ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 518, 2004, с. 14–17

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 518, 2004, p. 14–17

ПОБУДОВА ІЗООПТИЧНИХ КРИВИХ ЕЛІПСА

І. Врублевський

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 18 вересня 2004 р.)

Розглянуто ізооптичні криві еліпса. Виведено рівняння, які описують ізооптичні заданого еліпса в декартовій та полярній системах координат. Показано, що ізооптичні еліпса – криві Персея – такі ж криві, які утворюються при перетині тора, який самоперетинається з площинами, паралельними його осі. Виведено формули, які, залежно від розмірів заданого еліпса та кута між дотичними, задають розміри тора та відстань січної площини від його осі, при яких у перерізі тора отримуються ізооптичні криві. Розроблена методика побудови ізооптичних кривих заданого еліпса як перерізів тора за допомогою твердотільного моделювання в середовищі комп'ютерної системи AutoCAD.

Ключові слова: ізооптична крива, еліпс, тор, крива Персея, твердотільне моделювання.

2000 MSC: 54A04

УДК: 514.74

Вступ

Ізооптична крива (або просто ізооптична) плоскої геометричної фігури – це множина точок, з яких фігуру видно під одним і тим же кутом. Вона має вигляд плоскої кривої лінії, що є траєкторією вершини кута α, який переміщається в площині так, що його сторони при будь-якому положенні кута дотикаються до заданої кривої [1,2]. При прямому куті $\alpha = \pi/2$ ізооптична крива називається ортооптичною. Якщо геометрична фігура просторова, то множина точок, з яких її видно під постійним кутом, – ізооптична поверхня, яку називають еквігональ [3]. Вона утворюється як траєкторія переміщення вершини кругового конуса з кутом при його вершині, що дорівнює α, який переміщається в просторі так, що при будь-якому положенні конуса хоча б дві його твірні дотикаються до заданої фігури.

У монографії [1] розглянуті ізооптичні криві логарифмічної спіралі та ортооптичні еліпса і гіперболи. Зазначено, що ізооптичні кривих другого порядку – криві четвертого порядку, але формул, що їх описують, не наведено. У роботах [3,4] розглянуто ізооптичні відрізка і кола та еквігоналі сфери.

Метою статті є виведення формул, які описують ізооптичні еліпса за заданими розмірами його півосей a і b та кутом зору $\alpha \in (0, \pi)$, а також розробка методики їх побудови за допомогою сучасних комп'ютерних систем. Практичне використання ізооптичних кривих еліпса можливе в оптиці, геодезії, астрономії.

I. Параметричні рівняння ізооптичних кривих еліпса

Запишемо параметричні рівняння еліпса, центр якого знаходиться на початку декартової системи координат, а осі спрямовані вздовж координатних осей,

$$x = a \cdot \cos\varphi, \quad y = b \cdot \sin\varphi$$

та рівняння дотичної до еліпса у вигляді

$$y = -\frac{b \cdot x}{a \cdot \tan\varphi} + \frac{b}{\sin\varphi} \quad . \qquad (1)$$

Будемо переміщати в площині дві дотичні так, що кут між ними – постійна величина $\alpha = \kappa_1 - \kappa_2$, де κ_1 і κ_2 – кути між віссю абсцис та відповідно першою та другою дотичною, причому згідно з (1) $\tan\kappa_i = -\dfrac{b}{a \cdot \tan\varphi_i}$ $(i = 1, 2)$.

Порахувавши $\tan\alpha$ як тангенс різниці кутів κ_{i} , отримаємо рівняння

$$\tan\alpha \cdot (p^2 + \tan\varphi_1 \cdot \tan\varphi_2) = p \cdot (\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2), \quad (2)$$

де $p = b/a$– відношення півосей еліпса. Будемо вважати, що велика вісь еліпса збігається з віссю абсцис, тому $0 < p < 1$.

Прирівнявши значення x та y у двох рівняннях (1) при $\varphi = \varphi_1$ та $\varphi = \varphi_2$, отримаємо рівняння ізооптичної кривої як множини точок перетину двох дотичних

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \cdot (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}, \\ y &= \frac{a \cdot (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Якщо один з полярних кутів розглядати як незалежний параметр, наприклад $0 < \varphi_1 < 2\pi$, другий кут φ_2 визначити як найближчий більший φ_1 корінь рівняння (2), то, підставивши їх значення в (3), можна порахувати значення x та y шуканої кривої. Отже, рівняння (2),(3) – це параметричні рівняння ізооптичної еліпса.

