ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.643 № 643, (2009) с. 45–52

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 45–52

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА В ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Г.А. Снітко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Наукова 3б, 79060, Львів, Україна

(Отримано 4 листопада 2008 р.)

Встановлено умови єдиності та локального існування класичного розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомим залежним від часу коефіцієнтом при першій похідній невідомої функції в області з вільною межею.

Ключові слова: обернена задача, функція Гріна, вільна межа, параболічне рівняння.

2000 MSC: 35R30

УДК: 517.95

Вступ

У цій роботі встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення залежного від часу молодшого коефіцієнта в одновимірному параболічному рівнянні другого порядку в області з вільною межею з різними наборами умов перевизначення. Зазначимо, що в роботі [1] встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом в області з двома невідомими ділянками межі з інтегральними умовами перевизначення. Задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при першій похідній невідомої функції в параболічному рівнянні в області з відомою межею досліджені в працях [2, 3, 4]. Обернена задача з вільною межею для параболічного рівняння з пам'яттю розглянута в [5].

I. Формулювання задачі

В області $\Omega_T=\{(x,t):\ h_1(t)<x<h_2(t), 0<t<T\}$, де $h_1=h_1(t)$, $h_2=h_2(t)$ – невідомі функції, розглянемо обернену задачу визначення коефіцієнта $b=b(t)$ в параболічному рівнянні

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega_T, \tag{1}$$

за початкової умови

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in[h_1(0),h_2(0)], \tag{2}$$

крайових умов

$$u(h_1(t),t)=\mu_1(t),\ \ u(h_2(t),t)=\mu_2(t),\ \ t\in[0,T], \tag{3}$$

та умов перевизначення

$$h_1'(t)=u_x(h_1(t),t)+\mu_3(t),\ h_2'(t)=-u_x(h_2(t),t)+\mu_4(t),$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)dx=\mu_5(t), \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

де $h_1(0)=h_{01}$ – задане число.

Заміною змінних $y=\dfrac{x-h_1(t)}{h_2(t)-h_1(t)}$, $t=t$ зводимо задачу (1)-(4) до оберненої з невідомими $(h_1(t), h_3(t), b(t), v(y,t))$, де $h_3(t)=h_2(t)-h_1(t)$, $v(y,t)=u(yh_3(t)+h_1(t),t)$, в області з фіксованими межами $Q_T=\{(y,t): 0<y<1, 0<t<T\}$:

$$v_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,v_{yy}+\frac{b(t)+h_1'(t)+y\,h_3'(t)}{h_3(t)}v_y+ +c(yh_3(t)+h_1(t),t)\,v+f(yh_3(t)+h_1(t),t), \qquad (y,t)\in Q_T, \tag{5}$$

$$v(y,0)=\varphi(yh_3(0)+h_{01}), \quad y\in[0,1], \tag{6}$$

$$v(0,t)=\mu_1(t), \qquad v(1,t)=\mu_2(t), \quad t\in[0,T], \tag{7}$$

$$h_1'(t)=\frac{v_y(0,t)}{h_3(t)}+\mu_3(t), \tag{8}$$

$$h_3'(t)=-\frac{v_y(0,t)+v_y(1,t)}{h_3(t)}+\mu_4(t)-\mu_3(t), \tag{9}$$

$$h_3(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_5(t), \quad t\in[0,T]. \tag{10}$$

II. Існування та єдиність розв'язку задачі (5)–(10)

Умови існування класичного розв'язку задачі (5)–(10) містяться в теоремі.

Теорема 1. *При виконанні умови*

1) $c,f\in C^{1,0}([h_{01},\infty)\times[0,T])$, $\varphi\in C^1[h_{01},\infty)$, $\mu_i\in C^1[0,T]$, $i=1,2,5$;

2) $a(x,t)>0$, $c(x,t)\le -c_0<0$, $0<f(x,t)\le f_0$, $(x,t)\in[h_{01},\infty)\times[0,T]$, $0<\varphi_0\le\varphi(x)\le\varphi_1$, $x\in[h_{01},\infty)$, $\mu_i(t)>0$, $i=1,2,5$, $t\in[0,T]$;

3) $a \in C^{1,0}([h_{01},\infty)\times[0,T])$, $a_x(x,t)$ *задовольняє умову Гельдера за змінною* x *з показником* α, $0<\alpha<1$, $\mu_j \in C[0,T]$, $j=3,4$, $\mu_2(t)-\mu_1(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$;

