УДК-004.02

А.В.Катренко
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційних систем та мереж

СИСТЕМНІ АСПЕКТИ СИНТЕЗУ ПРОЦЕДУР ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ НА ҐРУНТІ МЕТОДУ РОЗГАЛУЖЕНЬ ТА МЕЖ

Досліджено системні аспекти та особливості синтезу процедур прийняття рішень залежно від особливостей навколишнього середовища та вимог до остаточного рішення. Запропонована загальна схема алгоритму, що базується на методі розгалужень та меж. Розроблено рекомендації до синтезу конкретних варіантів алгоритмів.

This paper presents an overview of system aspects and the peculiarities of decision support procedures synthesis depending on the peculiarities of environment and requirements to the final decision. The common algorithm scheme based on branch-and-bound method is proposed. In addition, the recommendations to the synthesis specific algorithms are presented.

Постановка проблеми у загальному вигляді

Проблема прийняття та підтримання оптимальних рішень виникає на кожному кроці свідомої діяльності людини. Деякі з проблемних ситуацій є такими, що періодично виникають, а тому є можливість вивчення їх характерних особливостей, інші ж є унікальними, для розв’язання яких необхідно залучення додаткової нечіткої та неповної, часами суперечливої інформації. З іншого боку, навіть поняття «найкращого» в сенсі «одного найліпшого рішення» навіть в повністю формалізованих моделях (наприклад, в детермінованих моделях багатокритерійної оптимізації оптимальними є рішення, що належать до множини Парето) не можуть бути визначені без залучення додаткової інформації.

Окрім того, існує практичний аспект, безпосередньо пов’язаний зі змістовним аспектом та особливостями зовнішнього середовища, в якому діє децидент – особа, що приймає рішення. В середовищі з достатньо високим рівнем залишкової ентропії немає сенсу в пошуку оптимального (оптимальних) рішень – виникає скоріше проблема визначення необхідного ступеня наближення до оптимального рішення та пошуку варіанта субоптимального в цьому сенсі рішення. Натомість для рішень, що приймаються у режимі реального часу, незважаючи на значно вищий ступінь формалізації відповідних моделей, найважливішим є вчасне отримання рішення.

Саме тому проблема системного дослідження алгоритмів прийняття рішень є важливою та актуальною як з точки зору теорії, так і практики.

Аналіз останніх досліджень

Процес прийняття рішення складається з декількох основних етапів. Різні автори з різним ступенем деталізації розглядають етапи прийняття рішень, але загалом зберігається така послідовність [1]:

- виявлення проблемної ситуації та постановка задачі прийняття рішення;
- формулювання поняття якості рішення та структуризація його до рівня критеріїв;
- описання можливих станів зовнішнього середовища, прогнозування можливих результатів дій децидента з подальшим виявленням та (або) конструюванням альтернативних варіантів рішень;
- оцінювання якості альтернатив, порівняння їх між собою та вибір найбільш відповідних до мети;
- аналіз рішення та опрацювання плану розв’язання проблемної ситуації.

На першому етапі виявляється та описується проблемна ситуація, оцінюються необхідні ресурси та тривалість процесу прийняття рішення в часі, що в основному зводиться до відповіді на такі запитання: чи виникла взагалі проблемна ситуація, якщо вона виникла, то в чому її суть і за яких умов (коли, якими засобами) необхідно її вирішувати? Виявлення та описання проблеми містить в основному якісний аналіз причин виникнення проблеми, її внутрішньої структури та найважливіших зв'язків із зовнішнім середовищем. Оскільки в багатьох випадках діють обмеження в часі, важливого значення набуває своєчасне виявлення проблемних ситуацій, їх типізація та можливість прийняття рішення при наявності неповної інформації.

Поняття якості рішення наводиться за допомогою мети, що описує бажаний результат діяльності. Іншими словами, мета – це якісна категорія, яка характеризує загальний напрямок діяльності, система уявлень про різноманітні аспекти цієї діяльності. Виходячи з поняття мети й конкретизуючи її до окремих аспектів, будують множину критеріїв, що характеризують ступінь реалізації окремих аспектів та підаспектів мети. Мета відображає призначення системи, яке не є детерміністично фіксованим, воно може розвиватися в часі і не обов'язково унікальним способом. Призначення – це біхевіористичне поняття, і в соціальних та економічних системах поведінка людей є потужною силою, яка не завжди є достатньо зрозумілою, але яка виявляється такою, що значною мірою формує наш світогляд. Існує певний різновид принципу невизначеності при спробі визначити систему, вивчаючи деякі прояви, що утотожнюються з нею. Тому ми вимушені модифікувати наші визначення залежно від того, як дослідження стають все більш конкретними.

Мета конкретизується за допомогою *цілей.* Одним зі способів розкриття внутрішньої структури мети є побудова дерева цілей. Цілі в часовому аспекті поділяються на *тактичні цілі (objectives), макроцілі (goals) та ідеали (ideals).*

Тактичні цілі — це бажані результати, яких досягають за визначений і порівняно короткий період часу. *Макроцілі* досягаються за довший час і вимагають для цього досягнення хоча б однієї тактичної цілі. *Ідеали* — це такі цілі, яких ніколи не досягають, але до яких система постійно наближається, реалізуючи деякі тактичні та макроцілі.

