ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 518, 2004, с. 5–13

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 518, 2004, p. 5–13

РІВНОМІРНА КОРЕКТНІСТЬ АБСТРАКТНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ З НЕОБМЕЖЕНИМИ КРАТНОСТЯМИ СПЕКТРА

В. Бушмакін*, П. Каленюк

Національний університет "Львівська політехніка"
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 29 березня 2004 р.)

Досліджується абстрактна задача Коші в сепарабельному гільбертовому просторі. Розглядувана задача особлива тим, що має кратний спектр, для якого довжини ланцюжків з власних та приєднаних векторів не є рівномірно обмеженими. Одержані результати використовуються в теорії класичних та узагальнених розв'язків крайових задач відповідного типу.

Ключові слова: задача Коші, необмежений лінійний оператор, кратний спектр, власні та приєднані вектори, база Рісса, резольвента.

2000 MSC: 35K45, 35K65

УДК: 517.983

I. Постановка проблеми і її зв'язок з важливими науковими завданнями

Розглядається абстрактна задача Коші в сепарабельному гільбертовому просторі H.

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) \ \ (t \geq 0) \tag{1}$$

і

$$u(0) = u_0 \ , \ u_0 \text{ задано}, \tag{2}$$

де A – необмежений лінійний оператор, що діє в H, а $\frac{d}{dt}$ – сильна похідна для функцій $u(t)$ із значеннями в просторі H.

Задача (1), (2) досліджувалась багатьма авторами [2 – 4, 6 – 10]. Авторами статті в роботі [1] розглядався випадок, коли оператор A із класу $K\,(H, \sigma, \nu, V, M_0)$, який визначається такими умовами:

а) A – замкнений, щільно заданий лінійний оператор в просторі H;

б) спектр $\sigma = \sigma\,(A) = \{Z_k \in \mathbf{C} : |Z_k| \leq |Z_{k+1}|\,, \ \ k \in \mathbf{N}\}$ – суто точковий;

в) $V = \left\{V_k^j \in H, j = \overline{0, \nu_k}, \nu_k < \infty\right\}$ – система власних та приєднаних векторів оператора A, яка утворює базу Рісса в H:

$$AV_k^0 = Z_k V_k^0, \ AV_k^j = Z_k V_k^j + \xi_k^j V_k^{j-1}, \ \ \xi_k^j \in \mathbf{C}, \ \ k \in \mathbf{N},$$

$$j = \overline{1, \nu_k}; \ \nu \overset{def}{=} \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \nu_k;$$

г) $\left|\xi_k^j\right| \leq M_0 \left|\mathrm{Re}\, Z_k\right|, \ M_0 > 0, \ k \in \mathbf{N}, \ j = \overline{1, \nu_k}, \ M_0^* \overset{def}{=} \inf\{M_0\}$.

Для $A \in K\,(H, \sigma, \nu, V, M_0)$ з певним обмеженням на спектр авторами була встановлена рівномірна коректність у сенсі класичних розв'язків задачі Коші (1), (2) [1], причому для операторів A із розглядуваного класу при кожному фіксованому $k \in N$ число приєднаних векторів $V_k^j \ \left(j = \overline{1, \nu_k}\right)$ до власного V_k^0 було скінченним: $\nu_k < \infty$, і причому $\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \nu_k = \nu < \infty$.

Тепер будемо вважати, що випадок $\nu = \infty$ допускається, причому він може реалізовуватись коли всі $\nu_k < \infty$, але наростають при $k \to \infty$, або $\nu_k = \infty$ для окремих, чи навіть для всіх $k \in \mathbf{N}$. Такий розширений клас операторів A позначатимемо $\tilde{K}\,(H, \sigma, \nu, V, M_0)$ (надалі $\tilde{K}$).

У цій роботі формулюються достатні умови рівномірної коректності задачі Коші з оператором $A \in \tilde{K}$, встановлюється тип ω_0 задачі (доведено, що ω_0 у випадку $\mathrm{Re}\ \mathrm{Z}_1 \neq 0$ визначається першим нескінченнократним власним значенням за умови, що його дійсна частина попадає в певний проміжок, залежний від спектральних параметрів M_0^* і $\mathrm{Re}\ \mathrm{Z}_1$), відзначається вплив наявності нескінченних за довжиною ланцюжків із власних та приєднаних векторів системи V на властивості розв'язків задачі Коші.

Встановлення факту рівномірної коректності задачі Коші (C_0 умова) актуальне тим, що, по-перше, гарантується коректне розв'язування такої задачі в сенсі класичних розв'язків, а, по-друге, забезпечується існування узагальнених розв'язків, породжених початковими умовами $u_0 \in H \backslash D\,(A)$ і проблема,

*Автор-респондент

© В. Бушмакін, П. Каленюк, 2004

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

яка тут знаходиться, полягає в тому, щоб для вибраного простору $X = \{v(t)\}$, в якому шукаються узагальнені розв'язки задачі, описати простір їх початкових умов $X_0 = \left\{ \lim\limits_{t\to+0} v(t) \right\}$.

II. Формулювання та доведення основних результатів

Якщо задача Коші (1), (2) є коректно розв'язною (відповідна півгрупа операторів є обмеженою), то в правій ($\mathrm{Re\ Z} > 0$) комплексній півплощині може міститися лише скінченна частина спектра $\sigma(A)$, тому нижче розглядаються теореми для випадків строгого ($\mathrm{Re\ Z_1} < 0$) та нестрогого ($\mathrm{Re\ Z_1} = 0,\ \ \mathrm{Re\ Z_1} > 0$) розташувань спектра в лівій комплексній півплощині. Стратегічне доведення цих теорем базується на теоремі Хілле-Філіпса-Міадери [2], пов'язаної з оцінками норм всіх натуральних степенів резольвенти оператора A в півплощині резольвентних значень, але в тактичному сенсі вони мають певні відмінності і тому об'єднати їх одним доведенням не видається можливим.

Теорема 1. *Нехай оператор* $A\in\widetilde{K}$, $M_0\in(0;1)$, *спектр* σ *задовольняє умови* $\mathrm{Re\ Z_1} < 0$, $\mathrm{Re\ Z_{1+k}} < \mathrm{Re\ Z_k}$ $(k \in N)$, $\mathrm{Re\ Z_k} \to -\infty$ *при* $k \to \infty$. *Припустимо, що в проміжок* $(\mathrm{Re\ Z_1}/(1-\mathrm{M_0^*});\ \mathrm{Re\ Z_1}]$ *на від'ємній дійсній півосі попадають* l *значень* $\mathrm{Re\ Z_k} : \mathrm{Re\ Z_1},\ \mathrm{Re\ Z_2},\ ...,\ \mathrm{Re\ Z_l}$ *(очевидно, що* l *– скінченне натуральне число, що не менше за одиницю). Існують такі два твердження:*

1) якщо всі $\nu_k\,(k=\overline{1,l})$ *скінченні, то незалежно від величини* ν_k *для* $k > l$*(скінченні чи ні) відповідна задача Коші (1), (2) є рівномірно коректною і її тип* $\omega_0 = \mathrm{Re\ Z_1}$*;*

2) якщо хоча б одне з $\nu_k(k = \overline{1,l})$ *нескінченне, то незалежно від величини* ν_k *для* $k > l$ *задача Коші (1), (2) є рівномірно коректною і її тип* $\omega_0 = (1 - M_0^*)\mathrm{Re\ Z_{k_l}}$ $\quad (\mathrm{k_l} \in \{1, 2, ..., \mathrm{l}\})$*, де* Z_{k_l} *– перше із нескінченнократних власних значень серед* $Z_1, Z_1, ..., Z_l :\ \mathrm{Re\ Z_{k_l}} = \max\limits_{\nu_\mathrm{k}=\infty} \left\{\mathrm{Re\ Z_k} : \mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{l}}\right\}$.