4) $\varphi(h_{01})=\mu_1(0)$, $\quad \varphi(h_2(0))=\mu_2(0)$

можна вказати таке число $T_0 : 0<T_0\le T$, *яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок* $(h_1,h_3,b,v) \in (C^1[0,T_0])^2 \times C[0,T_0]\times C^{2,1}(Q_{T_0})\cap \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, $h_3(t)>0$, $t\in[0,T_0]$ *задачі (5)–(10).*

$\square$ *Доведення.* Визначимо початкове значення функції $h_2(t)$, що задає частину межі області. З умов (2), (4) та припущень теореми очевидно існування єдиного значення $h_2(0)=h_{02}$, яке задовольняє рівняння

$$\int\limits_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x)dx=\mu_5(0).$$

Позначимо $h_{03}=h_{02}-h_{01}$. Встановимо оцінки для функції $h_3(t)$. Згідно з принципом максимуму [6] для розв'язку прямої задачі (5)–(7) маємо

$$0<M_1\le v(y,t)\le M_2<\infty, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{11}$$

де $M_1=\min\left\{\min\limits_{[h_{01},h_{02}]}\varphi(x),\ \min\limits_{[0,T]}\mu_1(t),\ \min\limits_{[0,T]}\mu_2(t)\right\}$,

$$M_2=\max\left\{\max\limits_{[h_{01},h_{02}]}\varphi(x),\ \max\limits_{[0,T]}\mu_1(t), \max\limits_{[0,T]}\mu_2(t),\frac{f_0}{c_0}\right\}.$$

Тоді з (10) одержимо

$$0<H_1\le h_3(t)\le H_2<\infty, \quad t\in[0,T], \tag{12}$$

де $H_1=\dfrac{1}{M_2}\min\limits_{[0,T]}\mu_5(t)$, $H_2=\dfrac{1}{M_1}\max\limits_{[0,T]}\mu_5(t)$.

Зведемо задачу (5)–(10) до системи рівнянь. Тимчасово припустимо, що функції $h_1(t),h_3(t),b(t)$ відомі. Пряма задача (5)–(7) еквівалентна рівнянню

$$v(y,t)=v_0(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)v_\eta(\eta,\tau)\times$$

$$\times\frac{b(\tau)+h_1'(\tau)+\eta\, h_3'(\tau)}{h_3(\tau)}d\eta d\tau, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{13}$$

де $G_1(y,t,\eta,\tau)$ – функція Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,v_{yy}+c(yh_3(t)+h_1(t),t)v,$$

а $v_0(y,t)$ має вигляд [7]

$$v_0(y,t)=\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_{03}+h_{01})d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\frac{a(h_1(\tau),\tau)}{h_3^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\frac{a(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)}{h_3^2(\tau)}\mu_2(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

Запровадимо позначення $w(y,t)=v_y(y,t)$. З умов (8), (9) маємо

$$h_1'(t)=\frac{w(0,t)}{h_3(t)}+\mu_3(t),$$

$$h_3'(t)=-\frac{w(0,t)+w(1,t)}{h_3(t)}+\mu_4(t)-\mu_3(t). \tag{14}$$

Враховуючи (14), запишемо (13) у вигляді

$$v(y,t)=v_0(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)w(\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(\frac{b(\tau)+\eta\mu_4(\tau)+(1-\eta)\mu_3(\tau)}{h_3(\tau)}-$$

$$-\frac{\eta w(1,\tau)+(\eta-1)w(0,\tau)}{h_3^2(\tau)}\Bigg)d\eta d\tau, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{15}$$

З умови (10) отримаємо

$$h_3(t)=\frac{\mu_5(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \quad t\in[0,T]. \tag{16}$$

Диференціюючи (10) за t і використовуючи (5), (14), одержуємо

$$b(t)=(\mu_2(t)-\mu_1(t))^{-1}\Bigg[\int\limits_0^1 a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)w(y,t)dy+$$

$$+\frac{\mu_1(t)+a(h_1(t),t)}{h_3(t)}w(0,t)+\frac{\mu_2(t)-a(h_3(t)+h_1(t),t)}{h_3(t)}\times$$

$$\times w(1,t)-h_3(t)\int\limits_0^1 c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)dy-$$

$$-h_3(t)\int\limits_0^1 f(yh_3(t)+h_1(t),t)dy+\mu_1(t)\mu_3(t)+$$

$$+\mu_5'(t)-\mu_2(t)\mu_4(t)\Bigg], \quad t\in[0,T]. \tag{17}$$

Інтегруючи умову (8) від 0 до t, дістаємо

$$h_1(t)=h_{01}+\int\limits_0^t\mu_3(\tau)d\tau+\int\limits_0^t\frac{w(0,\tau)}{h_3(\tau)}d\tau,\ t\in[0,T]. \tag{18}$$