Категорія "мета" пройшла довгий шлях розвитку від найпростіших форм до складних структурно-функціональних уявлень. Мета відображає те, що може чи повинно виникнути, прообраз майбутнього, стан, якого бажано досягнути. Мета має декілька аспектів. Пізнавальний аспект мети відповідає прогнозу майбутнього, а конструктивний — можливим способам переходу до бажаного майбутнього чи плану дій. У тих випадках, коли мета відносно проста, усвідомлення мети містить і спосіб її досягнення, а у випадку складної мети — план набуває самостійного значення як елемент постановки мети. План встановлює послідовність етапів досягнення мети, визначає засоби та методи, строки дій.

Аналіз зовнішнього середовища охоплює виявлення некерованих факторів, які суттєво впливають на проблемну ситуацію, прогнозування значень їх кількісних характеристик. В теорії прийняття рішень вважається, що всі можливі стани зовнішнього середовища та альтернативи вже описані. Так етап виявлення альтернатив та аналізу зовнішнього середовища виноситься за межі теорії, хоча на практиці цей етап надзвичайно важливий.

Результат реалізації альтернативи являє собою багатовимірне явище, яке виявляється через різноманітні причинно-наслідкові ланцюжки в різних місцях і в різний час. Тому для обґрунтованої оцінки якості альтернатив необхідно виявити (прогнозувати, виміряти) не лише значення компонент кортежу, який описує реалізації альтернатив, але й місце та час дії, врахувати можливі наслідки. Ця інформація відображається в теорії прийняття рішень у вигляді множини значень критеріїв для кожної з альтернатив, і вважається, що ці значення достатньо відображають ступінь реалізації мети кожною з альтернатив.

Процес вибору найкращих альтернатив реалізується шляхом опитування децидента або кожного з експертів з подальшим узгодженням групового рішення. Якщо ж наявна додаткова інформація про систему переваг децидента, то альтернативи, які не відповідають його системі переваг, відкидаються, і для остаточного вибору пред'являється значно менша кількість ("ядро") альтернатив. Розв'язуванням цих проблем (отриманням експертної інформації, її порівнянням, обґрунтуванням раціональних принципів вибору і т.п.) займається теорія прийняття рішень.

Аналіз прийнятого рішення на відповідність його реальній ситуації (адекватність) є необхідним етапом, оскільки в процесі формалізації могли бути не враховані деякі важливі характеристики. Якщо аналіз дав позитивний результат, розробляється план розв’язування проблемної ситуації, або, іншими словами, впровадження чи реалізації прийнятого рішення.

Необхідність виділення окремих етапів в процесі прийняття рішень і їх зміст в основному залежать від характеру проблеми, що розв’язується.

Отже, в загальній послідовності етапів прийняття рішень перші три розв’язуються шляхом застосування системних методологій та методів системного аналізу, впровадження стосується насамперед комплексу організаційних заходів, що скеровані на реалізацію рішення, а одним з основних з точки зору теорії прийняття рішень виявляється етап оцінювання якості альтернатив, порівняння їх між собою та вибору найкращої.

У багатьох випадках на цьому етапі використовуються моделі дискретної оптимізації з одним чи багатьма критеріями. До задач дискретної оптимізації належать практичні задачі, що мають важливе значення, такі як задачі технічного і технологічного проектування функціональних пристроїв, оптимального резервування, технічної діагностики, організації і опрацювання даних, вибору структури інформаційної системи, управління дискретним виробництвом і ряд інших.

У багатьох випадках для таких задач оптимізація за глобальним критерієм якості незадовільна, оскільки в процесі його формування приймаються тією чи іншою мірою довільні припущення, що вимагає зазвичай сильних попередніх умов про взаємозамінність окремих складових критеріїв. Комплексний характер існуючої генеральної мети не дозволяє описати з достатнім ступенем відповідності багатоаспектність початкової проблеми за допомогою одного числового показника. У цих випадках відповіднішою є багатокритерійна постановка задачі, повним розв’язком якої є множина недомінованих (Парето-оптимальних) рішень. Вибір остаточного варіанта залежить від системи переваг децидента, якого в цьому випадку можна розглядати як виразника суспільних переваг, що дозволяє врахувати деякі неформальні чинники.

За умови успішного формування глобального критерію, що адекватно відображатиме систему переваг децидента, для таких задач можливо застосовувати класичні методи розв’язання дискретних однокритерійних оптимізаційних задач, таких як схема послідовного аналізу варіантів, запропонована В.С. Михалєвичем [3], група методів, запропонована І.В. Сергієнком та його співробітниками [4] та інші [5, 6]. Дослідження в цій галузі залишаються актуальними і сьогодні, про що свідчать матеріали ряду конференцій та моноґрафії [7–9].