□ *Доведення.*

Доведення твердження 1). Покажемо, що для довільних $n \in N$ і $\beta > \mathrm{Re}\ Z_1$ виконується оцінка для резольвенти $R_\lambda(A)$: ([4, 6, 9, 10]):

$$\|R_\lambda^n(A)\|_{[H]} \leq \frac{C\,(\beta, A)}{(\mathrm{Re}\ \lambda - \beta)^n} \tag{3}$$

при $\mathrm{Re}\ \lambda > \beta$ з $\inf\ \{\beta\} = \mathrm{Re}\ Z_1$. Виконання нерівності (3) для певного $\beta > \mathrm{Re}\ Z_1$ є необхідною та достатньою умовою рівномірної коректності задачі Коші (1), (2) із замкненим оператором A [2], а точна нижня межа чисел β в (3) визначає тип задачі Коші (порядок твірного оператора A сильно неперервної півгрупи з C_0 умовою).

Нехай $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k,\ \ f \in H,\ \ f_k \in H_k$,

де H_k – лінійна оболонка, натягнена на кореневі вектори $V_k^j \in V \quad (j = \overline{0, \nu_k})$ і можна вважати, що $H_k \perp H_m \quad (k \neq m)$ в результаті вибору відповідної норми в просторі H, оскільки V – база Рісса.

Для чисел λ з $\mathrm{Re}\ \lambda > \mathrm{Re\ Z_1}$ та довільного $n \in N$, очевидно, існують $R_\lambda(A),\ R_\lambda^n(A) \in [H]$, і на основі ортогональності підпросторів H_k маємо

$$\|R_\lambda^n(A)\,f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|R_\lambda^n(A_k)\,f_k\|_{H_k}^2, \tag{4}$$

де A_k – звуження оператора A на інваріантний підпростір H_k.

Для довільного $k \in N$ користуємось вже відомим зображенням [2, 3]

$$R_\lambda^n(A_k)\,f_k = \sum_{\Gamma=0}^{\nu_k} \frac{1}{\Gamma!} D_{Z_k}^{\Gamma}\,(Z_k - \lambda)^{-n}\,B_k^{\Gamma} f_k, \tag{5}$$

де $D_{Z_k}^{\Gamma}$ – оператор диференціювання Γ-го порядку за змінною Z_k, $B_k = A_k - Z_k I_k$.

Оцінимо вираз (5) за нормою

$$\begin{gathered}\|R_\lambda^n(A_k)\,f_k\| \leq \\ \leq \sum_{\Gamma=0}^{\nu_k} \left|\frac{1}{\Gamma!} D_{Z_k}^{\Gamma}\,(Z_k - \lambda)^{-n}\right| (M_0^*)^{\Gamma}\,|\mathrm{Re}\ Z_k|^{\Gamma}\,\|f_k\|\end{gathered} \tag{6}$$

і розглянемо рівність

$$\left|\frac{1}{\Gamma!} D_{Z_k}^{\Gamma}\,(Z_k - \lambda)^{-n}\right| = \frac{C_{\Gamma+n-1}^{\Gamma}}{|Z_k - \lambda|^{n+\Gamma}}. \tag{7}$$

Відмітимо, що при кожному $k \in N$ для $\mathrm{Re}\ \lambda > \mathrm{Re}\ Z_1$ виконується нерівність $|\mathrm{Re}\ Z_k| + \mathrm{Re}\ \lambda > 0$, а враховуючи те, що всі $\mathrm{Re}\ Z_k < 0$, отримаємо при $\mathrm{Re}\ \lambda > \mathrm{Re}\ Z_1$:

$$\begin{aligned}|Z_k - \lambda| &\geq |\mathrm{Re}\ (Z_k - \lambda)| = |\mathrm{Re}\ Z_k - \mathrm{Re}\ \lambda| = \\ &= |-|\mathrm{Re}\ Z_k| - \mathrm{Re}\ \lambda| = ||\mathrm{Re}\ Z_k| + \mathrm{Re}\ \lambda| = \\ &= |\mathrm{Re}\ Z_k| + \mathrm{Re}\ \lambda\end{aligned} \tag{8}$$

Додаючи і віднімаючи у правій частині нерівності (8) число $Re\ Z_1 + \varepsilon$, де ε – достатньо мале додатне число, матимемо

$$|Z_k - \lambda| \geq [\mathrm{Re}\ \lambda - (\mathrm{Re\ Z_1} + \varepsilon)] + [|\mathrm{Re\ Z_k}| + \mathrm{Re\ Z_1} + \varepsilon]\,.$$

Оскільки $\mathrm{Re}\ Z_1 < 0$, то в другому доданку $\mathrm{Re}\ Z_1 = -|\mathrm{Re}\ Z_1|$, тоді

$$\begin{aligned}|Z_k - \lambda| \quad &\geq [\mathrm{Re}\ \lambda - (\mathrm{Re}\ Z_1 + \varepsilon)] + [|\mathrm{Re}\ Z_k| - \\ &- |\mathrm{Re}\ Z_1| + \varepsilon],\ \ k \in N,\quad \varepsilon > 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Використовуючи нерівність (9), будемо оцінювати вираз (7) при $\mathrm{Re}\ \lambda > \mathrm{Re}\ Z_1 + \varepsilon$. На основі формули бінома Ньютона із врахуванням додатності чисел у квадратних дужках (9) отримаємо оцінку

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$\frac{C^{\Gamma}_{\Gamma+n-1}}{|Z_k-\lambda|^{n+\Gamma}} \le$$
$$\le \frac{\frac{n}{n+\Gamma}}{[\mathrm{Re}\,\lambda-(\mathrm{Re}\,Z_1+\varepsilon)]^n\,[|\mathrm{Re}\,Z_k|-|\mathrm{Re}\,Z_1|+\varepsilon]^{\Gamma}} \tag{10}$$

На основі оцінки (10) з оцінкою зверху $n/n+\Gamma$ одиницею нерівність (6) при $Re\ \lambda > Re\ Z_1+\varepsilon$ набуває вигляду

$$\|R^n_\lambda(A_k)\,f_k\| \le \frac{1}{[\mathrm{Re}\,\lambda-(\mathrm{Re}\,Z_1+\varepsilon)]^n}\sum_{\Gamma=0}^{\nu_k}\alpha^{\Gamma}_{k,\varepsilon}\,\|f_k\|, \tag{11}$$

де

$$\alpha_{k,\varepsilon} \overset{def}{=} \frac{M^*_0\,|\mathrm{Re}\,Z_k|}{|\mathrm{Re}\,Z_k|-|\mathrm{Re}\,Z_1|+\varepsilon},\quad k\in N. \tag{12}$$

Нехай $S_{k,\varepsilon} \overset{def}{=} \sum\limits_{\Gamma=0}^{\nu_k}\alpha^{\Gamma}_{k,\varepsilon}$; числові послідовності $\left\{\alpha^{\Gamma}_{k,\varepsilon}\right\}^{\infty}_{2}$ $(\varepsilon=0)$, $\left\{\alpha^{\Gamma}_{k,\varepsilon}\right\}^{\infty}_{1}$ $(\varepsilon>0)$ є монотонно спадними послідовностями, що прямують до M^*_0 при $k\to\infty$.