Для кола $p = 1$, $\tan\alpha = \tan(\varphi_1 - \varphi_2)$, а рівняння (3) приймають вигляд $x = \dfrac{a \cdot \sin(\varphi - \alpha/2)}{\sin\alpha/2}$, $y = \dfrac{a \cdot \cos(\varphi - \alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$ і описують ізооптичну кола – коло радіуса $a/\sin\alpha/2$, що збігається з результатами [4].

Використовувати рівняння (2),(3) для побудови кривих не дуже зручно, тому виведемо рівняння ізооптичної еліпса як алгебраїчної кривої в декартовій системі координат, виключивши з (2,3) значення φ_1 та φ_2.

II. Рівняння ізооптичних кривих еліпса в декартовій та полярній системах координат

Додавши та віднявши квадрати рівнянь (3), після тригонометричних перетворень отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2}{1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2 \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_1)}{1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \tag{5}$$

Рівняння (2) запишемо так:

$$\frac{2p \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{(1+p^2) \cdot \tan\alpha} = \frac{1-p^2}{1+p^2} \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_1) - \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{6}$$

Поділивши (5) на (4), отримаємо

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{(bx)^2 - (ay)^2}{(bx)^2 + (ay)^2} \quad ,$$

та підставивши це значення в (6), маємо

$$\frac{2p\sqrt{1-u^2}}{\tan\alpha \cdot (1+p^2)} = \frac{1-p^2}{1+p^2} \cdot \frac{(bx)^2 - (ay)^2}{(bx)^2 + (ay)^2},$$

де $u = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$. Розв'язавши це квадратне рівняння відносно u, одержимо

$$u = \frac{l + c\sqrt{1 + c^2 - l^2}}{1 + c},$$

де

$$c = \frac{2p}{(1+p^2) \cdot \tan\alpha}, \quad l = \frac{1-p^2}{1+p^2} \cdot \frac{(bx)^2 - (ay)^2}{(bx)^2 + (ay)^2}.$$

Підставивши значення u в (4), після перетворень отримаємо рівняння четвертого порядку

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(k_x x^2 + k_y y^2) - k_0 a^4, \tag{7}$$

де

$$k_x = 1 + p^2 + 2p^2 \cdot \cot^2\alpha,$$
$$k_y = 1 + p^2 + 2 \cdot \cot^2\alpha,$$
$$k_0 = (1 + p^2)^2 + (2p \cdot \cot\alpha)^2.$$

Це рівняння ізооптичних кривих еліпса в декартовій системі координат описує криві Персея – замкнені криві лінії, симетричні відносно координатних осей. Вони перетинають вісь абсцис в точках

$$\left(\pm a\sqrt{1 + \left(p \cdot \cot\frac{\alpha}{2}\right)^2}, 0\right),$$

а вісь ординат – в точках

$$\left(0, \pm\frac{a\sqrt{1 + \left(p \cdot \tan\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}\right).$$

При $p = 0$ еліпс спотворюється у відрізок довжиною $2a$, а (7) набирає вигляду

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2/\sin^2\alpha) - a^4$$

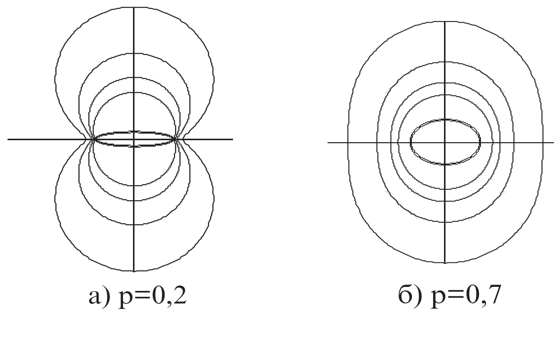
і описує дві дуги радіуса $a/\sin\alpha$, симетричні відносно відрізка, які проходять через його кінцеві точки. Це відповідає результатам [4], де описано ізооптичну криву відрізка.