До універсальних і гнучких схемах розв’язання дискретних оптимізаційних задач належить також метод розгалужень та меж (Branch&Bound) [2, 5, 9], що здобув популярність після публікації роботи Літла та співавторів, в якій запропоновано ефективний алгоритм розв’язання задачі про комівояжера. Цей метод, що за своєю суттю не є методом, а скоріш методологією, широко використовується в програмних реалізаціях для розв’язання комбінаторних задач, а також задач цілочислового і частково цілочислового програмування [2, 6] . Ідея скорочення перебору за рахунок відсіювання неперспективних підмножин варіантів рішень шляхом обчислення меж (оцінок) критерію якості і розв’язання задач оцінювання, на якій ґрунтуєься методу розгалужень та меж, може бути використана також для розв’язання багатокритерійних задач дискретної оптимізації.

Цілі статті

Основними аспектами мети цього дослідження є:

- формалізація моделі задачі прийняття рішень до рівня основних її структурних елементів на ґрунті системного підходу та встановлення взаємних зв’язків між ними;
- дослідження структури методу розгалужень та меж;
- розроблення гнучкої формальної схеми методу розгалужень та меж, що дозволятиме різноманітні реалізації залежно від вимог до конкретного алгоритму та характеристик навколишнього середовища.

Основний матеріал

Формальна модель задачі прийняття рішень

У результаті аналізу основних етапів процесу прийняття рішень пропонується така модель задачі прийняття рішень Z_R, як

$$Z_R = < S, S^P, I, T^P,\ F^P, A, P >,$$

де S – множина можливих ситуацій, S^P – множина проблемних ситуацій $S^P \subset S$, I – ідентифікатор проблемної ситуації – якщо $I = 1$, то конкретна ситуація $S_i \in S^P$, якщо ж $I = 0$ – то необхідності в прийнятті рішення немає, оскільки ситуація не є проблемною, для проміжних значень існує можливість встановлення порогового значення, яке й буде визначати належність чи неналежність ситуації до множини проблемних; T^P – множина постановок (типів) задач прийняття рішень, $F^P : S^P \to T^P$ – відображення множини проблемних ситуацій в множину постановок задач прийняття рішень, A – множина можливих варіантів рішень, P – система переваг децидента.

Задача полягає в тому, щоб за умови наявності цих структурних елементів обрати таке рішення з множини A можливих (припустимих) варіантів, яке максимально відповідає системі переваг децидента P.

Систему переваг децидента P формалізуємо так: $P = \left\langle A, Q, K, F^Q, R \right\rangle$, де Q – множина критеріїв оцінювання якості рішень, K – множина шкал критеріїв, $F^Q : A \to Q$ – відображення множини альтернатив A в множину критеріїв, R – вирішальне правило, що дозволяє на основі образів множини альтернатив A в області критеріїв Q розв'язати задачу прийняття рішень відповідно до її типу T^P – обрати одну найкращу альтернативу; знайти всі альтернативи, які відповідають поставленим умовам; впорядкувати альтернативи за якістю.

Ця модель відповідає використанню математичних методів на більшій кількості етапів прийняття рішень. Множина $A = \left\{ \mathrm{x_j} \right\}$ можливих (припустимих) варіантів рішень – це сукупність наявних варіантів рішень, що відповідають можливим способам досягнення та (або) реалізації мети і не порушують певних обмежень, властивих конкретній задачі прийняття рішень. Множина критеріїв $Q = \left\{ \mathrm{Q_i} \right\}$ відображає різні суттєві з точки зору ОПР аспекти мети функціонування системи і є одним з результатів системного аналізу ситуації. Множина шкал критеріїв K ставить у відповідність кожному критерію множини Q шкалу (найменувань, порядкову, інтервалів або відношень), в якій вимірюються значення критеріїв. Відображення $\mathrm{F^Q} : A \to Q$ ставить у відповідність кожній альтернативі множини A (яка описується в загальному кортежем різнорідних змінних та параметрів) точку в просторі критеріїв, причому це відображення є гомоморфним, оскільки різні альтернативи можуть мати однакову якість.

Система переваг P є одним з неформальних елементів, який значною мірою зумовлює слабку структурованість задач прийняття рішень. Апроксимація системи переваг децидента дозволяє в багатьох випадках при певних спрощуючих припущеннях побудувати вирішальне правило R, або описати механізм вибору, за допомогою якого й здійснюється вибір з множини A.

Залежно від широти охоплення окремих етапів процесу прийняття рішень використовуються різноманітні формальні моделі задачі прийняття рішень. У варіанті, коли структурні складові задачі переважно визначені, задача прийняття рішень Z_S може описуватися як трійка , $Z_S = < A, Q, R >$. У цій постановці неявно вважається, що вирішальне правило визначає поняття кращої альтернативи, тобто з формальної точки зору скорочена модель відповідає задачі вибору.

Системні та структурні аспекти методу розгалужень та меж (Branch&Bound)

Метод розгалужень та меж є скоріше гнучкою схемою, оскільки не обмежує жорстко спосіб, в який конструюватимуться алгоритми пошуку оптимальних рішень, і дозволяє ефективно обмежити витрати комп'ютерних ресурсів шляхом визначення необхідного рівня субоптимальності – наближення до оптимального рішення.