Умова теореми $\mathrm{Re}\ Z_1,\ \mathrm{Re}\ Z_2,\ ...,\ \mathrm{Re}\ Z_l \in (\mathrm{Re}\ Z_1/(1-M^*_0);\ \ \mathrm{Re}\ Z_1]$ означає, що при $\varepsilon=0$ виконуються нерівності

$$\alpha_{2,0}>\alpha_{3,0}>...>\alpha_{l-1,0}>\alpha_{l,0}>1,$$

$$1>\alpha_{l+1,0}>\alpha_{l+2,0}>...>M^*_0.$$

Безпосередньою перевіркою (аналіз (12)) можна переконатись в тому, що при достатньо малих $\varepsilon>0$, а точніше при $0<\varepsilon\le|\mathrm{Re}\ Z_1|-(1-M^*_0)\,|\mathrm{Re}\ Z_l|$, збурена послідовність $\{\alpha_{k,\varepsilon}\}^{\infty}_{1}$ $(\varepsilon>0)$ матиме таку властивість:

$$\frac{M^*_0\,|\mathrm{Re}\,Z_1|}{\varepsilon}=\alpha_{1,\varepsilon}>\alpha_{2,\varepsilon}>...>\alpha_{l-1,\varepsilon}>\alpha_{l,\varepsilon}>1, \tag{13}$$

$$1>\alpha_{l+1,\varepsilon}>\alpha_{l+2,\varepsilon}>...>M^*_0. \tag{14}$$

Приступимо до аналізу величин сум $S_{k,\varepsilon}$ $(k\in N)$, кожна з яких є сумою членів геометричної прогресії із знаменником $q_{k,\varepsilon}=\alpha_{k,\varepsilon}$.

а) Оскільки за умовою 1) теореми для $k=\overline{1,l}$ виконується $\nu_k<\infty$, то існують $S_{k,\varepsilon}\left(k=\overline{1,l}\right)$.

б) Для $k=l+1,l+2,...$, враховуючи властивість (14), незалежно від того, скінченні чи нескінченні ν_k, існують $S_{k,\varepsilon}$ і виконується оцінка

$$S_{k,\varepsilon}=\sum_{\Gamma=0}^{\nu_k}\alpha^{\Gamma}_{k,\varepsilon}\le\sum_{\Gamma=0}^{\infty}\alpha^{\Gamma}_{k,\varepsilon}\le\sum_{\Gamma=0}^{\infty}\alpha^{\Gamma}_{l+1,\varepsilon}=(1-\alpha_{l+1,\varepsilon})^{-1}.$$

Беручи до уваги відмічене в пунктах а), б), зробимо позначення:

$$S_\varepsilon \overset{def}{=} \max\left(S_{1,\varepsilon},\ S_{2,\varepsilon},\ ...,\ S_{l,\varepsilon},\ (1-\alpha_{l+1,\varepsilon})^{-1}\right),$$

тоді для довільного $k\in N$ та будь-якого достатньо малого $\varepsilon>0$ матимемо

$$S_{k,\varepsilon}\le S_\varepsilon, \tag{15}$$

що приводить до рівномірної по $k\in N$ обмеженості для довільного заданого $n\in N$ і λ з $\mathrm{Re}\ \lambda>\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon$ сім'ї операторів $R^n_\lambda(A_k)$ на основі формули (11)

$$\|R^n_\lambda(A_k)\,f_k\|\le\frac{S_\varepsilon}{[\mathrm{Re}\,\lambda-(\mathrm{Re}\,Z_1+\varepsilon)]^n}\ \ \|f_k\|. \tag{16}$$

Із рівності (4) з використанням оцінок (16) отримуємо

$$\|R^n_\lambda(A)\,f\|\le\frac{S_\varepsilon}{[\mathrm{Re}\,\lambda-(\mathrm{Re}\,Z_1+\varepsilon)]^n}\ \ \|f\|,$$

що означає

$$\|R^n_\lambda(A)\|_{[H]}\le\frac{S_\varepsilon}{[\mathrm{Re}\,\lambda-(\mathrm{Re}\,Z_1+\varepsilon)]^n}, \tag{17}$$

$$\forall n\in N,\quad \mathrm{Re}\,\lambda>\mathrm{Re}\,Z_1+\varepsilon,$$
$$0<\varepsilon<|\mathrm{Re}\,Z_1|-(1-M^*_0)\,|\mathrm{Re}\,Z_l|.$$

При $\varepsilon=0$ нерівність (17) не виконується, бо $\alpha_{1,0}=\infty$, а тому $S_{1,0}=\infty$ і, значить, оцінка (15) не існує для всіх $k\in N$. Отже, оцінка (3) виконується з $\inf\ \{\beta\}=Re\ Z_1$. Твердження 1) теореми 1 доведено.

Доведення твердження 2). Аналогічно до попереднього будемо доводити оцінку (3) для довільного $n\in N$ при $\mathrm{Re}\ \lambda>\beta>(1-\mathrm{M}^*_0)\mathrm{Re}\ \mathrm{Z}_{\mathrm{k_l}}$і покажемо, що для цієї оцінки $\inf\ \{\beta\}=(1-M^*_0)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}$.

На початку повторюємо всі викладення з доведення пункту 1), отримуючи формули (4), (5), (6) і розглядаємо вираз (7). Оскільки за умовою теореми $\mathrm{Re}\ Z_{k_l}>\mathrm{Re}\ Z_1/(1-M^*_0)$ і $(1-M^*_0)>0$, то $(1-M^*_0)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}>\mathrm{Re}\ Z_1$, а, значить, виконується нерівність (8). Далі, додаючи і віднімаючи в правій частині нерівності (8) число $(1-M^*_0)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon$, отримуємо

$$\begin{aligned}|Z_k-\lambda|\ &\ge[\mathrm{Re}\,\lambda-(1-M^*_0)\mathrm{Re}\,Z_{k_l}+\varepsilon]+\\&+[|\mathrm{Re}\,Z_k|-(1-M^*_0)|\mathrm{Re}\,Z_{k_l}|+\varepsilon],\end{aligned} \tag{18}$$

де в другій дужці використано запис $\mathrm{Re}\ \mathrm{Z}_{\mathrm{k_l}}=-|\mathrm{Re}\ Z_{k_l}|$.