Для побудови ізооптичних еліпса за допомогою комп'ютерних систем рівняння (7) зручніше звести до полярної системи координат, початок якої збігається з центром еліпса, а полярна вісь – з віссю абсцис:

$$\begin{aligned} &\rho = a\cot\alpha(n + 2\psi + 2\sqrt{\psi^2 + n\psi - (p \cdot \tan\alpha)^2})^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad\qquad \text{при } \alpha \in (0, \pi/2), \\ &\rho = a\cot\alpha(n + 2\psi - 2\sqrt{\psi^2 + n\psi - (p \cdot \tan\alpha)^2})^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad\qquad \text{при } \alpha \in (\pi/2, \pi), \end{aligned} \tag{8}$$

де $n = (1 + p^2) \cdot \tan^2\alpha$, $\psi = p^2 \cdot \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$.

При $\alpha = \pi/2$ $\rho = a\sqrt{1 + p^2}$, а ізооптична (ортооптична) крива при будь-яких значеннях p є колом, що відповідає результатам [1].



а) p=0,2 б) p=0,7

Рис. 1. Ізооптичні криві еліпса при різних значеннях p і α=75^o,60^o,45^o,30^o

На рис.1 показані ізооптичні еліпса при різних значеннях p та α, побудовані за допомогою комп'ютерної системи MathCAD. Еліпси показано потовщеною лінією, а ізооптичні зі зменшенням кута α віддаляються від еліпса.

III. Побудова ізооптичних кривих еліпса як перерізів тора

Як відомо криві Персея утворюються під час перерізу тора площинами, паралельними його осі, і описуються рівнянням [1]

$$(x^2+y^2)^2 = 2(R^2-z^2-r^2)x^2+ \\ +2(R^2-z^2+r^2)y^2-(R^2-z^2+r^2)^2+4R^2r^2 \quad (9)$$

де r – радіус тора, R – радіус твірного кола, z – відстань січної площини від осі тора.

Якщо за розмірами заданого еліпса та кута α порахувати розміри відповідного тора та відстань січної площини, ізооптичні еліпса можна побудувати за допомогою твердотільного моделювання комп'ютерної системи AutoCAD або їй подібним. Адже в системі AutoCAD можна легко побудувати дотичні до кривої та поміряти кут між ними. Прирівнявши коефіцієнти при x^2 та y^2 рівнянь (7) і (9), отримаємо

$$R^2-z^2-r^2 = a^2(1+p^2+2p^2\cdot\cot^2\alpha), \quad (10)$$

$$R^2-z^2+r^2 = a^2(1+p^2+2\cdot\cot^2\alpha). \quad (11)$$

Додавши рівняння (10) і (11), одержимо

$$R^2-z^2 = a^2(1+p^2)/\sin^2\alpha, \quad (12)$$

а віднявши від (11) рівняння (10),

$$r = \frac{a\sqrt{1-p^2}}{\tan\alpha}. \quad (13)$$

Прирівнявши вільні члени рівнянь (7) і (9), з урахуванням (12) після перетворень одержимо

$$R = \frac{a}{\sin\alpha\cdot\sqrt{1-p^2}}, \quad (14)$$

$$z = \frac{ap^2}{\sin\alpha\cdot\sqrt{1-p^2}}. \quad (15)$$

Так як $R > r$, потрібний для побудови ізооптичних кривих тор – самоперетинаючий (без порожнини всередині). Вигляд кривих залежить від співвідношення r і z. Умові $r = z$ відповідає $p = \sqrt{\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, при якій крива в точках перетину з віссю абсцис має нульову кривизну. При $p > \sqrt{\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ (або $\cos\alpha < \dfrac{p^2}{1-p^2}$) ізооптичні криві еліпсоподібні, тобто всі їх точки – звичайні. При $p < \sqrt{\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ ізооптична еліпса має дві угнутості та чотири точки перегину. При $p > \sqrt{2}/2$ при будь-якому куті α криві еліпсоподібні. При $\alpha > \pi/2$ значення $r < 0$, тобто відстань від осі тора до його екватора менша від радіуса твірного кола. Криві перерізу такого тора при будь-якому p еліпсоподібні.