Розглядаючи можливості методу розгалужень та меж, виділимо його системні особливості. Цей метод ґрунтується на двох основоположних принципах – декомпозиції та оцінювання. Принцип декомпозиції використовується для поділу поточної підзадачі на множину підзадач нижчого рівня, причому декомпозиція є окремим видом – розбиттям, тобто об'єднання множини декомпозованих альтернатив є множиною припустимих альтернатив, а перетин двох будь-яких різних є порожньою множиною. Тобто принцип декомпозиції реалізується через розбиття множини розв'язків на підмножини, що не перетинаються.

З іншого боку, при розв'язуванні оптимізаційних задач оцінювання можливого значення функції мети дозволяє на ранніх етапах відділити множини тих розв'язків, які з тих чи інших причин не є доцільними для реалізації. У методі розгалужень та меж оцінки мають відповідати цілком конкретним вимогам – у міру просування вглиб дерева розгалужень оцінки повинні уточнюватися – і це є природним, тому що на підзадачі меншої розмірності слід очікувати, що оцінка не буде гіршою, ніж для безпосереднього предка, а з іншого боку – коли існує можливість розв'язати ту чи іншу підзадачу, то оцінка дорівнюватиме значенню функції мети.

Ці два принципи в конкретному втіленні й є суттю Branch&Bound. У більшості випадків існує певна дискретна множина альтернатив, з якої необхідно обрати найкращу в сенсі системи переваг децидента. Такі ситуації добре моделюються задачами дискретної оптимізації. У випадку неперервної множини в практичних випадках завжди існує можливість дискретизації, виходячи з необхідної точності оптимального розв'язку.

Отже, метод розгалужень та меж грунтується на ідеї розбиття первісної задачі на підзадачі та скорочення обсягу перебору за рахунок відсіювання підмножин неперспективних розв'язків первісної задачі, що реалізується шляхом обчислення оцінок значень функції мети (меж) або безпосередньо, або за допомогою розв'язування оцінкових (релаксованих) задач. З одного боку, чим ближче до оптимального значення функції мети для підзадачі значення межі, тим більш ймовірним є те, що обсяг перебору буде меншим, а з іншого — чим складнішими є оцінкові задачі, тим більшою буде трудомісткість методу. В процесі синтезу алгоритму, що грунтується на методі розгалужень та меж, необхідно знайти оптимальний компроміс між точністю обчислення меж та складністю оцінкових задач. Зараз метод розгалужень і меж широко використовується в пакетах і бібліотеках прикладних програм для вирішення комбінаторних задач, а також задач цілочислового і частково цілочислового програмування, звичайно ж, без згадування про його використання.

Ідея скорочення перебору за рахунок відкидання неперспективних підмножин варіантів розв'язків шляхом обчислення оцінок функції мети і розв'язання оцінкових задач, що є основою методу розгалужень і меж, використовуєть для розв'язання багатокритерійних задач дискретної оптимізації. Велика розмірність задач, що виникають при цьому, наявність ресурсних і обмежень за часом викликають необхідність синтезу відповідних алгоритмів пошуку прийнятних рішень. До основних аспектів синтезу алгоритмів такого типу належать формування оцінкових задач і способи обчислення оцінок, синтез критерію вибору вузла для подальшої декомпозиції, оцінка якості альтернативних варіантів рішення, визначення достатнього наближення до оптимуму у разі пошуку наближених рішень, синтез стратегії розгалуження.

До задач дискретної оптимізації належить цілий ряд практичних задач, що мають важливе значення, таких як задачі технічного і технологічного проектування функціональних пристроїв, оптимального резервування, технічної діагностики, організації і опрацювання даних, вибору структури інформаційної системи, оперативного управління дискретним виробництвом і ряд інших.

У багатьох випадках для таких задач оптимізація за єдиним глобальним критерієм якості є недостатньою, оскільки в процесі формування глобального критерію приймаються в тому або іншому ступені довільні припущення, що вимагає зазвичай сильних попередніх умов про взаємозамінність його складових. Комплексний характер існуючої генеральної мети не дозволяє описати з достатнім ступенем відповідності багатоаспектність початкової проблеми за допомогою одного числового показника.

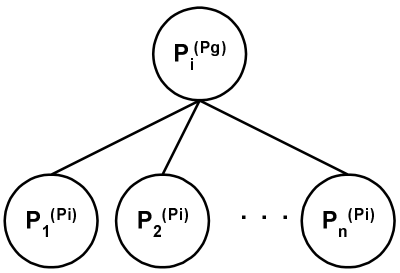
У цих випадках багатокритерійна постановка задачі буде такою, що більш відповідає дійсності, повним рішенням якої є множина недомінованих (Парето-оптимальних) рішень. Вибір остаточного варіанта залежить від системи переваг децидента, якого в багатьох випадках доцільно розглядати як виразника суспільних переваг, що дозволяє врахувати деякі неформальні чинники.

До основних елементів методу розгалужень та меж належать:

- дерево розгалужень;
- послаблена (релаксована) задача;
- межа;
- активні вузли дерева розгалужень;
- критерії відтинання вузлів;
- стратегія розгалуження.