Розглядаючи оцінку (18) при $\mathrm{Re}\lambda>(1-M^*_0)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon$ і враховуючи те, що при $\varepsilon\ge0$ обидва доданки в квадратних дужках є додатними числами, на основі формули бінома Ньютона приходимо до аналогічної формули – типу (10), яка дає можливість нерівність (6) звести до вигляду

$$\|R^n_\lambda(A_k)\,f_k\|\le$$
$$\le\frac{1}{[\mathrm{Re}\lambda-((1-M^*_0)\mathrm{Re}Z_{k_l}+\varepsilon)]^n}\sum_{\Gamma=0}^{\nu_k}\beta^{\Gamma}_{k,\varepsilon}\,\|f_k\| \tag{19}$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$\forall n \in N, \quad \forall k \in N, \quad \mathrm{Re}\lambda > (1 - M_0^*)\mathrm{Re}Z_{k_l} + \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0,$$

$$\beta_{k,\varepsilon} \stackrel{def}{=} \frac{M_0^* \left|\mathrm{Re}\, Z_k\right|}{\left|\mathrm{Re}Z_k\right| - (1 - M_0^*) \left|\mathrm{Re}Z_{k_l}\right| + \varepsilon}. \qquad (20)$$

Нехай $S_{k,\varepsilon} \stackrel{def}{=} \sum\limits_{\Gamma=0}^{\nu_k} \beta_{k,\varepsilon}^{\Gamma} \, (k \in N)$; числова послідовність $\{\beta_{k,\varepsilon}\}_1^{\infty} \, (\varepsilon \geq 0)$ є монотонно спадною послідовністю, що прямує до M_0^* при $k \to \infty$. При $\varepsilon = 0$ виконуються нерівності

$$\begin{array}{l} \beta_{1,0} > \beta_{2,0} > ... > \beta_{k_l,0} = 1, \\ 1 > \beta_{k_l+1,0} > \beta_{k_l+2,0} > ... > M_0^* \end{array} \qquad (21)$$

Аналізуючи (21), доходимо висновку, що, оскільки за умовою 2) теореми ν_{k_l} є першим із ν_k, що мають нескінченне значення, то $S_{k_l,0} = \sum\limits_{\Gamma=0}^{\infty} 1^{\Gamma} = \infty$, а для $k \neq k_l$ відповідні суми є скінченними, бо при $k = \overline{1, k_l - 1}$ маємо $\nu_k < \infty$, а при $k > k_l$ виконується умова $M_0^* < \beta_{k,0} < 1$.

Як видно із формули (20), при кожному фіксованому $\varepsilon > 0$ для монотонно спадної послідовності $\{\beta_{k,\varepsilon}\}_1^{\infty}$ виконується нерівність $\beta_{k,\varepsilon} < \beta_{k,0}$. Отже, беручи до уваги властивість (21), для збуреної послідовності (20)($\varepsilon > 0$) матимемо властивість

$$\begin{array}{l} \beta_{1,\varepsilon} > \beta_{2,\varepsilon} > ... > \beta_{k_l,\varepsilon} < 1, \\ 1 > \beta_{k_l+1,\varepsilon} > \beta_{k_l+2,\varepsilon} > ... > M_0^* \end{array} \qquad (22)$$

Властивість (22) забезпечує існування скінченних значень сум $S_{k,\varepsilon}$ для $\varepsilon > 0$ при всіх $k \in N$: для $k < k_l$ маємо $\nu_k < \infty$, а для $k \geq k_l$ виконується $M_0^* < \beta_{k,\varepsilon} < 1$.

Внаслідок монотонного спадання (22) числова послідовність $\{S_{k,\varepsilon}\}_{k_l}^{\infty}$ є обмеженою зверху

$$S_{k,\varepsilon} = \sum_{\Gamma=0}^{\nu_k} \beta_{k,\varepsilon}^{\Gamma} \leq \sum_{\Gamma=0}^{\infty} \beta_{k,\varepsilon}^{\Gamma} \leq \sum_{\Gamma=0}^{\infty} \beta_{k_l,\varepsilon}^{\Gamma} = (1 - \beta_{k_l,\varepsilon})^{-1} < \infty$$

Тепер приймемо

$$S_{\varepsilon} \stackrel{def}{=} \max\left(S_{1,\varepsilon}, \; S_{1,\varepsilon}, \; ..., \; S_{k_l-1,\varepsilon}, \; (1 - \beta_{k_l,\varepsilon})^{-1}\right),$$

тоді для всіх $\varepsilon > 0$ виконується оцінка

$$S_{k,\varepsilon} \leq S_{\varepsilon} \, (k \in N), \qquad (23)$$

а це приводить до рівномірної по $k \in N$ обмеженості сім'ї операторів $R_{\lambda}^{n}\left(A_k\right)$ для довільних $n \in N$ і $\mathrm{Re}\lambda > (1 - \mathrm{M}_0^*)\mathrm{ReZ_{k_l}} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$:

$$\left\|R_{\lambda}^{n}\left(A_k\right) f_k\right\| \leq \frac{S_{\varepsilon}}{\left[Re\lambda - ((1 - M_0^*)\mathrm{Re}\, \mathrm{Z_{k_l}} + \varepsilon)\right]^n} \quad \left\|f_k\right\|. \qquad (24)$$

Тепер з рівності (4) на основі оцінок (24) будемо мати

$$\left\|R_{\lambda}^{n}\left(A\right) f\right\| \leq \frac{S_{\varepsilon}}{\left[\mathrm{Re}\lambda - ((1 - M_0^*)\mathrm{Re}Z_{k_l} + \varepsilon)\right]^n} \left\|f\right\| \; \forall \; f \in H,$$

а це означає справедливість оцінки

$$\left\|R_{\lambda}^{n}\left(A\right)\right\|_{[H]} \leq \frac{S_{\varepsilon}}{\left[\mathrm{Re}\,\lambda - ((1 - \mathrm{M}_0^*)\mathrm{Re}\,\mathrm{Z_{k_l}} + \varepsilon)\right]^n}, \qquad (25)$$

$$\forall \, n \in N, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > (1 - \mathrm{M}_0^*)\mathrm{Re}\,\mathrm{Z_{k_l}} + \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0.$$

При $\varepsilon = 0$, очевидно, нерівність (25) не виконується, бо, як було відзначено вище, $S_{k_l,\,0} = \infty$ і, отже, оцінка (23) не має місця для всіх $k \in N$. Доходимо висновку: оцінка (3) виконується з $\inf\{\beta\} = (1 - M_0^*)\mathrm{Re}\,\mathrm{Z_{k_l}}$.

Твердження 2) теореми 1 доведено. ■

Теорема 2. *Нехай оператор* $A \in \widetilde{K}$*, спектр* σ *задовольняє умови* $\mathrm{Re}\,\mathrm{Z}_1 = 0$, $\mathrm{Re}\,\mathrm{Z_{k+1}} < \mathrm{Re}\,\mathrm{Z_k}$ $(k \in N)$, $\mathrm{Re}\,\mathrm{Z_k} \to -\infty$ *при* $k \to \infty$*;* $M_0 \in (0, 1)$*. Тоді незалежно від величин* ν_k *задача Коші (1), (2) є рівномірно коректною і її тип* $\omega_0 = 0$.

□ *Доведення.* При значенні $\mathrm{Re}\,\mathrm{Z}_1 = 0$ залишаються справедливими всі міркування, проведені під час доведення пункту 1) теореми 1 до одержання формули (11).