Запишемо задачу для знаходження $w(y,t)$. Для цього продиференціюємо рівняння (5) і умову (6) за y та використаємо (7):

$$w_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,w_{yy}+\Bigg(\frac{a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3(t)}+$$

$$+\frac{b(t)+h_1'(t)+y\,h_3'(t)}{h_3(t)}\Big)w_y+\Big(c(yh_3(t)+h_1(t),t)+$$
$$+\frac{h_3'(t)}{h_3(t)}\Big)w+h_3(t)c_x(yh_3(t)+h_1(t),t)v+$$
$$+h_3(t)f_x(yh_3(t)+h_1(t),t),\quad (y,t)\in Q_T,$$
$$w(y,0)=h_{03}\varphi'(yh_{03}+h_{01}),\quad y\in[0,1],$$
$$w_y(0,t)=\frac{h_3^2(t)}{a(h_1(t),t)}\Big[\mu_1'(t)-f(h_1(t),t)-c(h_1(t),t)\mu_1(t)-$$
$$-\frac{b(t)+h_1'(t)}{h_3(t)}\,w(0,t)\Big],\ t\in[0,T],$$
$$w_y(1,t)=\frac{h_3^2(t)}{a(h_3(t)+h_1(t),t)}\Big[\mu_2'(t)-f(h_3(t)+h_1(t),t)-$$
$$-\frac{b(t)+h_1'(t)+h_3'(t)}{h_3(t)}\,w(1,t)-$$
$$-c(h_3(t)+h_1(t),t)\mu_2(t)\Big],\ t\in[0,T].\qquad(19)$$

За допомогою функції Гріна $G_2(y,t,\eta,\tau)$ другої крайової задачі для рівняння

$$w_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,w_{yy}+\frac{a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3(t)}w_y$$

задачу (19) зводимо до рівняння

$$w(y,t)=h_{03}\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_{03}+h_{01})d\eta-$$
$$-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\Big(\mu_1'(\tau)-f(h_1(\tau),\tau)-c(h_1(\tau),\tau)\times$$
$$\times\mu_1(\tau)-\frac{b(\tau)+h_1'(\tau)}{h_3(\tau)}\,w(0,\tau)\Big)d\tau+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\times$$
$$\times\Big(\mu_2'(\tau)-f(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)-c(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\mu_2(\tau)-$$
$$-\frac{b(\tau)+h_1'(\tau)+h_3'(\tau)}{h_3(\tau)}\,w(1,\tau)\Big)d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\times$$
$$\times\Big[h_3(\tau)(f_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+c_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\times$$
$$\times v(\eta,\tau))+\Big(c(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+\frac{h_3'(\tau)}{h_3(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+$$
$$+\frac{b(\tau)+h_1'(\tau)+\eta\,h_3'(\tau)}{h_3(\tau)}w_\eta(\eta,\tau)\Big]d\eta\,d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T.$$

Інтегруючи частинами в останньому інтегралі рівності та використовуючи (14), одержимо

$$w(y,t)=w_0(y,t)+\int_0^t\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)(w(\eta,\tau)\times$$
$$\times c(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+c_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\times$$
$$\times h_3(\tau)v(\eta,\tau))d\eta\,d\tau-\int_0^t\int_0^1 G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau)w(\eta,\tau)\times$$
$$\times\Big(\frac{b(\tau)+\eta\mu_4(\tau)+(1-\eta)\mu_3(\tau)}{h_3(\tau)}-$$
$$-\frac{\eta w(1,\tau)+(\eta-1)w(0,\tau)}{h_3^2(\tau)}\Big)d\eta\,d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T,\quad(20)$$

де $w_0(y,t)$ визначається формулою

$$w_0(y,t)=h_{03}\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_{03}+h_{01})d\eta-$$
$$-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau)-f(h_1(\tau),\tau)-c(h_1(\tau),\tau)\times$$
$$\times\mu_1(\tau))d\tau+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)-$$
$$-c(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\mu_2(\tau))d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)h_3(\tau)\times$$
$$\times f_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)d\eta\,d\tau.$$

Отже, задачу (5)–(10) зведено до системи інтегральних рівнянь (15)–(18), (20) відносно невідомих $(v(y,t),h_3(t),b(t),h_1(t),w(y,t))$. Якщо $(h_1(t),h_3(t),b(t),v(y,t))$ є розв'язком задачі (5)–(10), то функції $(v(y,t),h_3(t),b(t),h_1(t),w(y,t))$ є неперервним розв'язком системи (15)–(18), (20).

