди існує, позначимо його через $Y = (y_{ij})$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$. Виберемо головну клітину (i_0, j_0) для плану $X^{(0)}$. Оскільки $x_{i_0j_0}^{(0)} > y_{i_0j_0} = 0$, то за наслідком з теореми існує цикл, у якому послідовно чергуються перевантажені і недовантажені вершини планом $X^{(0)}$ стосовно плану Y і одна з вершин циклу розташована в клітині (i_0, j_0). Очевидно, що цикл складено з незаборонених для плану $X^{(0)}$ клітин таблиці. Він задовольнятиме умови випадку 1 загального кроку, якщо перевантажені вершини циклу позначити знаком "$-$", а недовантажені – знаком "+".

Отже, умови випадку 1 виконуються для неоптимального плану. Звідси випливає, що умови випадку 2 є достатніми для оптимальності плану транспортної задачі.

Покажемо тепер, що оптимальний план можна отримати з довільного опорного плану $X^{(0)}$, повторивши перетворення загального кроку не більше, ніж скінченну кількість разів. Справді, якщо план $X^{(0)}$ неоптимальний, то застосуємо до нього перетворення загального кроку (випадок 1) і, якщо буде можливо, повторимо його знову для отримуваних планів. У результаті побудуємо послідовність опорних планів

$$\begin{aligned} &\left\{X^{(k)}\right\}, k = 1, 2, \ldots, \\ &X^{(k)} = \left(x_{ij}^{(k)}\right), i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n, \end{aligned} \qquad (2)$$

таких, що кожний наступний отримано з попереднього за допомогою перетворення, описаного у випадку 1. Припустимо, що $X^{(p)}$ і $X^{(q)}$, $p < q$, – два плани послідовності (2). Якщо (i_p, j_p) – головна клітина для плану $X^{(p)}$, то з описаних побудов випливає, що $x_{i_pj_p}^{(p)} > x_{i_pj_p}^{(q)}$, тобто $X^{(p)} \neq X^{(q)}$ і, отже, всі опорні плани послідовності (2) різні. Тому послідовність (2) скінченна, а її останній опорний план оптимальний.

Приклад 1. Розв'язати транспортну задачу за критерієм часу, якщо її умови задані табл. 1.

Попередній крок. Знаходимо початковий опорний план методом північно-західного кута (табл. 2). Час реалізації плану $t_0 = 7$. Визначаємо множину заборонених клітин (вони затінені) і вибираємо головну клітину, нехай (3, 2).

Загальний крок. Щоб звільнити від перевезень головну клітину, можна двічі виконати переміщення перевезення вздовж позначених у табл. 2 циклів: спочатку – вздовж внутрішнього, перемістивши перевезення $\Delta_1 = 25$, а потім – вздовж зовнішнього, перемістивши перевезення $\Delta_2 = 5$.

Внаслідок переміщень отримаємо неопорний план (табл. 3). Перемістивши вздовж позначеного в табл. 3 циклу перевезення $\Delta_3 = 5$, отримаємо опорний план (табл. 4), час реалізації якого $t = 5$. Цей план оптимальний, бо для клітини (2, 1), як головної, не можна знайти в таблиці циклу, який задовольняє умови випадку 1, хоча для клітини (4, 2), якщо її вибрати за головну, такий цикл існує (він позначений у табл.4).

Таблиця 1

a_i \ b_j	45	50	30	20
10	5	5	6	4
20	5	8	5	6
45	4	7	5	8
45	9	5	7	3
25	5	4	3	5

Таблиця 2

a_i \ b_j	45	50	30	20
10	5 / 10	5	6	4
20	5 / 20	8	5	6
45	4 / 15	7 / 30	5	8
45	9	5 / 20	7 / 25	3
25	5	4	3 / 5	5 / 20

Таблиця 3

a_i \ b_j	45	50	30	20
10	5 / 5	5	6	4 / 5
20	5 / 20	8	5	6
45	4 / 20	7	5 / 25	8
45	9	5 / 45	7	3
25	5	4 / 5	3 / 5	5 / 15

Таблиця 4

a_i \ b_j	45	50	30	20
10	5	5	6	4 / 10
20	5 / 20	8	5	6
45	4 / 25	7	5 / 20	8
45	9	5 / 45	7	3
25	5	4 / 5	3 / 10	5 / 10

Література

[1] Триус Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа.// Советское радио, 1967, – 208с.

[2] Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969, – 384с.

[3] Нестеров Е.П. Транспортные задачи линейного программирования. – Изд. 2-е. – М.: Транспорт. – 1971, – 216 с.

[4] Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. – Львів, Світ. – 1995,– 216с.

[5] Вентцель Е С. Исследование операций. – М.: Советское радио, – 1972, – 552с.

[6] Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – Изд. 2-е. – М.: Наука, – 1967, – 460с.

ON JUSTIFYING OF AN APPROACH TO THE MINIMUM TIME TRANSPORTATION PROBLEM

I. Bobyk*, I. Oleksiv

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

It is proved that any plan of the transportation problem can be obtained from any other plan by transitions of transportations along cycles. One of the known method for solving of the minimum time transportation problem is justified.

Keywords: plan, supporting plan of the transportation problem, chain of the cells, cycle.

2000 MSC: 90C05, 90C08

UDK: 519.852.33

*Corresponding author