Дерево розгалужень

Процес розв'язування задачі за допомогою методу розгалужень та меж наочно подається у вигляді динамічного дерева розгалужень $B=\langle D,E\rangle$ з коренем P_0, який відповідає первісній задачі, де D — множина вузлів дерева, що являють собою підзадачі, E — множина дуг дерева розгалужень. В процесі розв'язування задачі деякі вузли відтинаються як неперспективні, замість них з'являються інші, тобто дерево розгалужень є динамічним. Розгалуження є розбиттям певної підзадачі на підзадачі наступного рівня, що пов'язані з задачею-предком дугами: $\bigcup_{j=1}^{n} P_j^{(P_i)} = P_i^{(P_g)}$, $P_k^{(P_i)} \bigcap_{k\neq l} P_l^{(P_i)} = \varnothing$.

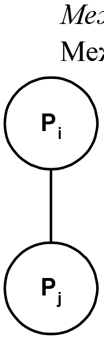


Послаблена (релаксована) задача

Для кожного вузла дерева розв'язується послаблена (релаксована) задача — підзадача "занурюється" у ширший клас задач, для яких існують ефективні алгоритми їх розв'язування. Внаслідок розв'язання похідної послабленої задачі отримується "надоптимальний" розв'язок для основної підзадачі (верхня — у випадку максимізації межа значення критерію якості основної задачі). Так, наприклад, зняття умови цілочисельності в задачі лінійного програмування приводить до релаксованої – послабленої – задачі, для розв'язання якої можна застосувати симплекс-метод, тобто задача цілочислового чи змішаного лінійного програмування „занурюється" у ширший клас задач лінійного програмування. Звичайно, отриманий внаслідок розв'язання такої задачі розв'язок буде не гіршим, ніж оптимальний розв'язок первинної задачі і може бути використаний для її оцінювання, тобто так ми приходимо до поняття межі як верхньої оцінки (у випадку максимізації).

Межа

Межа є значенням критерію якості для оптимального розв'язання послабленої задачі.



Межа вузла (підзадачі) P_i – $B(P_i)$ має такі властивості (вважаємо, що розв'язується задача максимізації): $\forall(i\in D): B(P_i)\geq Q^*(P_i)$, де $B(P_i)$ — значення межі, $Q^*(P_i)$ — значення критерію якості для оптимального розв'язання задачі P_i; $B(P_j)\leq B(P_i)$, якщо P_j — безпосередній нащадок P_i; $B(P_i)=Q(P_i)$, якщо P_i — лист дерева розгалужень (лист відповідає побудові повного розв'язку первісної задачі P_0).

Отже, межа є „надоптимальним” розв’язком задачі; значення межі уточнюється при просуванні вглиб дерева рішень – для підзадачі (вузол-нащадок) значення межі не більше (для задачі максимізації), ніж її значення для задачі, що піддавалась декомпозиції (безпосередній вузол-предок); при досягненні повного розв’язку первісної задачі значення межі дорівнює значенню критерію якості для цього повного розв’язку.

Активний вузол дерева розгалужень

Вузли дерева розгалужень (підзадачі) належать до однієї з таких категорій:

- проміжні вузли, які вже розбиті на підзадачі (тобто вузли, що мають безпосередніх нащадків);
- листя дерева, в яких досягнутий розв’язок первісної задачі; якщо шукається один оптимальний розв’язок первісної задачі, то в дереві є один лист, що відповідає поточному найкращому розв’язку, в іншому випадку кількість листя дерева може бути більшою;
- активні вузли дерева, які можуть бути піддані декомпозиції.

Вузол P належить до множини активних A, якщо виконуються такі умови:

- P не визначає повного припустимого розв’язку первісної задачі P_0;
- на певний момент (на поточному етапі розв’язування задачі) не може бути встановлена справедливість умови $O(P) \cap O(P_0) = \varnothing$, де $O(P)$ — множина оптимальних розв’язків P, $O(P_0)$ — відповідно P_0, тобто не встановлено, чи належить підзадача P до таких, в яких гарантовано немає оптимального розв’язку;
- вузол P не розбивався на підзадачі.

Критерії відтинання вузлів

Для забезпечення ефективності методу розгалужень та меж необхідно відтинати якомога більше вузлів, найближчих до кореня. Це дозволяє відразу виключити з розгляду значні підмножини розв’язків та зменшити обсяг перебору. Для відтинання неперспективних вузлів використовується істинність умови $O(P) \cap O(P_0) = \varnothing$. Ця умова завжди виконується, якщо виконується хоча б одна з таких умов:

- перетин множини припустимих розв’язків для первісної задачі $X(P_0)$ та підзадачі $X(P)$ — пуста множина: $X(P_0) \cap X(P) = \varnothing$ (це свідчить про те, що в підзадачі P немає жодного припустимого розв’язку первісної задачі P_0);
- виконується умова відтинання вузла $B(P) \le Q^*$, де Q^* — значення критерію для найкращого поточного (повного) розв’язку задачі (в цьому випадку серед припустимих розв’язків підзадачі P гарантовано не знайдеться кращого, ніж вже знайдений поточний найкращий розв’язок);
- існує вузол $P_k \in D$, що не є предком P , який домінує над ним — тобто встановлено, що $Q^*(P_k) \ge Q^*(P)$, де $Q^*(P_k)$ — оптимальний розв’язок задачі P_k, а $Q^*(P)$ — відповідно P (для встановлення цього факту зовсім не обов’язково знати відповідні значення критеріїв);
- окрім того, відтинається вузол, який піддавався декомпозиції і в якого відтято всі безпосередні нащадки.