Покажемо, що правильним є і обернене твердження. Нехай $(v(y,t),h_3(t),b(t),h_1(t),w(y,t))$ є неперервним розв'язком системи рівнянь (15)–(18), (20). На підставі (15) можемо зробити висновок, що функція $v(y,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,v_{yy}+c(yh_3(t)+h_1(t),t)\,v+$$
$$+w(y,t)\Big(\frac{b(t)+y\mu_4(t)+(1-y)\mu_3(t)}{h_3(t)}-$$
$$-\frac{yw(1,t)+(y-1)w(0,t)}{h_3^2(t)}\Big)+f(yh_3(t)+h_1(t),t)\quad(21)$$

та умови (6), (7). Позначимо $z(y,t)=v_y(y,t)$. Запишемо задачу для знаходження $z(y,t)$. Згідно з умовами теореми можемо продиференціювати (20) за y. Диференціюючи рівняння (21) і умову (6) за y та використовуючи (7), одержимо

$$z_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,z_{yy}+\frac{a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3(t)}z_y+$$
$$+c(yh_3(t)+h_1(t),t)z+h_3(t)c_x(yh_3(t)+h_1(t),t)v+$$
$$+w(y,t)\Big(\frac{\mu_4(t)-\mu_3(t)}{h_3(t)}-\frac{w(1,t)+w(0,t)}{h_3^2(t)}\Big)+$$

$$+w_y(y,t)\left(\frac{b(t)+y\mu_4(t)+(1-y)\mu_3(t)}{h_3(t)}-\right.$$

$$\left.-\frac{yw(1,t)+(y-1)w(0,t)}{h_3^2(t)}\right)+h_3(t)f_x(yh_3(t)+h_1(t),t),$$

$$(y,t)\in Q_T,$$

$$z(y,0)=h_{03}\varphi'(yh_{03}+h_{01}),\quad y\in[0,1],$$

$$z_y(0,t)=\frac{h_3^2(t)}{a(h_1(t),t)}\Big[\mu_1'(t)-f(h_1(t),t)-c(h_1(t),t)\mu_1(t)-$$

$$-w(0,t)\left(\frac{b(t)+\mu_3(t)}{h_3(t)}+\frac{w(0,t)}{h_3^2(t)}\right)\Big],\ t\in[0,T],$$

$$z_y(1,t)=\frac{h_3^2(t)}{a(h_3(t)+h_1(t),t)}\Big[\mu_2'(t)-f(h_3(t)+h_1(t),t)-$$

$$-c(h_3(t)+h_1(t),t)\mu_2(t)-w(1,t)\left(\frac{b(t)+\mu_4(t)}{h_3(t)}-\right.$$

$$\left.-\frac{w(1,t)}{h_3^2(t)}\right)\Big],\ t\in[0,T]. \qquad (22)$$

Використовуючи функцію Гріна $G_2(y,t,\eta,\tau)$, задачу (22) зводимо до рівняння

$$z(y,t)=h_{03}\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_{03}+h_{01})d\eta-$$

$$-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau)-f(h_1(\tau),\tau)-c(h_1(\tau),\tau)\times$$

$$\times\mu_1(\tau))d\tau+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)-$$

$$-c(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\mu_2(\tau))d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)(h_3(\tau)\times$$

$$\times(c_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau))+$$

$$+c(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)z(\eta,\tau))d\eta\,d\tau-\int_0^t\int_0^1 G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau)\times$$

$$\times w(\eta,\tau)\left(\frac{b(\tau)+\eta\mu_4(\tau)+(1-\eta)\mu_3(\tau)}{h_3(\tau)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\eta w(1,\tau)+(\eta-1)w(0,\tau)}{h_3^2(\tau)}\right)d\eta\,d\tau.$$

Віднімаючи від отриманої рівності (20), одержимо однорідне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду відносно $z(y,t)-w(y,t)$, звідки робимо висновок, що $v_y(y,t)=w(y,t)$.

Залишилось довести виконання умов (8)–(10). Рівність (16) збігається з умовою (10). Умови теореми дозволяють продиференціювати (18) за t, звідки робимо висновок, що $h_1\in C^1[0,T]$ та виконується умова (8). Продиференціюємо (16) за t, враховуючи те, що $v(y,t)$ є розв'язком рівняння (21). Звідси робимо висновок, що $h_3\in C^1[0,T]$, та від отриманої рівності віднімаючи (17), одержимо

$$\left(h_3'(t)+\frac{v_y(1,t)+v_y(0,t)}{h_3(t)}-\mu_4(t)+\mu_3(t)\right)\frac{\mu_5(t)}{h_3(t)}=0.$$

Умова (9) виконується.