Отже, для $n \in N$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $k \in N$, $f_k \in H_k$ маємо оцінку

$$\left\|R_{\lambda}^{n}\left(A_k\right) f_k\right\| \leq \frac{1}{\left(\mathrm{Re}\,\lambda - \varepsilon\right)^n} \sum_{\Gamma=0}^{\nu_k} \gamma_{k,\varepsilon}^{\Gamma} \left\|f_k\right\|, \qquad (26)$$

де через $\gamma_{k,\varepsilon}$ позначена така числова послідовність:

$$\gamma_{k,\varepsilon} \stackrel{def}{=} \frac{M_0^* \left|\mathrm{Re}Z_k\right|}{\left|\mathrm{Re}Z_k\right| + \varepsilon}$$

При $\varepsilon = 0$ маємо

$$\gamma_{1,0} \text{ не існує}, \quad \gamma_{k,0} \equiv M_0^* < 1 \quad (k > 1). \qquad (27)$$

При $\varepsilon > 0$ виконується оцінка

$$0 \leq \gamma_{k,\varepsilon} < M_0^* < 1 \quad (k \in N). \qquad (28)$$

Внаслідок (28) при $\varepsilon > 0$ незалежно від значень ν_k для кожного $k \in N$ отримуємо

$$S_{k,\varepsilon} \stackrel{def}{=} \sum_{\Gamma=0}^{\nu_k} \gamma_{k,\varepsilon}^{\Gamma} \leq \sum_{\Gamma=0}^{\infty} \left(M_0^*\right)^{\Gamma} = \left(1 - M_0^*\right)^{-1}. \qquad (29)$$

Нерівність (26) на основі оцінки (29) спричиняє рівномірну обмеженість по $k \in N$ довільних натуральних степенів резольвент операторів $A_k \in [H_k]$ при $\mathrm{Re}\,\lambda > \varepsilon > 0$, що своєю чергою забезпечує виконання оцінки

$$\left\|R_{\lambda}^{n}\left(A\right)\right\|_{[H]} \leq \frac{\left(1 - M_0^*\right)^{-1}}{\left(\mathrm{Re}\,\lambda - \varepsilon\right)^n}. \qquad (30)$$

При $\varepsilon = 0$ в результаті властивості (27) нерівність (30) не виконується, тому оцінка (3) справджується з $\inf\{\beta\} = 0$. Теорема 2 доведена. ■

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Теорема 3. *Нехай оператор $A \in \widetilde{K}$, спектр σ задовольняє умови $Re Z_1 > 0$, $Re Z_{k+1} < Re Z_k$, $Re Z_k \to -\infty$ при $k \to \infty$; $M_0 \in (0;1)$. Припустимо, що в проміжок $(Re Z_1/(1+M_0^*);\ Re Z_1]$ на додатній півосі попадають l значень $Re Z_k$: $Re Z_1,\ Re Z_2,\ ...,\ Re Z_l$ (очевидно $1 \le l < \infty$). Мають місце такі два твердження:*

1) якщо всі ν_k $\left(k=\overline{1,l}\right)$ скінченні, то незалежно від величин ν_k для $k > l$ (скінченні чи ні) відповідна задача Коші (1), (2) є рівномірно коректною і її тип $\omega_0 = Re Z_1$;

2) якщо хоча б одне з ν_k $\left(k=\overline{1,l}\right)$ нескінченне, то незалежно від величин ν_k для $k > l$ задача Коші (1), (2) є рівномірно коректною і її тип $\omega_0 = (1+M_0^*) Re Z_{k_l}$ $(k_l \in \{1,2,...,l\})$, де Z_{k_l} – перше із нескінченнократних власних значень серед $Z_1,\ Z_2,\ ...,\ Z_l$: $Re Z_{k_l} = \max\limits_{\nu_k=\infty} \left\{Re Z_k : k=\overline{1,l}\right\}$.

☐ *Доведення.*

Доведення твердження 1). Доводимо оцінку (3) з $\inf\{\beta\} = \mathrm{Re}\, Z_1$. Розіб'ємо множину $\{\mathrm{Re}\, Z_k\}_1^\infty$ на три частини:

$$\mathrm{Re}\, Z_1,\ \mathrm{Re}\, Z_2,\ ...,\ \mathrm{Re}\, Z_l \in (\mathrm{Re}\, Z_1/(1+M_0^*);\ \mathrm{Re}\, Z_1],$$

$$\mathrm{Re}\, Z_{l+1},\ \mathrm{Re}\, Z_{l+2},\ ...,\ \mathrm{Re}\, Z_m \in [0;\ \mathrm{Re}\, Z_1/(1+M_0^*)],$$

$$\mathrm{Re}\, Z_{m+1},\ \mathrm{Re}\, Z_{m+2},\ ...\ \in (-\infty;0).$$

Тепер будемо оцінювати зверху вираз

$$\left|\frac{1}{\Gamma!} D_{Z_k}^{\Gamma} (Z_k-\lambda)^{-n}\right| = \frac{C_{\Gamma+n-1}^{\Gamma}}{|Z_k-\lambda|^{n+\Gamma}}. \qquad (31)$$

Якщо $\mathrm{Re}\ Z_k < 0$ і $\mathrm{Re}\ \lambda > \mathrm{Re}\ Z_1 > 0$, то очевидно є оцінка

$$|Z_k-\lambda| \ge |\mathrm{Re}\ (Z_k-\lambda)| = |\mathrm{Re}\ Z_k - \mathrm{Re}\ \lambda| =$$
$$= |-|\mathrm{Re}\ Z_k| - \mathrm{Re}\ \lambda| = ||\mathrm{Re}\ Z_k| + \mathrm{Re}\ \lambda| =$$
$$= |\mathrm{Re}\ Z_k| + \mathrm{Re}\ \lambda.$$

Якщо $0 \le \mathrm{Re}\ Z_k \le \mathrm{Re}\ Z_1$ і $\mathrm{Re}\ \lambda > Re\ Z_1 > 0$, то $\mathrm{Re}\ Z_k - \mathrm{Re}\ \lambda \le \mathrm{Re}\ Z_1 - \mathrm{Re}\ \lambda < 0$, а тому матимемо

$$|Z_k-\lambda| \ge |\mathrm{Re}\ (Z_k-\lambda)| = |\mathrm{Re}\ Z_k - \mathrm{Re}\ \lambda| = \mathrm{Re}\ \lambda - \mathrm{Re}\ Z_k.$$

Отже, при $\mathrm{Re}\ \lambda > \mathrm{Re}\ Z_1$ справджується нерівність

$$|Z_k-\lambda| \ge \left[\begin{array}{ll} \mathrm{Re}\ \lambda - \mathrm{Re}\ Z_k, & k=\overline{1,m}, \\ \mathrm{Re}\ \lambda + |\mathrm{Re}\ Z_k|, & k>m. \end{array}\right. \qquad (32)$$

Додаючи і віднімаючи в правій частині нерівності (32) число $\mathrm{Re}\ Z_1 + \varepsilon$, де ε – достатньо мале додатне число, будемо мати при $Re\ \lambda > \mathrm{Re}\ Z_1$

$$|Z_k-\lambda| \ge \left[\begin{array}{l} [\mathrm{Re}\ \lambda - (\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon)] + [\mathrm{Re}\ Z_1 + \varepsilon - \mathrm{Re}\ Z_k],\ k=\overline{1,m}, \\ [\mathrm{Re}\ \lambda - (\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon)] + [\mathrm{Re}\ Z_1 + \varepsilon + |\mathrm{Re}\ Z_k|],\ k>m. \end{array}\right. \qquad (33)$$

Знову звернемось до виразу (31), який будемо розглядати при $\mathrm{Re}\lambda > \mathrm{Re}\, Z_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Оскільки тоді права частина нерівностей (33) є сумою двох додатних доданків, то повторивши схему оцінювання з використанням формули бінома Ньютона, яка була використана при отриманні оцінки (10) під час доведення твердження 1) теореми 1, приходимо до аналогічної оцінки

$$\frac{C_{\Gamma+n-1}^{\Gamma}}{|Z_k-\lambda|^{n+\Gamma}} \le \left[\begin{array}{l} \dfrac{\frac{n}{n+\Gamma}}{[\mathrm{Re}\ \lambda - (\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon)]^n [\mathrm{Re}\ Z_1 + \varepsilon - \mathrm{Re}\ Z_k]^{\Gamma}},\ k=\overline{1,m}, \\ \\ \dfrac{\frac{n}{n+\Gamma}}{[\mathrm{Re}\ \lambda - (\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon)]^n [\mathrm{Re}\ Z_1 + \varepsilon + |\mathrm{Re}\ Z_k|]^{\Gamma}},\ k>m. \end{array}\right. \qquad (34)$$