Якщо для деякого вузла встановлено, що $B(P_i) = Q(P_i)$, то P_i далі не розбивається, тому що знайдено один з повних розв’язків задачі. Коли ж $Q^*(P_i) \ge Q^*$, то найкращим поточним розв’язком стає знайдений, $Q^* = Q^*(P_i)$, а вузол, що відповідав попередньому поточному найкращому розв’язку, відтинається.

Стратегія розгалуження

Стратегія розгалуження визначає спосіб побудови динамічного дерева розгалужень та обрання наступного вузла з множини активних для декомпозиції. Структуру стратегії розгалуження подамо у вигляді двох відображень: $G\colon A \Rightarrow C,\ C \subseteq A$, та $h\colon C \Rightarrow R^1$, де R^1 — множина числових значень. За допомогою відображення G виділяється множина вузлів-кандидатів для декомпозиції з числа активних вузлів, а за допомогою h — вибір одного з них за допомогою кількісного критерію $P^*_i = \arg \underset{P_i \in C}{Max}\ h(P_i)$. Як h у більшості випадків використовують значення межі $B(P_i)$, тобто вибиають вузол для декомпозиції за співвідношенням $P^*_i = \arg \underset{P_i \in C}{Max}\ B(P_i)$. Розглянемо такі стратегії розгалуження: за найкращим значенням межі; вглиб дерева розгалужень; вшир дерева розгалужень; розгалуження пагонами, “вглиб m”, рандомізовані.

У стратегії розгалуження за найкращим значенням межі s^h на кожному кроці з числа активних обирається вузол з найбільшим (задача на пошук максимуму) значенням межі. У багатьох випадках ця стратегія приводить до найкращого розв’язку за найкоротший час, але внаслідок тенденції до росту дерева вшир необхідні значні ресурси оперативної пам’яті для ефективної роботи відповідних алгоритмів. Крім того, необхідний досить значний час для знаходження першого поточного найкращого розв’язку, тому в системах реального часу застосовувати її не варто.

У стратегії розгалуження вглиб дерева розгалужень s^t на кожному кроці визначаються вузли, які знаходяться якнайдалі від кореня (віддаль від кореня дерева вимірюється як число ребер, що зв’язують вузол з коренем), і серед них обирається вузол з найбільшим значеннм межі. Після того, як досягнутий розв’язок, відбувається повернення на рівень догори, і процедура повторюється. Ця стратегія дозволяє за найкоротший час отримати найкращий поточний розв’язок, але витрачається багато часу на його покращання внаслідок пошуку на сусідніх рівнях та гілках дерева розгалужень.

Стратегії розгалуження

Назва стратегії	$G\colon A \Rightarrow C$
За найкращим значенням межі s^h	$C^h \equiv A$
Розгалуження вглиб дерева s^t	$C^t = \left\{ P_i \in A \middle| d(P_i) = Max\ \left\{ d(P_j) \middle| P_j \in A \right\} \right\}$
Розгалуження вшир дерева s^b	$C^h = \left\{ P_i \in A \middle| d(P_i) = Min\ \left\{ d(P_j) \middle| P_j \in A \right\} \right\}$
Розгалуження пагонами s^p	*Вглиб дерева.* Якщо досягнуто рівня листя, крок за стратегією *вшир дерева*
“Вглиб m” s^m	Найкращий вузол зі списку m останніх. Поповнення списку “з кінця” вузлами, що виникли в результаті останньої декомпозиції
Рандомізовані	Імовірнісна суміш простих стратегій розгалуження

У стратегії розгалуження вшир дерева розгалужень s^b на кожному кроці визначається множина вузлів, що розташовані найближче до кореня, і серед них вибирають вузол з найбільшим значенням межі. Ця стратегія приводить до переважного росту дерева розгалужень вшир і на практиці в чистому вигляді не застосовується.

Стратегія розгалуження пагонами s^p є комбінацією двох найпоширеніших стратегій — розгалуження за найкращим значенням межі та вглиб дерева. Ця стратегія спрямована на синтез позитивних особливостей вищенаведених стратегій — по-перше, якомога швидше досягнути повного розв’язку первісної задачі, і, по-друге, витрачати на пошук наступного поточного оптимального розв’язку, що достатньо віддалений від поточного, якомога менше часу. Згідно з цією стратегією декомпозиція підзадач відбувається за стратегією вглиб дерева розгалужень до моменту, поки не буде досягнуто повного розв'язку. Після цього наступний вузол для розгалуження вибирають згідно за стратегією розгалуження за найкращим значенням межі, і знову застосовується стратегія розгалуження вглиб дерева.