Отже, еквівалентність задачі (5)–(10) та системи рівнянь (15)–(18), (20) доведено.

Для дослідження системи рівнянь (15)–(18), (20) використаємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього встановимо апріорні оцінки розв'язків системи. Позначимо $W(t)=\max\limits_{y\in[0,1]}|w(y,t)|$. Враховуючи оцінки (11), (12), з (17), (18) одержимо

$$|b(t)|\le C_1+C_2W(t),\quad t\in[0,T], \qquad (23)$$

$$|h_1(t)|\le C_3+C_4\int_0^t W(\tau)d\tau,\quad t\in[0,T]. \qquad (24)$$

Згідно з (11), (12) та оцінками для функції Гріна [6] з (20) отримаємо таку нерівність:

$$W(t)\le C_5+C_6\int_0^t W(\tau)d\tau+C_7\int_0^t(W(\tau)+|b(\tau)|)\times$$

$$\times\frac{W(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau,\quad t\in[0,T],$$

де $\theta(t)=\int\limits_0^t\frac{d\sigma}{h^2(\sigma)}$.

Враховуючи вигляд функції $\theta(t)$, оцінки (12), (23) та ввівши позначення $W_1(t)=W(t)+1$, попередню нерівність перепишемо в такому вигляді:

$$W_1(t)\le C_8+C_9\int_0^t\frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau,\quad t\in[0,T]. \qquad (25)$$

Метод розв'язування нерівності (25) подано в [7]. Отже, отримаємо оцінку

$$W(t)\le M_3<\infty,\quad t\in[0,t_1],$$

де $t_1, 0<t_1<T$, визначається сталими C_8, C_9.

Використовуючи це в (23), (24), одержимо

$$|b(t)|\le C_1+C_2M_3\equiv B_1<\infty,$$

$$|h_1(t)|\le C_3+C_4TM_3\equiv H_3<\infty,\quad t\in[0,t_1].$$

Отже, апріорні оцінки для розв'язків системи (15)–(18), (20) знайдено.

Подамо систему (15)–(18), (20) у вигляді операторного рівняння

$$\omega=P\omega,$$

де $\omega=(v(y,t),h_3(t),b(t),h_1(t),w(y,t))$, а оператор $P=(P_1,...,P_5)$ визначається правими частинами рівнянь (15)–(18), (20). Побудуємо множину N так, щоб оператор P переводив N в себе.

Візьмемо довільні (v, h_3, b, h_1, w), для яких справедливі вище встановлені оцінки. Оцінимо праву частину (20):

$$|P_5 w| \le C_5 + C_{10}t + C_{11}\sqrt{t}.$$

Вибираючи число $t_2, 0 < t_2 \le T$, так, щоб виконувалась нерівність $C_5 + C_{10}t_2 + C_{11}\sqrt{t_2} \le M_3$, отримаємо

$$|P_5 w| \le M_3, \quad (y,t) \in [0,1] \times [0,t_2].$$

Позначимо $N = \{(v, h_3, b, h_1, w) \in C(\overline{Q}_{T_0}) \times (C[0,T_0])^3 \times C(\overline{Q}_{T_0}) : M_1 \le v(y,t) \le M_2, H_1 \le h_3(t) \le H_2, |b(t)| \le B_1, |h_1(t)| \le H_3, |w(y,t)| \le M_3\}$, де $T_0 = \min\{t_1, t_2\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера, а оператор P переводить N в себе. Компактність операторів, що утворюють P, встановлено у [8]. Тоді за теоремою Шаудера існує розв'язок $(v(y,t), h_3(t), b(t), h_1(t), w(y,t))$ системи рівнянь (15)–(18), (20) з класу $C(\overline{Q}_{T_0}) \times (C[0,T_0])^3 \times C(\overline{Q}_{T_0})$, а, отже, і розв'язок $(h_1(t), h_3(t), b(t), v(y,t))$ з класу $(C^1[0,T_0])^2 \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$ задачі (5)–(10). ■

Встановимо умови єдиності розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

$$a \in C^{2,0}([h_{01},\infty) \times [0,T]),\ a(x,t) > 0,\ x \in [h_{01},\infty),$$

$$t \in [0,T],\ c, f \in C^{1,0}([h_{01},\infty) \times [0,T]),\ \varphi(x) \ge \varphi_0 > 0,$$

$$x \in [h_{01},\infty),\ \mu_5(t) > 0,\ \mu_2(t) - \mu_1(t) \ne 0,\ t \in [0,T].$$

Тоді розв'язок $(h_1, h_3, b, v) \in (C^1[0,T])^2 \times C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $h_3(t) > 0$, $t \in [0,T]$, *задачі (5)–(10) єдиний.*