Використаємо в нерівності (6) оцінку (34), оцінивши зверху множник $n/(n+\Gamma)$ одиницею. При $\mathrm{Re}\ \lambda > \mathrm{Re}\ Z_1 + \varepsilon$ матимемо

$$\|R_\lambda^n(A_k) f_k\| \le \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{[\mathrm{Re}\ \lambda - (\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon)]^n} \sum\limits_{\Gamma=0}^{\nu_k} \left(\alpha_{k,\varepsilon}^{+}\right)^{\Gamma} \|f_k\|,\ \ k=\overline{1,m}\ , \\ \dfrac{1}{[\mathrm{Re}\ \lambda - (\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon)]^n} \sum\limits_{\Gamma=0}^{\nu_k} \left(\alpha_{k,\varepsilon}^{-}\right)^{\Gamma} \|f_k\|,\ \ k>m\ , \end{array}\right. \qquad (35)$$

де

$$\alpha_{k,\varepsilon}^{+} \stackrel{def}{=} \frac{M_0^* \mathrm{Re}\ Z_k}{\mathrm{Re}\ Z_1 + \varepsilon - \mathrm{Re}\ Z_k},\ \ k=\overline{1,m}\ ,$$
$$\alpha_{k,\varepsilon}^{-} \stackrel{def}{=} \frac{M_0^* \mathrm{Re}\ Z_k}{\mathrm{Re}\ Z_1 + \varepsilon + |\mathrm{Re}\ Z_k|},\ \ k=m\ . \qquad (36)$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Введемо позначення

$$S_{k,\varepsilon} \overset{def}{=} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{\Gamma=0}^{\nu_k} \left(\alpha_{k,\varepsilon}^{+}\right)^{\Gamma}, \;\; k=\overline{1,m}, \\ \sum\limits_{\Gamma=0}^{\nu_k} \left(\alpha_{k,\varepsilon}^{-}\right)^{\Gamma}, \;\; k>m. \end{array} \right.$$

Як видно з формули (36) при довільному $\varepsilon \geq 0$ числова послідовність $\left\{\alpha_{k,\varepsilon}^{-}\right\}_{m+1}^{\infty}$ є обмеженою зверху

$$0<\alpha_{k,\varepsilon}^{-}<M_0^*<1, \quad k>m. \tag{37}$$

Скінченні числові послідовності $\left\{\alpha_{k,0}^{+}\right\}_{2}^{m}$, $\left\{\alpha_{k,\varepsilon}^{+}\right\}_{1}^{m}$ $(\varepsilon>0)$ є монотонно спадними невід'ємними послідовностями.

Умова теореми $\mathrm{Re}\ Z_k \in (\mathrm{Re}\ Z_1/(1+M_0^*);\ \mathrm{Re}\ Z_1]$ при $k=\overline{1,l}$ означає, що при $\varepsilon=0$ виконуються нерівності

$$\infty=\alpha_{1,0}^{+}>\alpha_{2,0}^{+}>...>\alpha_{l-1,0}^{+}>\alpha_{l,0}^{+}>1,$$

$$1\geq\alpha_{l+1,0}^{+}>\alpha_{l+2,0}^{+}>...>\alpha_{m,0}^{+}\geq 0.$$

Безпосередньою перевіркою (аналіз верхньої формули (36)) можна переконатись в тому, що при достатньо малих ε, а точніше при

$$0<\varepsilon\leq(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_l-\mathrm{Re}\ Z_1$$

збурена послідовність $\left\{\alpha_{k,\varepsilon}^{+}\right\}_{1}^{m}$ матиме таку властивість:

$$\frac{M_0^*\mathrm{Re}\ Z_1}{\varepsilon}=\alpha_{1,\varepsilon}^{+}>\alpha_{2,\varepsilon}^{+}>...>\alpha_{l-1,\varepsilon}^{+}>\alpha_{l,\varepsilon}^{+}\geq 1, \tag{38}$$

$$1>\alpha_{l+1,\varepsilon}^{+}>\alpha_{l+2,\varepsilon}^{+}>...>\alpha_{m,\varepsilon}^{+}\geq 0. \tag{39}$$

Оскільки сума $S_{k,\varepsilon}$ є сумою членів геометричної прогресії із знаменником $\alpha_{k,\varepsilon}^{+}\left(k=\overline{1,m}\right)$ і $\alpha_{k,\varepsilon}^{-}(k>m)$, то враховуючи властивості (37), (38), (39), а також умови 1) теореми, доходимо такого висновку: при $0<\varepsilon\leq(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_l-\mathrm{Re}\ Z_1$ існують скінченні значення сум $S_{k,\varepsilon}$для всіх $k\in N$, причому числова послідовність $\{S_{k,\varepsilon}\}_1^{\infty}$ є обмеженою зверху.

Дійсно,

а) для $k=\overline{1,l}$ існують скінченні значення $S_{k,\varepsilon}$, бо відповідні $\nu_k<\infty$;

б) для $k=\overline{l+1,\ m}$ і $k>m$ існування скінченних значень $S_{k,\varepsilon}$незалежно від величин ν_k випливає відповідно із властивостей (39) і (37), причому внаслідок останньої отримуємо оцінку

$$S_{k,\varepsilon}<\sum_{\Gamma=0}^{\infty}\left(M_0^*\right)^{\Gamma}=\left(1-M_0^*\right)^{-1}, \quad k>m.$$

Нехай $S_{\varepsilon}\overset{def}{=}\max\left(S_{1,\varepsilon}^{,} S_{2,\varepsilon}^{,} ..., S_{m,\varepsilon}^{,}\ (1-M_0^*)^{-1}\right)$, тоді для всіх $k\in N$ і достатньо малих $\varepsilon>0$ маємо

$$S_{k,\varepsilon}\leq S_{\varepsilon}, \tag{40}$$

що забезпечує рівномірну по $k\in N$ обмеженість сім'ї операторів $R_{\lambda}^{n}(A_k)$ для кожного заданого $n\in N$і $\lambda\in C$ з $Re\ \lambda>\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon$.

Дійсно, використавши оцінку (40) в нерівності (35), будемо мати

$$\|R_{\lambda}^{n}(A_k)\,f_k\|\leq\frac{S_{\varepsilon}}{[\mathrm{Re}\ \lambda-(\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon)]^n}\ \ \|f_k\| \tag{41}$$

для будь-яких $k,n\in N$, $\quad\mathrm{Re}\ \lambda>\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon,\quad\varepsilon>0$.