Стратегія розгалуження "вглиб m" s^m має об'єднані властивості порівняно з s^t та s^h. За цією стратегією поточні активні вузли містяться в лінійному списку L і для декомпозиції обирається останній вузол списку. Цей вузол піддається декомпозиції та видаляється з L, останні m-1 вузлів і k, одержані в результаті декомпозиції нових активних вузлів упорядковуються за значенням межі та зберігаються в останніх m+k-1 позиціях списку L. s^m реалізує досить широкий спектр стратегій з властивостями, проміжними між властивостями s^t та s^h. При m=1 реалізується стратегія s^t, а при m=∞ – s^h. Клас стратегій розгалуження розширяється природно за рахунок рандомізації, шляхом визначення розподілу вірогідностей $\left(p_1, p_2, ..., p_m\right)$ застосування простих стратегій розгалуження.

Слід зазначити, що переваги чи недоліки тієї чи іншої стратегії не є абсолютними і значною мірою залежать від особливостей конкретних типів задач.

Загальна схема методу розгалужень та меж

Розглянувши основні структурні елементи методу розгалужень та меж, побудуємо загальну схему методу з врахуванням інтерактивної взаємодії з децидентом, що дасть можливість синтезувати алгоритми розв'язування конкретних задач, виходячи з їх особливостей та вимог, які висуватимуться до відповідних алгоритмів. Необхідність залучення до формування рішення децидента пояснюється ще й тим, що в більшості випадків отримати повне формальне описання його системи переваг неможливо, і доволі повним описанням буде формулювання поняття якості у вигляді векторного критерію.

У процесі розв'язування основної задачі P_0 за допомогою методу розгалужень та меж ґенерується дерево підзадач та розгалужень $B = \left\langle N, E \right\rangle$ з коренем P_0, де N – множина вузлів дерева (підзадач), E – множина дуг дерева, $(P_i, P_j) \in E$, тобто вузол P_j є безпосереднім нащадком вузла P_i, якщо P_j є підзадачею, що отримана безпосередньо шляхом декомпозиції P_i. Вузол P, що піддаватиметься декомпозиції, обирається з множини активних вузлів дерева розгалужень A за стратегією розгалуження s. F – це множина вузлів, що отримані в результаті застосування оператора декомпозиції dec до вузла P. Виділимо з системи переваг децидента постійну частину, що піддається формалізації, та подамо її у вигляді відношення переваги D.

Оскільки D у більшості випадків лише частково впорядковує множину припустимих розв'язків, то наступне порівняння повних розв'язків один з іншим здійснює децидент, керуючись неформалізованою та можливо динамічнішою частиною власної системи переваг D^N. Загальна інтерактивна схема методу розгалужень та меж матиме такий вигляд.

На початковому етапі A_1 множини активних вузлів A та поточних вузлів дерева розгалужень N складаються з кореня P_0, а множина поточних кращих розв'язків O та X – вузлів дерева, що повинні бути відтяті, порожні.

На наступному кроці A_2 обирається вузол – кандидат для декомпозиції P з множини A за стратегією s, реалізуємо декомпозицію P, результатом чого є множина підзадач, що виникли в результаті декомпозиції – F, та виключаємо вузол P як неактивний з множини A. З множини F виключаємо вузли, для яких у цей момент можна довести, що множина оптимальних розв'язків первісної задачі $O\left(P_0\right)$ не перетинається з множиною оптимальних розв'язків підзадачі P_j. У випадку пошуку субоптимального ε-розв'язку ця умова повинна бути модифікована відповідно до використовуваного поняття ε-близькості.

Якщо оновлена множина F є порожньою, то необхідно відтяти вузол P і перейти до A_7. В іншому випадку (A_3) з множини F виділяємо підмножину K вузлів, в яких досягаються повні припустимі розв'язки. Якщо K – порожня (P_2), то переходимо до A_6.

Вузли з F зв'язуємо в дереві розгалужень (A_6), оновлюючи множини N та A. Якщо множина X порожня (P_4), то необхідно реалізувати наступний крок вибору вузлів з множини A та дерева розгалужень N (перехід на A_2). В іншому випадку (A_7) відтинаємо неперспективні вузли. З цією метою формуємо множину вузлів L, що є безпосередніми предками вузлів з X, та оновлюємо множини N та A, виключаючи з них вузли, що належать X.

У результаті здійснення цієї процедури серед вузлів, що належать до A, можуть з'явитися вузли без нащадків, які вже декомпозувалися, тобто вузли, що належать новому поточному X. Тому формуємо множину X – якщо корінь дерева потрапляє до множини X (P_5), то в множині O є оптимальні розв'язки первісної задачі P_0 і процес розв'язання задачі закінчено (A_8). В іншому випадку переходимо на P_4.