□ *Доведення.* Нехай $(h_{1i}(t), h_{3i}(t), b_i(t), v_i(y,t))$, $i = 1,2$, – два розв'язки задачі (5)–(10). Позначимо

$$\frac{b_i(t)}{h_{3i}(t)} = p_i(t),\ \frac{h'_{1i}(t)}{h_{3i}(t)} = q_i(t),\ \frac{h'_{3i}(t)}{h_{3i}(t)} = s_i(t), \quad i = 1,2,$$

$$p(t) = p_1(t) - p_2(t), \quad q(t) = q_1(t) - q_2(t),$$

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t), \quad v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Функції $p(t), q(t), s(t), v(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + (p_1(t) + q_1(t) + ys_1(t))v_y + +c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)v + \left(\frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} - -\frac{a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)}{h_{32}^2(t)}\right) v_{2yy} + (p(t) + q(t) + ys(t))v_{2y} + +(c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - c(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t))v_2 + +f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{26}$$

та умови

$$v(y,0) = 0, \quad y \in [0,1], \tag{27}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{28}$$

$$h'_{11}(t) - h'_{12}(t) = \frac{v_y(0,t)}{h_{31}(t)} + \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right) v_{2y}(0,t),$$

$$h'_{31}(t) - h'_{32}(t) = -\frac{v_y(0,t) + v_y(1,t)}{h_{31}(t)} - (v_{2y}(0,t) + +v_{2y}(1,t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right),$$

$$\int_0^1 v(y,t)dy = \mu_5(t)\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right),\ t \in [0,T]. \tag{29}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + (p_1(t) + q_1(t) + ys_1(t))v_y + +c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)v$$

з врахуванням умов (27), (28) функцію $v(y,t)$ подамо в такому вигляді:

$$v(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg[\left(\frac{a(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau)}{h_{31}^2(\tau)} - -\frac{a(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau)}{h_{32}^2(\tau)}\right) v_{2\eta\eta}(\eta,\tau) + (p(\tau) + q(\tau) + +\eta s(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau) + v_2(\eta,\tau)(c(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau) - -c(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau)) + f(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau) - -f(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau)\Bigg] d\eta d\tau,\ (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{30}$$

Оскільки для $h'_{1i}(t), h'_{3i}(t), b_i(t)$, $i = 1,2$, справджуються рівності, аналогічні (14), (17), то звідси отримаємо

$$q(t) = \frac{v_y(0,t)}{h_{31}^2(t)} + \left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)}\right) v_{2y}(0,t) + \mu_3(t) \times \times\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right), \quad t \in [0,T], \tag{31}$$

$$s(t) = -\frac{v_y(0,t) + v_y(1,t)}{h_{31}^2(t)} - (v_{2y}(0,t) + v_{2y}(1,t)) \times \times\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)}\right) + (\mu_4(t) - \mu_3(t)) \times \times\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right), \quad t \in [0,T], \tag{32}$$

$$p(t) = (\mu_2(t) - \mu_1(t))^{-1}\Bigg[\int_0^1 \frac{a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}(t)} \times \times v_y(y,t)dy + \int_0^1 \Bigg(\frac{1}{h_{32}(t)}(a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - -a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)) + a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) \times$$

$$\times\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)\Bigg)v_{2y}(y,t)dy+\frac{\mu_1(t)+a(h_{11}(t),t)}{h_{31}^2(t)}\times$$

$$\times v_y(0,t)+\Bigg((\mu_1(t)+a(h_{11}(t),t))\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)}-\frac{1}{h_{32}^2(t)}\right)+$$

$$+(a(h_{11}(t),t)-a(h_{12}(t),t))\frac{1}{h_{32}^2(t)}\Bigg)v_{2y}(0,t)+v_y(1,t)\times$$

$$\times\frac{\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)}{h_{31}^2(t)}+v_{2y}(1,t)\Bigg(\Bigg(\frac{1}{h_{31}^2(t)}-$$

$$-\frac{1}{h_{32}^2(t)}\Bigg)(\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))-\frac{1}{h_{32}^2(t)}\times$$

$$\times(a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(h_{32}(t)+h_{12}(t),t))\Bigg)-$$

$$-\int_0^1(c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v(y,t)+(c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-$$

$$-c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_2(y,t)+f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-$$

$$-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))dy+(\mu_1(t)\mu_3(t)-\mu_2(t)\mu_4(t)+$$

$$+\mu_5'(t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)\Bigg],\ t\in[0,T]. \qquad (33)$$

Припущення теореми забезпечують правильність рівності

$$f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)=(y(h_{31}(t)-$$

$$-h_{32}(t))+h_{11}(t)-h_{12}(t))\int_0^1 f_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t)+$$

$$+\sigma(y(h_{31}(t)-h_{32}(t))+h_{11}(t)-h_{12}(t)),t)d\sigma, \qquad (34)$$

що справедлива і для $a(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t),t)$, $a_x(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t),t)$ та $c(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t),t)$, $i=1,2$.