Повертаючись до рівності (4) з врахуванням оцінки (41), отримаємо

$$\|R_{\lambda}^{n}(A)\,f\|\leq\frac{S_{\varepsilon}}{[\mathrm{Re}\ \lambda-(\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon)]^n}\ \ \|f\|,\quad\forall f\in H,$$

тобто

$$\|R_{\lambda}^{n}(A)\|_{[H]}\leq\frac{S_{\varepsilon}}{[\mathrm{Re}\ \lambda-(\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon)]^n} \tag{42}$$

$\forall n\in N,\ \mathrm{Re}\ \lambda>\mathrm{Re}\ Z_1+\varepsilon,\ 0<\varepsilon\leq(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_l-\mathrm{Re}\ Z_1.$

Для $\varepsilon=0$ нерівність (42) не виконується, бо $\alpha_{1,0}^{+}=\infty$, отже, $S_{1,0}=\infty$ і, врешті-решт, оцінка (40) не має місця для всіх $k\in N$. Значить, оцінка (3) виконується з $\inf\ \{\beta\}=\mathrm{Re}\ Z_1$.

Твердження 1) теореми 3 доведено.

Доведення твердження 2). Доводимо оцінку (3) з $\inf\ \{\beta\}=(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}$. Оскільки за умовою теореми $\mathrm{Re}\ Z_{k_l}>\mathrm{Re}\ Z_1/(1+M_0^*)$ і $1+M_0^*>0$, то $(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}>\mathrm{Re}\ Z_1$, тому, якщо $\mathrm{Re}\ \lambda>$ $>(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}$, то $\mathrm{Re}\ \lambda>\mathrm{Re}\ Z_1$. Отже, при $\mathrm{Re}\ \lambda>(1+\mathrm{M}_0^*)\mathrm{Re}\ \mathrm{Z}_{\mathrm{k_l}}$виконується нерівність (32). Додаючи і віднімаючи в правій частині нерівності (32) число $(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon$, отримаємо

$$|Z_k-\lambda|\geq\left[\begin{array}{l}[\mathrm{Re}\ \lambda-((1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon)]+[(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon-\mathrm{Re}\ Z_k],\ k=\overline{1,m},\\ [\mathrm{Re}\ \lambda-((1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon)]+[(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon+|\mathrm{Re}\ Z_k|],\ k>m.\end{array}\right. \tag{43}$$

Далі, як і раніше при доведенні твердження 1), оцінюємо зверху вираз (31) при$\mathrm{Re}\ \lambda>(1+\mathrm{M}_0^*)\mathrm{Re}\ \mathrm{Z}_{\mathrm{k_l}}+\varepsilon$, де $\varepsilon\geq 0$. при цьому доданки в правій частині нерівностей (43) є додатними і тому можемо отримати оцінку, аналогічно (34):

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$\frac{C_{\Gamma+n-1}^{\Gamma}}{|Z_k-\lambda|^{n+\Gamma}} \leq \left[\begin{array}{l} \dfrac{\frac{n}{n+\Gamma}}{[\mathrm{Re}\ \lambda-((1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon)]^n\cdot\ [(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon-\mathrm{Re}\ Z_k]^{\Gamma}},\ k=\overline{1,m}\ , \\ \dfrac{\frac{n}{n+\Gamma}}{[\mathrm{Re}\ \lambda-((1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon)]^n\cdot\ [(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon+|\mathrm{Re}\ Z_k|]^{\Gamma}},\ k>m\ . \end{array}\right. \tag{44}$$

На основі оцінки (44) з нерівності (6) будемо мати

$$[\|R_\lambda^n\,(A_k)\,f_k\| \leq \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{[\mathrm{Re}\ \lambda-((1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon)]^n}\sum\limits_{\Gamma=0}^{\nu_k}\left(\beta_{k,\varepsilon}^{+}\right)^{\Gamma}\|f_k\|,\quad k=\overline{1,m}\ , \\ \dfrac{1}{[\mathrm{Re}\ \lambda-((1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon)]^n}\sum\limits_{\Gamma=0}^{\nu_k}\left(\beta_{k,\varepsilon}^{-}\right)^{\Gamma}\|f_k\|,\quad k>m\ . \end{array}\right. \tag{45}$$

$$\forall n\in N,\quad \mathrm{Re}\ \lambda>(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ \ Z_{k_l}+\varepsilon,\quad \varepsilon>0,$$

де

$$\begin{array}{l} \beta_{k,\varepsilon}\overset{def}{=}\frac{M_0^*\mathrm{Re}\ Z_k}{(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon-\mathrm{Re}\ Z_k},\ \ k=\overline{1,m}\ , \\ \beta_{k,\varepsilon}^{-}\overset{def}{=}\frac{M_0^*\mathrm{Re}\ Z_k}{(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon+|\mathrm{Re}\ Z_k|},\ \ k>m\ . \end{array} \tag{46}$$

Введемо позначення

$$S_{k,\varepsilon}\overset{def}{=}\left[\begin{array}{l} \sum\limits_{\Gamma=0}^{\nu_k}\left(\beta_{k,\varepsilon}^{+}\right)^{\Gamma},\quad k=\overline{1,m}, \\ \sum\limits_{\Gamma=0}^{\nu_k}\left(\beta_{k,\varepsilon}^{-}\right)^{\Gamma},\quad k>m. \end{array}\right.$$

З формули (46) безпосередньо випливає, що при всіх $\varepsilon\geq 0$ числова послідовність $\left\{\beta_{k,\varepsilon}^{-}\right\}_{m+1}^{\infty}$ є обмеженою зверху

$$0<\beta_{k,\varepsilon}^{-}<M_0^*<1,\quad k>m. \tag{47}$$

Скінченна числова послідовність $\left\{\beta_{k,\varepsilon}^{+}\right\}_{1}^{m}$ $(\varepsilon\geq 0)$ є монотонно спадною невід'ємною послідовністю.

При $\varepsilon=0$ виконується така властивість:

$$\begin{array}{l} \beta_{1,0}^{+}>\beta_{2,0}^{+}>...>\beta_{k_l-1,0}^{+}>\beta_{k_l,0}^{+}=1, \\ 1>\beta_{k_l+1,0}^{+}>\beta_{k_l+2,0}^{+}>...>\beta_{m,0}^{+}\geq 0. \end{array} \tag{48}$$

Оскільки за умови 2) теореми ν_{k_l}є першим із ν_k, що мають нескінченне значення, то на основі (48) маємо

$$S_{k_l,0}=\sum_{\Gamma=0}^{\infty}\left(\beta_{k_l,0}^{+}\right)^{\Gamma}=\sum_{\Gamma=0}^{\infty}1^{\Gamma}=\infty.$$

Для $k\neq k_l$ значення відповідних сум є скінченними, бо при $k=\overline{1,k_l-1}$ за умовою 2) теореми $\nu_k<\infty$, а при $k>k_l$ існує оцінка $\beta_{k,0}^{\pm}<1$.