A_1: $A \Leftarrow \{P_0\},\ N \Leftarrow \{P_0\},\ O \Leftarrow \varnothing,\ X \Leftarrow \varnothing$

A_2: $P \Leftarrow s(A),\ F \Leftarrow \{dec(P)\},\ A \Leftarrow A \setminus \{P\},\ F \Leftarrow F \setminus \left\{P_j \in F \middle| O(P_0) \cap O(P_j) = \varnothing\right\}$

P_1: $F = \varnothing$? якщо так, то $\left(X = \{P\};\ \text{перехід до } A_7\right)$

A_3: $K \Leftarrow \left\{P_j \in F \middle| B(P_j) = TRUE\right\}$

P_2: $K = \varnothing$? якщо так, то $\left(\text{перехід до } A_6\right)$

A_4: $H \Leftarrow \left\{P_j \in O \middle| \exists (P_i \in K) : (P_i\ D\ P_j) \vee (P_i\ D^N\ P_j)\right\},$

$O \Leftarrow (O \setminus H) \cup \left(K \setminus \left\{P_j \in K \middle| \exists (P_i \in O) : (P_i\ D^N\ P_j)\right\}\right),\ F \Leftarrow F \setminus K,$

P_3: $F = \varnothing$? якщо так, то $\left(X \Leftarrow \{P\};\text{перехід до } A_7\right)$

A_5: $X \Leftarrow \left\{P_j \in A \middle| O(P_0) \cap O(P_j) = \varnothing\right\}$

A_6: $N \Leftarrow NUF,\ \ A \Leftarrow AUF$

P_4: $X = \varnothing$? якщо так, то $\left(\text{перехід до } A_2\right)$

A_7: $L \Leftarrow \left\{P_j \in N \middle| \exists (P_i \in X) : (P_k, P_i) \in E\right\},\ N \Leftarrow N \setminus X,\ A \Leftarrow A \setminus X,$

$X \Leftarrow \left\{P_j \in L \middle| \neg\exists (P_i \in N) : (P_j, P_i) \in E\right\}$

P_5: $P_0 \notin X$? якщо так, то $\left(\text{перехід до } P_4\right)$

A_8: Оптимальні розв'язки знаходяться в O. Стоп.

У запропонованій схемі дерево розгалужень будується динамічно, з відтинанням неперспективних вузлів, що дає можливість економно витрачати пам'ять. За відсутності інформації про систему переваг децидента та виключення його з процесу формалізована частина D є не чим іншим, як відношенням $\geq$ на множині припустимих варіантів (для задачі максимізації), тобто $P_i\ D\ P_j$, якщо для векторів значень критеріїв виконується співвідношення $Q_i \geq Q_j$, що приводить до побудови множини Парето-оптимальних розв'язків первісної задачі P_0. У випадку участі децидента в процесі розв’язання буде побудована підмножина множини Парето, яка в певний час відповідає його відношенню переваг з врахуванням динамічної складової. Описання схеми в термінах операцій над множинами припускає як її послідовну, так і паралельну реалізацію у вигляді відповідних алгоритмів.

Висновки

Проблема прийняття в певному сенсі „найліпших” чи „оптимальних” рішень особливої актуальності набула в наш час, що викликане значно більшою продуктивністю сучасних комп’ютерів та можливістю практичного використання отриманих наукових результатів.

Дослідження структури процесу прийняття рішень на рівні його основних етапів дозволило запропонувати формальну модель задачі, що дозволяє ідентифікувати виникнення проблемної ситуації, множину припустимих рішень та врахувати систему переваг децидента.

Зосередження уваги на системних та структурних аспектах методу розгалужень та меж (Branch&Bound) дозволило зробити висновок про те, що це не є метод, а схема методу, в яку може бути вкладений широкий спектр алгоритмів. Тому виникла необхідність розроблення загальної схеми методу, що б дозволило синтезувати алгоритми прийняття рішень залежно від поставлених вимог.

Запропоновано загальну схему методу розгалужень та меж, що дозволяє гнучко враховувати вимоги до відповідних алгоритмів, систему переваг децидента, з динамічною побудовою дерева розгалужень та можливістю розпаралелювання.

1. Катренко А.В. Системний аналіз об’єктів та процесів комп’ютеризації. – Львів: Новий світ, 2000, 2003. 2. Катренко А.В. Дослідження операцій. – Львів: „Магнолія плюс”, 2004. 3. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение // Кибернетика/ – 1965. – № I. – С. 45–56. 4.Сергиенко И. У., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЕВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: Наукова думка, 1981. 5.Ibaraki T. Theoretical comparsions of search strategies in branch-and-bound algorithms. – Int. Journal of Computer and Information Sciences, 5, 1976. 315–344. 6.T. Ibaraki, Enumerative Approaches to Combinatorial Optimization, Annals of Operations Research, Vols. 10 and 11, J.C. Baltzer A.G., Basel, 1987. 7. Yagiura M. and Ibaraki T., Local search, Section 3.5 of “Handbook of Applied Optimization” edited by P.M. Pardalos and M.G. C. Resende, Oxford University Press, pp. 104-123, 2002. 8. Golumbic M.C., Hammer P.L., Hansen P. and Ibaraki T. (Eds.), Horn Logic, Search and Satisfiability, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Vol. 1, Baltzer Scientific Publishers, Basel, 1990. 9.Algorithms and Computation, 14th International Symposium, ISAAC 2003, Kyoto, Japan, December 15–17, 2003, Proceedings.