Виразимо $h_{3i}(t)$ через $s_i(t)$:

$$h_{3i}(t)=h_{3i}(0)\exp\left(\int_0^t s_i(\tau)d\tau\right),\quad i=1,2,$$

де $h_{31}(0)=h_{32}(0)=h_{03}$. Враховуючи рівність

$$e^x-e^y=(x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

одержимо

$$\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}=-\frac{1}{h_{03}}\int_0^t s(\tau)d\tau\int_0^1\exp\Bigg(-\int_0^t(\sigma s(\tau)+$$

$$+s_2(\tau))d\tau\Bigg)d\sigma. \qquad (35)$$

Аналогічно (35) використаємо для зображення різниці $\frac{1}{h_{31}^2(t)}-\frac{1}{h_{32}^2(t)}$.

Враховуючи (34), (35) і підставляючи (30) в (31)–(33), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $q(t), s(t), p(t)$. З єдиності розв'язків таких систем очевидно, що $q(t)=0$, $s(t)=0$, $p(t)=0$, $t\in[0,T]$. Звідси отримаємо $q_1(t)=q_2(t)$, $s_1(t)=s_2(t)$, $p_1(t)=p_2(t)$, $t\in[0,T]$, а, отже, $h_{11}(t)=h_{12}(t)$, $h_{31}(t)=h_{32}(t)$, $b_1(t)=b_2(t)$, $t\in[0,T]$. Використовуючи це в задачі (26)–(28), знаходимо, що $v_1(y,t)=v_2(y,t)$, $(y,t)\in\overline{Q}_T$, що і завершує доведення теореми. ■

III. Випадок інтегральних умов перевизначення

Замінимо умови (8), (9) такими умовами:

$$h_3^2(t)\int_0^1 y\,v(y,t)dy+h_1(t)\mu_5(t)=\mu_6(t),\ t\in[0,T], \quad (36)$$

$$h_3^3(t)\int_0^1 y^2\,v(y,t)dy+2h_1(t)\mu_6(t)-h_1^2(t)\mu_5(t)=$$

$$=\mu_7(t),\ t\in[0,T]. \qquad (37)$$

Встановимо умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі (5)–(7), (10), (36), (37).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови 1), 2), 4) теореми 1 та*

$$a\in C^{2,0}([h_{01},\infty)\times[0,T]),\ \mu_j\in C^1[0,T],\ j=6,7,$$

$$\mu_5(t)-H_2M_2>0,\ t\in[0,T],$$

де H_2, M_2 визначаються з (11), (12).

Тоді можна вказати таке число $T_1: 0<T_1\le T$, що існує єдиний розв'язок $(h_1,h_3,b,v)\in(C^1[0,T_1])^2\times C[0,T_1]\times C^{2,1}(Q_{T_1})\cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_1})$, $h_3(t)>0,\ t\in[0,T_1]$ задачі (5)–(7), (10), (36), (37).

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1. Ввівши позначення $p(t)=h_1'(t)$, $r(t)=h_3'(t)$, $w(y,t)=v_y(y,t)$, зводимо задачу (5)–(7), (10), (36), (37) до системи інтегральних рівнянь:

$$h_3(t)=\frac{\mu_5(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy},\quad t\in[0,T], \qquad (38)$$

$$h_1(t)=\frac{\mu_6(t)}{\mu_5(t)}-\frac{h_3^2(t)}{\mu_5(t)}\int_0^1 yv(y,t)dy,\quad t\in[0,T], \quad (39)$$

$$r(t)+(p(t)+b(t))\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)}{\mu_2(t)}=\frac{\mu_5'(t)}{\mu_2(t)}-\frac{1}{h_3(t)\,\mu_2(t)}\times$$

$$\times\Big(a(h_1(t)+h_3(t),t)w(1,t)-a(h_1(t),t)w(0,t)\Big)+\frac{1}{\mu_2(t)}\times$$

$$\times\int_0^1\Big(a_x(h_1(t)+yh_3(t),t)w(y,t)-h_3(t)(v(y,t)c(h_1(t)+$$

$$+yh_3(t),t)+f(h_1(t)+yh_3(t),t))\Big)dy,\ t\in[0,T], \quad (40)$$

$$p(t)+b(t)\left(1-\frac{\mu_5(t)}{h_3(t)\mu_1(t)}\right)=\frac{\mu_6'(t)}{h_3(t)\mu_1(t)}-\frac{\mu_5'(t)}{\mu_1(t)}\times$$
$$\times\left(\frac{h_1(t)}{h_3(t)}+1\right)-\frac{a(h_1(t),t)}{h_3(t)\mu_1(t)}w(0,t)-\frac{1}{h_3(t)\mu_1(t)}\times$$
$$\times\int\limits_0^1\bigg((h_3(t)(y-1)a_x(h_1(t)+yh_3(t),t)+a(yh_3(t)+$$
$$+h_1(t),t))w(y,t)-h_3^2(t)(y-1)(c(h_1(t)+yh_3(t),t)\times$$
$$\times v(y,t)+f(h_1(t)+yh_3(t),t))\bigg)dy,\quad t\in[0,T],\quad (41)$$

$$b(t)=(\mu_5(t)(h_3(t)+2h_1(t))-2\mu_6(t))^{-1}\Big[\mu_7'(t)-\mu_6'(t)\times$$
$$\times(2h_1(t)+h_3(t))+h_1(t)\mu_5'(t)(h_1(t)+h_3(t))+h_3(t)\times$$
$$\times\int\limits_0^1\bigg((h_3(t)y(y-1)a_x(h_1(t)+yh_3(t),t)+(2y-1)\times$$
$$\times a(h_1(t)+yh_3(t),t))w(y,t)-h_3^2(t)y(y-1)(v(y,t)\times$$
$$\times c(h_1(t)+yh_3(t),t)+f(h_1(t)+yh_3(t),t))\bigg)dy\Big],\quad (42)$$
$$t\in[0,T],$$

$$v(y,t)=v_0(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)w(\eta,\tau)\times$$
$$\times\frac{b(\tau)+p(\tau)+\eta\, r(\tau)}{h_3(\tau)}d\eta d\tau,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T,\qquad (43)$$

$$w(y,t)=w_0(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)(w(\eta,\tau)\times$$
$$\times c(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+c_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\times$$
$$\times h_3(\tau)v(\eta,\tau))d\eta\, d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau)w(\eta,\tau)\times$$
$$\times\frac{b(\tau)+p(\tau)+\eta r(\tau)}{h_3(\tau)}d\eta\, d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T.\qquad (44)$$

Подамо знаменник в (42) у вигляді

$$\mu_5(t)(h_3(t)+2h_1(t))-2\mu_6(t)=$$
$$=h_3(t)\left(\mu_5(t)-2h_3(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy\right).$$

Оскільки для функцій $v(y,t),h_3(t)$ справедливі оцінки (11), (12), то

$$\mu_5(t)(h_3(t)+2h_1(t))-2\mu_6(t)\ge$$
$$\ge h_3(t)(\mu_5(t)-2H_2M_2)>0,\ t\in[0,T].$$

Доведення існування розв'язку системи рівнянь (38)–(44) ґрунтується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Єдиність розв'язку задачі зводиться до єдиності розв'язку системи однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Висновки

Встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі для одновимірного параболічного рівняння другого порядку з невідомим залежним від часу коефіцієнтом при першій похідній в області з двома невідомими ділянками межі з різними наборами умов перевизначення. За допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора встановлено умови локального існування класичного розв'язку задачі. Єдиність розв'язку задачі очевидна з властивостей розв'язків однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Література

[1] Баранська І. Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20 – 38.

[2] Пабирівська Н. Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142 – 149.

[3] Cannon J.R., Perez-Esteva S. Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems.– 1994. – V. 10, N. 3. – P. 521 – 531.

[4] Trong D.D., Ang D.D. Coefficient identification for a parabolic equation // Inverse Problems.– 1994. – V. 10, N. 3. – P. 733 – 752.

[5] Lorenzi L. An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – V. 9, N. 6. – P. 1 – 27.

[6] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.

[7] Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. // Math. Studies: Monogr. Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – Vol. 10.

[8] Снітко Г. А. Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 4. – С. 7 – 18.

INVERSE PROBLEM OF THE DETERMINATION OF A MINOR COEFFICIENT IN A PARABOLIC EQUATION IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

H.A. Snitko

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine
3b Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine

We establish conditions of uniqueness and local existence of the classical solution to the inverse problem for a parabolic equation with unknown time-dependent coefficient at the first derivative of unknown function in a free boundary domain.

Keywords: inverse problem, Green function, free boundary, parabolic equation.

2000 MSC: 35R30

УДК: 517.95