Для побудови ізооптичної кривої за заданими параметрами еліпса a, p та кута α необхідно за формулами (13)–(15) порахувати значення r, R, z. У середовищі системи AutoCAD командою Ellipse будується еліпс за розмірами a і b, командою Torus – тор за розмірами R і r . Причому тор треба побудувати так, щоб його вісь була паралельна осі y. Потім командою Move потрібно підняти тор над горизонтальною площиною xy на величину z, а командою Section перерізати його площиною xy. Отриманий переріз – крива Персея – ізооптична заданого еліпса. Її центр доцільно командою Move або Copy сумістити з центром еліпса. Тепер, якщо з будь-якої точки ізооптичної провести дві дотичні до еліпса (комадою Line або Pline з об'єктною прив'язкою tangent) і поміряти кут між ними (командою Dist), його значення повинно дорівнювати α.

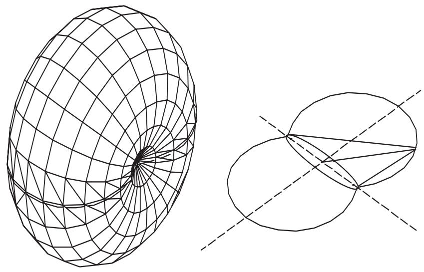


Рис. 2. Побудова ізооптичних еліпса твердотільним моделюванням системи AutoCAD

На рис.2 показано побудову еліпса та його ізооптичної перерізом тора, виконану твердотільним моделюванням AutoCAD. Порівняння виміряного значення кута α з заданим дало похибку, яка не перевищує точність розрахунків параметрів тора.

Висновки

Виведено рівняння, що описують ізооптичні криві еліпса. Це рівняння кривих Персея, які можна отримати перерізом тора площинами, паралельними його осі. Для заданого еліпса та кута зору розраховуються розміри тора та положення січної площини, внаслідок перетину яких отримується ізооптична еліпса. Розроблена детальна методика побудови ізооптичних еліпса за допомогою комп'ютерного твердотільного моделювання.

Ізооптичні криві еліпса можуть бути використані, наприклад, в оптиці, астрономії, зокрема, в астрометрії. Відомо, що планети Сонячної системи обертаються навколо Сонця по еліптичних траєкторіях. Відповідно розрахована ізооптична крива визначить траєкторію руху космічного об'єкта, з якого орбіту планети видно під постійним кутом.

Перспективою подальших досліджень у цьому напрямку вважаємо визначення ізооптичних кривих інших цікавих кривих третього та вищих порядків, деяких трансцендентних кривих. Ізооптичні криві необхідні також при побудові еквігоналей – ізооптичних поверхонь просторових форм. Так, ізооптичні еліпса необхідні під час побудови еквігоналей еліпсоїда, еліптичного параболоїда, ізооптичні криві гіперболи – під час побудови еквігоналей одно- та двопорожнинного гіперболоїдів, гіперболічного параболоїда тощо. Перспективним напрямком є також виведення аналітичних залежностей, які описують еквігоналі різноманітних кривих поверхонь.

Література

[1] Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. (Справочное руководство). – М.:Физматгиз, 1960.

[2] Математическая энциклопедия. Гл. ред. И.И. Виноградов, т. 2. – М.:Сов. Энциклопедия. – 1979.

[3] Глоговський В., Врублевський І. Еквіта ізогоналі опуклих фігур // Матеріали Міжнар. наук. семінару „Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка" – Львів: ЛПІ. 1996, – с.26.

[4] Wrublewsky I., Pulkevich I. Isogonals of convex figures // Proc. Of the 10^{th} International Conference on Geometry and Graphics. – Vol. 2. – Kyiv, 2002, – p. 49–52.

ISOPTIC CURVES OF ELLIPSE CONSTRUCTION

I.Y. Wrublewsky

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

Isoptic curves of ellipse are investigated. The equations describing the isoptics of ellipse in Cartesian and polar coordinate systems are obtained. It is shown that isoptics of ellipse are the spirics of Perseus, the same curves are the sections of torus by planes parallel to its axis. The formulae are obtained for calculation the dimensions of torus and parallel plane distance depending on the ellipse semiaxes dimensions and the angle between tangents. Methodology of the isoptics of ellipse construction as the section of torus is elaborated by means of the solid modeling of AutoCAD system.

Keywords: isoptic curve, ellipse, torus, spiric of Perseus, solid modeling.

2000 MSC: 54A04

UDK: 514.74