Як видно з формули (46), при кожному фіксованому $\varepsilon>0$ виконується нерівність $\beta_{k,\varepsilon}^{+}<\beta_{k,0}^{+}$ при $k=\overline{1,m}$, якщо $\beta_{m,0}^{+}>0$. Якщо ж $\beta_{m,0}^{+}=0$ то $\beta_{m,\varepsilon}^{+}=0$, а для $k=\overline{1,m-1}$ виконується $\beta_{k,\varepsilon}^{+}<\beta_{k,0}^{+}$. Внаслідок цього для збуреної послідовності $\left\{\beta_{k,\varepsilon}^{+}\right\}_{1}^{m}$ матимемо

$$\begin{array}{l} \beta_{1,\varepsilon}^{+}>\beta_{2,\varepsilon}^{+}>...>\beta_{k_l-1,\varepsilon}^{+}>\beta_{k_l,\varepsilon}^{+}<1, \\ 1>\beta_{k_l+1,\varepsilon}^{+}>\beta_{k_l+2,\varepsilon}^{+}>...>\beta_{m,\varepsilon}^{+}\geq 0. \end{array} \tag{49}$$

Властивості (47), (49) забезпечують існування скінченних значень сум $S_{k,\varepsilon}$ при $\varepsilon>0$ для всіх $k\in N$. Більш того, числова послідовність $\{S_{k,\varepsilon}\}_1^{\infty}$ при $\varepsilon>0$ є обмеженою. Це випливає з таких міркувань:
а) для $k=\overline{1,k_l-1}$ скінченні значення $S_{k,\varepsilon}$ існують, оскільки за умовою 2) теореми для довільних значень k виконується $\nu_k<\infty$;
б) для $k=\overline{k_l,\ m}$ і $k>m$ існування скінченних значень $S_{k,\varepsilon}$ в незалежності від величин ν_k є результатом властивості (49) і відповідно (47), причому остання дає оцінку

$$S_{k,\varepsilon}<\sum_{\Gamma=0}^{\infty}\left(M_0^*\right)^{\Gamma}=(1-M_0^*)^{-1}\,,\quad k>m.$$

Нехай тепер

$$S_{\varepsilon}\overset{def}{=}\max\left(S_{1,\varepsilon},\ S_{2,\varepsilon},\ ...,\ S_{m,\varepsilon},\ (1-M_0^*)^{-1}\right),$$

тоді для довільного $k\in N$ і $\varepsilon>0$ будемо мати

$$S_{k,\varepsilon}\leq S_{\varepsilon}. \tag{50}$$

Завдяки оцінці (50) для будь-якого фіксованого $n\in N$ і $\lambda\in C$ з $\mathrm{Re}\ \lambda>(1+M_0^*)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon$ при $\varepsilon>0$ оператори $R_\lambda^n\,(A_k)$ є рівномірно обмежені по $k\in N$ (формула (45)):

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$\|R^n_\lambda(A_k) f_k\| \le \frac{S_\varepsilon}{[\mathrm{Re}\ \lambda - ((1+M^*_0)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon)]^n} \|f_k\|. \quad (51)$$

Використовуємо оцінку (51), рівність (4) і отримуємо

$$\|R^n_\lambda(A) f\| \le \frac{S_\varepsilon}{[\mathrm{Re}\ \lambda - ((1+M^*_0)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon)]^n} \|f\| \quad \forall f \in H,$$

що означає виконання оцінки

$$\|R^n_\lambda(A)\|_{[H]} \le \frac{S_\varepsilon}{[\mathrm{Re}\ \lambda - ((1+M^*_0)\mathrm{Re}\ \mathrm{Z_{k_l}}+\varepsilon)]^n} \quad (52)$$

$$\forall n \in N, \quad Re\ \lambda > (1+M^*_0)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}+\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

При $\varepsilon = 0$ нерівність (52) не виконується, бо, як було відзначено вище, сума $S_{k_l,0} = \infty$ і, отже, оцінка (50) не існує для всіх $k \in N$. Отже, оцінка (3) виконується з $\inf\ \{\beta\} = (1+M^*_0)\mathrm{Re}\ Z_{k_l}$. Твердження 2) теореми 3 доведено. ■

Зауваження 1.

а) З доведення твердження 1) теорем 1, 3 а також з доведення теореми 2 видно, що, якщо числа ν_k є обмеженими в сукупності: $\nu_k < \nu < \infty$ (клас операторів $K(H, \sigma, \nu, V, M_0)$), то величина сталої M^*_0 (відповідно тоді сталої M^*_0) не відіграє ніякої ролі і, отже, одержуємо теорему, сформульовану в роботі [1].

б) З доведення теорем 1, 2, 3 випливає, що у випадку наявності нескінченних кратностей ν_k для значень сталої $M_0 \ge 1$ оцінка (3) не виконуватиметься, а оскільки її виконання є необхідною і достатньою умовою для рівномірної коректності, то задача Коші (1), (2) за таких умов не буде рівномірно коректною.

Зауваження 2. Теореми 1, 2 відображають такий факт: перехід від скінченних кратностей до нескінченних (від класу K до класу $\tilde{K}$) може суттєво вплинути на якісну поведінку розв'язків задачі Коші.

Припустимо, що параметри деякої задачі Коші (1), (2) знаходяться в межах умов, наприклад, теореми 1 з $\mathrm{Re}\ Z_1 = -100$ і $M^*_0 = 0,95$.

а) Нехай заради простоти $\nu_k < \infty$ для всіх $k \in N$, тобто очевидно реалізується випадок 1) цієї теореми, а, значить, тип задачі $\omega_0 = \mathrm{Re}\ Z_1 = -100$. Тоді для розв'язків цієї задачі справджується оцінка

$$\|u(t)\|_H \le M_1 e^{-100t} \|u_0\|_H, \quad t \in (0, \infty)$$

б) Тепер припустимо, що $\nu_1 = \infty$, тоді також очевидно реалізується випадок 2) теореми 1 і тип задачі Коші починає дорівнювати $\omega_0 = (1-M^*_0)\,\mathrm{Re}\ Z_1 = 0,05\,(-100) = -5$, а, отже, матимемо вже таку оцінку:

$$\|u(t)\|_H \le M_2 \mathrm{e}^{-5t} \|u_0\|_H, \quad t \in (0, \infty).$$

Отже, у випадку б) розв'язок прямує до нуля на нескінченності значно повільніше ніж у випадку а); це стосується і коефіцієнтів Фур'є $u_{kj}(t)$ в зображенні розв'язку $u(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\nu_k} u_{kj}(t) v^j_k$, що призводить до втрати гладкості розв'язку відносно оператора A.

Література

[1] Бушмакін В.М., Каленюк П.І. Рівномірна коректність абстрактної задачі Коші з кратним спектром// Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка". – 1998. – № 337. – С. 86 – 88.

[2] Бушмакін В.М. Деякі крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь з кратним спектром: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1997. – 20 с.

[3] Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.

[4] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

[5] Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М: Наука, 1980. – 232 с.

[6] Krein S. Linear differential equation in Banach space. // Amer. Math. Soc., 1971. – 29. – 395 p.

[7] Hersh R. Explicit solution of a class of higher order abstract Caushy problems // J. Diff. Equat. – 1970. – 8, № 3. – P. 570–573.

[8] Chazarain J. Problemes de Caushy abstraites et applications a quelques problemes mixtes // J. Funct. Anal. – 1971. – 7, № 3. – P. 386–446.

[9] Hille E., Philips R.S. Functional analysis and semigroups. // Amer. Math. Soc., 1982. – 31. – 820 p.

[10] Yosida K. Functional analysis. – Springer – Verlag, New York, 1980 – 513 p.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

THE UNIFORM CORRECTNESS OF THE ABSTRACT CAUCHY PROBLEM WITH UNBOUNDED SPECTRUM MULTIPLICITIES

V. Bushmakin*, P. Kalenyuk

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

The abstract Cauchy problem in the separable Hilbert space is investigated. The problem in question attracts attention to it's multiple spectrum in which lengthes of eigenvectors and associated vectors aren't uniformly bounded. The obtained results find their applications in the theory either of classical or the generalized solutions for the boundary problems of the corresponding type.

Keywords: Cauchy problem, unbounded linear operator, multiple spectrum, eigenvectors and associated vectors, Riesz basis, resolvent.

2000 MSC: 35K45, 35K65

UDK: 517.983

*Corresponding author

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua