Learning. Addison-Vesley, 1989. 8. Pawlak Z., Rough Sets – Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991. 9. Pawlak Z., Information systems – theoretical foundations. Information Systems 6, 1981. – C. 205–218. 10. Pawlak Z., Rough sets. International Journal of Computer and Information Sciences 11, 1982. – P. 341–356. 11. Komorowski J., Pawlak P., Polkowski L., Skowron A. Rough Sets: A Tutorial. //Eds. S.K.Pal and A. Skowron, Rough Fuzzy Hybridization: A New Trend in Decision-Making, Spriner-Verlag, Singapore, 1998. – P.3–98. 12. Hung Son Nguyen and Sinh Hoa Nguyen. Some efficient algorithms for rough set methods. In Proc. Fifth Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'96), pages 1451–1456, Granada, Spain, July, 1996. 13. Frank Markham Brown. Boolean Reasoning: The Logic of Boolean Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1990. 14. H. S. Nguyen and S. H. Nguyen. Some efficient algorithms for rough set methods. In Proc. Fifth Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'96), July 1996. 15. Aleksander Øhrn, ROSETTA Technical Reference Manual, 2001 (http://www.idi.ntnu.no/~aleks/). 16. Aleksander Øhrn, Discernibility and Rough Sets in Medicine: Tools and Applications, PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology, Department of Computer and Information Science, 1999.

УДК 621.372

В.М. Заяць
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра програмного забезпечення автоматизованих систем

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ТА УМОВ СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ КОЛИВНИХ СИСТЕМ

© Заяць В.М., 2004

Запропоновано підхід до побудови універсальної моделі дискретної коливної системи, яка має широкий спектр динамічних режимів. Отримані аналітичні оцінки амплітуди та частоти гармонічних та квазігармонічних коливань, які апробовані для широкого класу функцій, що використовуються при побудові моделі. Встановлені необхідні та достатні умови стійкості виявлених режимів.

Approach to construction of universal model of the discrete oscillation system which own the wide spectrum of the dynamic modes is offered. Analytical estimations of amplitude and frequency of vibrations harmonic and quasi-harmonic, and which are approved for the wide class of functions, that are used for construction of model, are got. Set necessary and sufficient terms of stability of the exposed modes.

Постановка проблеми в загальному вигляді

При розробленні реальних коливних приладів чи дослідженні фізичних явищ, що володіють бажаними характеристиками інформаційного сигналу за амплітудою, частотою і формою, доцільно провести їх аналіз та комп'ютерне моделювання шляхом створення математичної моделі об'єкта, що розробляється. Такий підхід вимагає значно менших часових і технічних засобів порівняно з фізичним експериментом, особливо на попередній стадії розробки, коли пристрій, що розробляється, відсутній.

Останнім часом в нелінійній динаміці широке застосування знаходять дискретні моделі коливних систем [5–9], для яких дискретність закладена в природі самого об'єкта досліджень, а не є наслідком дискретизації неперервної системи. Доцільність використання дискретних за своєю природою моделей пояснюється такими їх особливостями:

– простотою математичного опису порівняно з неперервними моделями;
– наявністю широкого спектра динамічних режимів;

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

– скінченною вимірністю, що дозволяє моделювати кожну нову гармоніку шляхом її введення у вектор змінних стану, тоді як для неперервних системах для вирішення цієї задачі необхідно підвищувати розмірність системи;

– відсутністю необхідності визначення оптимального кроку дискретизації, оцінки локальної і глобальної похибки числових методів, дослідження областей стійкості;

– максимальною пристосованістю до постановки комп'ютерного експерименту.

Аналіз останніх досліджень

Слід зазначити, що виникненню і розвитку теорії неперервних та дискретних коливних систем значною мірою сприяли відомі роботи Ван-дер-Поля, А.А. Андронова, С.Е. Хайкина [1,3], які грунтуються на методі повільно-змінних амплітуд [3]. Оскільки отримані при такому підході рівняння наближені, то ряд ефектів, таких як генерація на квазігармоніках, хаотичні рухи, біфуркаційні значення параметрів, при яких відбувається зміна динаміки системи, не були виявлені. Запропоновано підхід до побудови універсальної дискретної моделі для дослідження цих явищ. Зазначимо, що модель будується таким чином, щоб мати можливість знайти точний розв'язок як для амплітуди, так і частоти коливань у вигляді гармонійного сигналу, оскільки вихід за межі гармонійного процесу приводить до надмірно громіздких перетворень [2] навіть у найбільш простих випадках [7]. Для запропонованого класу моделей проведений аналіз та комп'ютерне моделювання гармонічних та квазігармонічних режимів та досліджено умови стійкості цих режимів.

Основний матеріал

Підхід до побудови моделі

Задамося метою побудувати модель коливного процесу, в якій можливе виникнення та існування гармонійних коливань з бажаною частотою і амплітудою, квазігармонійних коливань і хаотичних рухів при зміні параметрів системи і початкових умов.

При побудові такої моделі слід виходити з того, що при малих значеннях амплітуди коливань рух має відбуватися у бік її збільшення, а при великих амплітудах – у бік зменшення. Цього можна досягти шляхом введення в матрицю переходу станів (матрицю монодромії) деякої функції f від амплітуди коливань r, яка володіє ділянкою з від'ємною швидкістю зміни, принаймні, для великих значень амплітуд. При цьому в околі нульового положення рівноваги абсолютна величина швидкості (якщо вона від'ємна) не перевищує одиниці і для великих значень амплітуд добуток функці f на величину амплітуди r прямує до нуля у міру збільшення амплітуди коливань. Отже, на роль базових функцій при побудові дискретних моделей можуть претендувати суттєво нелінійні функції, що мають ділянки як повільних, так і швидких рухів, а також ділянку з від'ємною похідною в області великих значень амплітуд.

З метою забезпечення бажаної частоти коливань необхідно задати початкове значення фази коливань. Цього можна досягти шляхом введення гармонійних функцій, роль незалежної змінної в яких відіграватиме початкова фаза коливань, в матрицю переходу станів як один із співмножників.

Зміни амплітуди коливань моделі в широкому діапазоні найпростішим способом можна досягти, якщо ввести постійний коефіцієнт в матрицю монодромії як ще один із співмножників.

Отже, можна запропонувати дискретну модель коливної системи другого порядку загального вигляду:

$$\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \end{bmatrix} = a \cdot f(-r_m) \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{cos}\,\varphi & \boldsymbol{sin}\,\varphi \\ -\boldsymbol{sin}\,\varphi & \boldsymbol{cos}\,\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{1}$$

де x_m, y_m – змінні стану в m–й точці дискретизації; $r_m = x_m^2 + y_m^2$ – амплітуда можливих коливань; φ- початкова фаза коливань; *a* – постійний параметр, зміна якого дозволяє забезпечити широкий діапазон зміни амплітуди коливань.

Оскільки йдеться про побудову моделей другого порядку, то, комбінуючи певні функції від амплітуди коливань і використовуючи різні тригонометричні функції для задання початкової фази

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

коливань, можна отримати цілий клас моделей із симетричною, кососиметричною та несиметричною матрицями переходу станів [7]. Кожна з таких моделей відрізняється своєю динамікою і потребує детального дослідження.

У роботі [7] проведено аналіз моделі (1) з базовою функцією f(r)=exp(-$\sqrt{r}$) і показано існування стійких гармонійних коливань при зміні параметра a від одиниці до e^2, де e – основа натурального логарифма. Шляхом комп'ютерного моделювання виявлені квазігармонійні коливання як парного, так і непарного порядків і, зважаючи на відсутність повторення амплітуди коливань при великому числі дискрет, а також нерегулярність заповнення фазових портретів коливань, висловлено припущення про існування хаотичних рухів в такій моделі [8].

Аналіз гармонійних режимів дискретної моделі

Проведемо дослідження можливих динамічних режимів дискретної коливальної моделі (1) з метою встановлення умов виникнення і стійкості гармонійних і квазігармонійних коливань довільної кратності. Після піднесення до квадрата кожного з рівнянь системи (1) і їх підсумовування отримаємо

$$r_{m+1} = a^2 \cdot f^2(-r_m) \cdot r_m . \tag{2}$$

Оскільки усталеному режиму відповідає значення r = r_{m+1} = r_m, то з останнього співвідношення отримуємо рівняння для визначення встановленого значення гармонійних коливань

$$f(-r) = \frac{1}{a} \tag{3}$$

або у разі використовування парної функції f

$$r = g\left(\frac{1}{a}\right) \tag{4а}$$

і для непарної функції f маємо

$$r = g\left(-\frac{1}{a}\right), \tag{4б}$$

де g – функція, обернена до f, яку завжди можна визначити для однозначної неперервної функції. Зазначимо, що формули (4а) і (4б) справедливі, якщо композиція функцій f і g є тотожним перетворенням незалежно від порядку застосування функцій і дає значення аргумента функції. У разі неоднозначності функції f можна визначити обернено відповідні їй функції на ділянках монотонності функції f. Для складних неоднозначних функцій обернена функція може бути записана лише у неявному вигляді. У цих випадках для оцінки амплітуди коливань більш доцільно застосовувати формулу (3).

Для встановлення закону зміни частоти в дискретній моделі (1) шукатимемо її розв’язок у вигляді

$$x_m = \rho^m \cdot \cos\alpha_m \quad \text{і} \quad x_m = \rho^m \cdot \cos\alpha_m , \tag{5}$$

де ρ – модулі власних значень матриці переходу станів.

Після підстановки (5) в (1) отримаємо:

$$\begin{aligned} p^{m+1} \cdot \cos\alpha_{m+1} &= a \cdot f(r_m) \cdot \cos(\alpha_m - \varphi) \\ p^{m+1} \cdot \sin\alpha_{m+1} &= a \cdot f(r_m) \cdot \sin(\alpha_m - \varphi) \end{aligned} .$$

Із врахуванням (3) з останньої системи рівнянь доходимо висновку, що

$$\alpha_{m+1} = \alpha_m - \varphi .$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Отже, слід чекати, що встановлене значення фази коливань, а отже, і частота коливань визначатимуться величиною початкової фази φ. У першому наближенні величину періоду коливань можна визначити за формулою

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\varphi} . \tag{6}$$

Як бачимо, величина періоду коливань визначається співвідношенням (6) і ніяк не залежить від вигляду функції f.

Для дослідження стійкості гармонійного режиму, амплітуда якого визначається рівнянням (3), а період відповідає формулі (6), після лінеаризації рівняння (2) в околі усталеного режиму отримаємо

$$z_{m+1} = [1 + 2 \cdot a^2 \cdot f(r) \cdot f^{/}(r)] \cdot z_m ,$$

де $z_m = r_m - r$ – величина відхилення амплітуди від усталеного значення.

Отже, з врахуванням (3) умова стійкості гармонійних коливань набуває вигляду:

$$\left| 1 + 2 \cdot a \cdot r \cdot \frac{df(x)}{dx_{x=r}} \right| < 1 . \tag{7}$$

Після розкриття модуля останнього виразу можна визначити область стійких гармонійних коливань досліджуваної моделі. З виразу (7) випливає, що необхідною умовою стійкості гармонійних режимів є від’ємність похідної базової функції моделі при значенні змінної стану, що відповідає встановленому режиму.

Для дослідження дискретних моделей як базові функції використовувалися експоненційна (exp(-r)), показникова ($b^{-r)}$ та спеціальна (x^x) функції з від’ємним аргументом, а також функції з внесенням аргумента під знак кореня k-го степеня (exp($-\sqrt[k]{r}$)); гіперболічні функції (sh(r), ch(r), th(r), cth(r)) як з додатним, так і від’ємним знаком і спеціальні показникові функції, які розглядаються аналогічно гіперболічним функціям:

$$sb(x) = \frac{b^x - b^{-x}}{2},\ cb(x) = \frac{b^x + b^{-x}}{2},\ tb(x) = \frac{b^x - b^{-x}}{b^x + b^{-x}},\ ctb(x) = \frac{b^x + b^{-x}}{b^x - b^{-x}} \tag{8a}$$

і названі, відповідно до наведених визначень, гіперпоказниковим синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом. Зазначимо, що при виборі основи показникової функції b натурального логарифма приходимо до гіперболічних функцій, тому всі взаємні зв'язки між гіперболічними функціями існують і для приведених функцій (8а). Ці зв'язки також можна встановити, виходячи з двох основних властивостей гіперпоказникових функцій

$$cb^2(x) - sb^2(x) = 1 \quad i \quad ctb(x) = \frac{1}{tb(x)},$$

Таблиця 1

Набір базових функцій для побудови дискретних моделей

Базова функція f(r)	Амплітуда гармонійних коливань r	Область стійкості: Діапазон зміни *a* нижній; верхній / і b	Область стійкості: Діапазон зміни r нижній ; верхній
exp(-r)	ln(a)	1 ; e	0 ; 1
b-r	ln(*a*)/ln(b)	1 ; e	0 ; 1/ln(b)
exp($-\sqrt[k]{r}$)	(ln(a))k	1 ; e^{2k}	0 ; $(2*k)^k$
$b^{-\sqrt[k]{r}}$	$(\ln(a)/\ln(b))^k$	1 ; e^{2k}	0 ; $(2*k)^{к/\ln}$(b) при цьому b>0
cth(r)	arth(a)	0 ; 1	0 ; 1
tb(r)	arctb(a)	1 ; ∞ / b>1	0 ; ∞
tb(-r)	-arctb(*a*)	1 ; ∞ / b<1	0 ; ∞
ctb(r)	artb(a)	0 ; 1 / b>1	0 ; ∞
ctb(-r)	-arth(*a*)	0 ; 1 / b<1	0 ; ∞

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

які перевіряються безпосередньою підстановкою в (8а). У табл. 1 наведено набір тих з розглянутих базових функцій, які забезпечують існування стійких гармонійних коливань з вказанням амплітуд коливань і діапазону зміни параметрів досліджуваної моделі, який не виходить за межі області стійкості.

Зазначимо, що при використанні спеціальних функцій (гіперболічних і гіперпоказникових) амплітуди встановлених коливань виражені на підставі формул (4а) і (4б) через обернені функції, для яких спрведливо таке подання:

$$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \operatorname{artb}(x) = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\boldsymbol{ln}(b)},\ \operatorname{arctb}(x) = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{ln}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\boldsymbol{ln}(b)},$$

в чому нескладно переконатися, виходячи з визначення гіперболічного котангенса і наведених двох останніх визначень (8а).

Отримані результати свідчать про те, що використання показової функції не змінює ширини області стійкості порівняно з використанням експоненціальної функції, але при цьому з'являється можливість одержувати стійкі гармонійні коливання з як завгодно великою амплітудою у міру наближення основи показової функції b до одиниці. Внесення аргументу під знак кореня k-го степеня приводить до розширення як області стійкості, так і діапазону зміни амплітуди стійких коливань. У разі використання гіперболічних функцій тільки cth(r) забезпечує стійкі коливання, оскільки для інших функцій цього класу не виконуються необхідні умови стійкості. Водночас при розгляді гіперпоказникових функцій стійкі коливання спостерігаються вже для чотирьох функцій з цього класу (tb(r), tb(-r), ctb(r), ctb(-r)). Найбільшою областю стійкості володіє функція tb(r). При її використанні тільки в області зміни параметра a від нуля до одиниці коливання загасають до нульового положення рівноваги. Для будь-яких інших значень параметра a можна отримати стійкі коливання довільної амплітуди за рахунок вибору основи b>1. Цю модель можна розглядати як модель ідеального генератора гармонійних коливань.

Верхні межі значення параметра a визначають межу зони стійкості розглянутих моделей, які наведені в табл. 1, і відповідають біфуркаційному значенню параметра, при якому відбувається якісна зміна характеру коливного процесу.

Розглянемо доцільність застосування функції

$$f(x) = x^{-x} \tag{8б}$$

до побудови дискретних моделей коливних процесів. Перш за все, ця функція є ні парною, ні непарною. Окрім того, вона є неоднозначною навіть для додатних значень аргументу і розривною при від'ємних значеннях аргументу. Застосувавши (3) до описаної функції, отримаємо неявне рівняння для знаходження можливих амплітуд гармонічних коливань

$$r^r = a. \tag{8в}$$

Якщо побудувати графік цієї функції, як показано на рис. 1, то можна бачити, що існує діапазон значень параметра $0 < a < 1$, де можливе виникнення двох гармонічних режимів.
Оскільки похідна функції x^x перетворюється в нуль при r = 1/e ≅ 0.3679, а функція при цьому досягає свого мінімуму в точці 0.6922 (друга похідна додатна в цій точці), то можна твердити, що в діапазоні зміни параметра a від 0.6922 до 1 можливе існування двох гармонічних режимів. При $a <$ 0.6922 коливання, очевидно, будуть загасати. Зазначимо, що при від'ємних значеннях r ця функція має нескінченне число локальних екстремумів та розривів.

Проведемо дослідження стійкості виявлених гармонійних режимів в моделі з базовою функцією x^{-x}. Підставляючи у вираз для похідної функції (8б)

$$\frac{df(x)}{dx} = -x^x \cdot (1 + \boldsymbol{ln}(x)),$$

яка є від'ємною при x>1/e, встановлене значення амплітуди коливань як розв'язок останнього неявного рівняння відносно r та застосувавши критерій стійкості (7), після нескладних перетворень отримуємо нерівність

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$\left|1 - r - \boldsymbol{ln(}\, a\,\boldsymbol{)}\right| < 1\,,$$

яка виконується при

$$\boldsymbol{ln(}\frac{1}{a}\boldsymbol{)} < r < 2 - \boldsymbol{ln(}\, a\,\boldsymbol{)}\,.$$

Остання нерівність визначає діапазон зміни амплітуди, в якому будуть існувати стійкі рухи. Отже, крива $a = r^r$ відповідатиме стійким гармонічним рухам для додатних значень r, якщо вона буде знаходитись вище кривої 1 $a = \exp(-r)$ і нижче кривої 2 $a = \exp(2-r)$, як показано на рис 2.

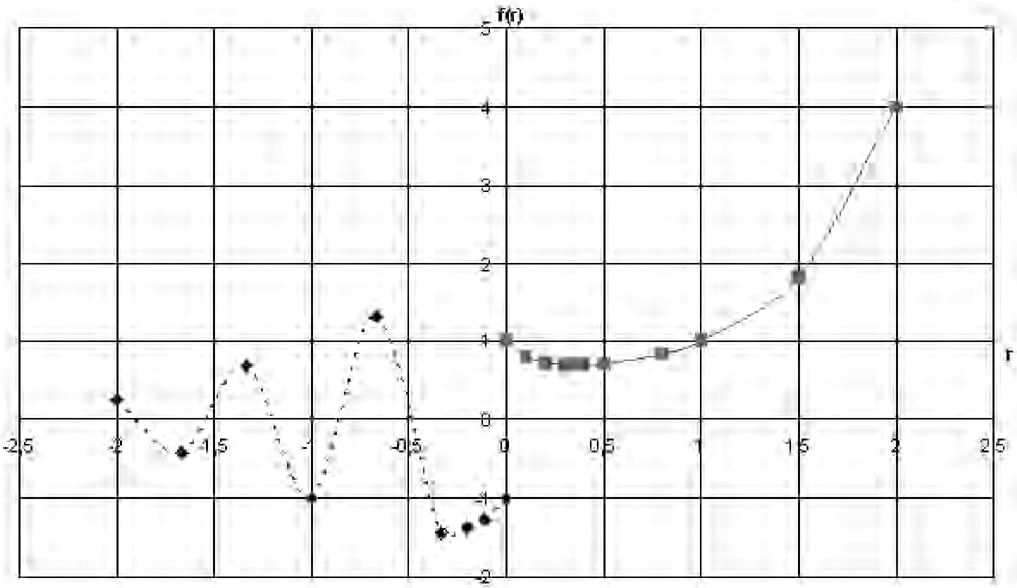

Рис. 1. Характер поведінки функції $f(r) = r^r$

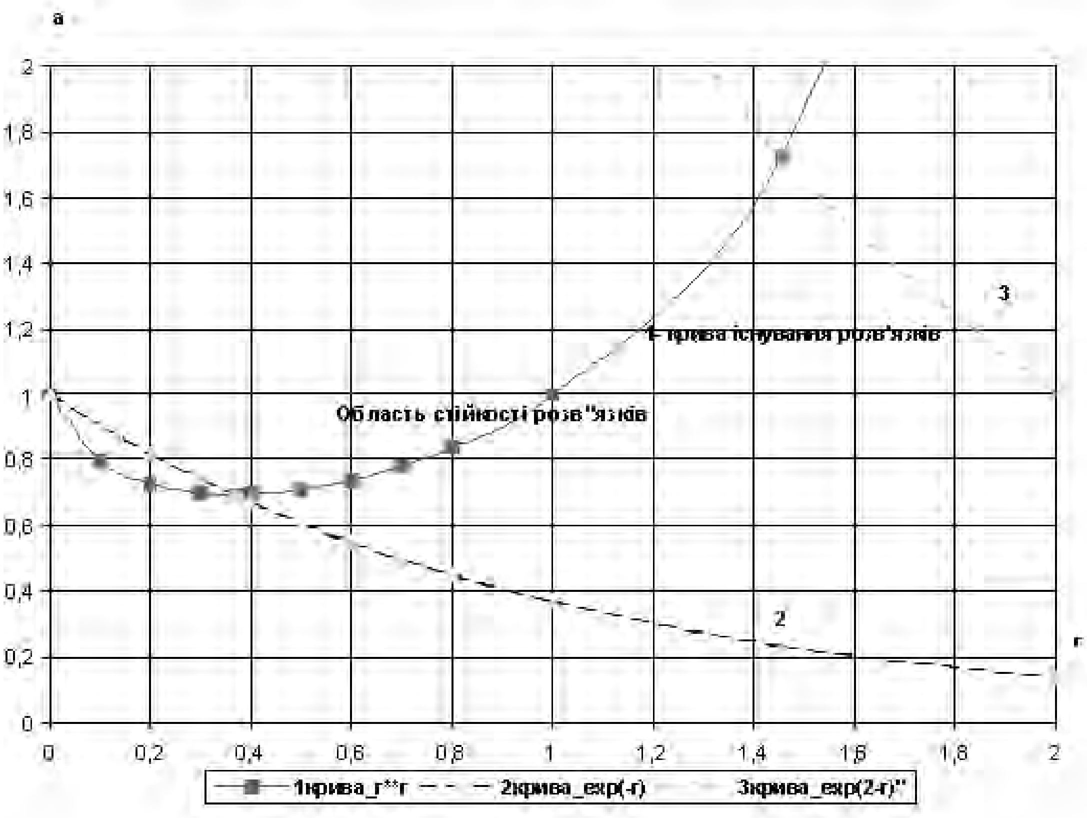

Рис. 2. Область стійкості гармонічних коливань моделі з базовою функцією x^{-x}

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Аналізуючи рис. 2 можна зробити висновок, що в діапазоні зміни 0,69≈ exp(-1/e)< a <1.78 існують стійкі амплітуди коливань, які визначаються розв'язками рівняння (8в). При виборі параметра a з діапазону, що відповідає двом амплітудам коливань, з області стійкості потрапляють лише коливання з більшою аплітудою. Нестійкість коливань меншої амплітуди стає зрозумілою, якщо застосувати критерій стійкості (7) і переконатися, що тривіальний розв'язок цієї моделі при a <1 є стійким. Яке з коливань (згасаюче чи гармонічне) існуватиме, залежатиме від початкових умов. При початковій амплітуді r^0<1/e коливання згасатимуть, а у протилежному випадку встановиться стійкий гармонічний режим, амплітуда якого визначається більшим з розв'язків рівняння (8в). Зазначимо, що в діапазоні зміни параметра 1< a <1,78 в моделі встановиться стійкий режим з амплітудою більшою за одиницю, але вона не може перевищувати 1,45.

Аналіз квазігармонійних режимів дискретної моделі

Для визначення амплітуд квазігармонійних коливань довільного порядку k необхідно зв'язати значення дискретних амплітуд, що рознесені один від одного на k відліків. Якщо подати рівняння (2) у вигляді сукупності k рівнянь

$$r_{m+i+1} = a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_{m+i} \qquad (9)$$

де i =1 ..., то після підстановки першого рівняння в друге, другого в третє і т.д. k-1 приходимо до співвідношення

$$\begin{aligned} r_{m+k} = {} & a^{2k} \cdot f^2[a^{2k-2} \cdot f^2(a^{2k-4} \cdot f^2(a^{2k-6} \cdot \ldots \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot \\ & \cdot f^2[a^{2k-4} \cdot f^2(a^{2k-8} \cdot \ldots \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot \ldots \\ & \ldots \cdot f^2[a^4 \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot f[a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot f^2(r_m) \cdot r_m \end{aligned}$$

Оскільки усталеному режиму відповідає значення r = r_{m+k} = r_m, на підставі останнього співвідношення можна отримати неявне рівняння для визначення амплітуд коливань довільної кратності k :

$$\begin{aligned} & f[a^{2k-2} \cdot f^2(a^{2k-4} \cdot f^2(a^{2k-6} \cdot \ldots \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot \\ & \cdot f[a^{2k-4} \cdot f^2(a^{2k-8} \cdot \ldots \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot \ldots \\ & \ldots \cdot f[a^4 \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f(r_m) \cdot r_m] \cdot f[a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot f(r_m) = \frac{1}{a^k} \end{aligned}$$

При k=2 з останнього виразу одержуємо рівняння для визначення двократних амплітуд

$$f[a^2 \cdot f^2(r) \cdot r] \cdot f(r) = \frac{1}{a^2}. \qquad (10)$$

Після лінеаризації (9) для значення k=2 приходимо до рівняння для приростів амплітуд в m і m+2 дискретних відліках

$$z_{m+2} = \{1 + 2 \cdot a^2 \cdot r \cdot (f'(r) \cdot f[a^2 \cdot f^2(r) \cdot r] + f'[a^2 \cdot f^2(r) \cdot r] \cdot f(r)\} \cdot z_m.$$

Для довільних значень рівняння для приростів амплітуд набуває вигляду:

$$z_{m+k} = \{1 + 2 \cdot a^k \cdot r \cdot \sum_{i=1}^{k} f'(a_{2i-2}(r)) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} f\ (a_{2i-2}(r))\} z_m,$$

де $f\ (a_{2i-2}(r))$ –рекурсивний виклик функції самої себе, вкладений на глибину 2i-2. Отже, достатнім критерієм стійкості квазігармонійних коливань довільної кратності є умова

$$\left| 1 + 2 \cdot a^k \cdot r \cdot \sum_{i=1}^{k} f'(a_{2i-2}(r)) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} f(a_{2j-2}(r)) \right| < 1. \qquad (11)$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

З наведеної нерівності випливає, що необхідна умова стійкості коливань довільної кратності k виконується при використанні додатно визначених функцій f(r) і їх рекурсивних викликів до k-го порядку включно і від'ємної визначеності похідних від цих функцій та їх рекурсій.

При використанні експоненціальної функції на основі (10) приходимо до рівняння для визначення амплітуд двократних коливань

$$r = \frac{2 \cdot \boldsymbol{ln}(a)}{(1 + a^2 \cdot \boldsymbol{exp}(-2 \cdot r))}, \tag{12}$$

а умова стійкості на основі (11) з врахуванням (12) приводиться до вигляду

$$\left|(1 - 2 \cdot r) \cdot (1 - 2 \cdot a^2 \cdot r \cdot \boldsymbol{exp}(-2 \cdot r))\right| < 1.$$

Після розкриття модуля в наведеній нерівності одержуємо співвідношення, які визначають межі області стійкості двократних амплітуд:

при r < 0,5

$$\begin{aligned} a &> \boldsymbol{exp}(-r^2 /(1 - 2 \cdot r)) \\ a &< \boldsymbol{exp}((1 - 2 \cdot r^2)/(2 - 4 \cdot r)) \end{aligned} \tag{13}$$

і при r > 0,5

$$\begin{aligned} a &< \boldsymbol{exp}(-r^2 /(1 - 2 \cdot r)) \\ a &> \boldsymbol{exp}((1 - 2 \cdot r^2)/(2 - 4 \cdot r)) \end{aligned} \tag{14}$$

як показано на рис.3., де вітки кривої 2 відповідають першим нерівностям у формулах (13), а вітки кривої 3 – другим нерівностям в (14). Якщо на основі (12) визначити a

$$a = \boldsymbol{exp}(r \cdot (1 + a^2 \cdot \boldsymbol{exp}(-2 \cdot r))/2),$$

то можна стверджувати, що на кривий 1 рис. 3., що відповідає останньому рівнянню, при виборі параметра $a > e$ стійкі двократні цикл є вищі за нижню вітку кривої 2 і нижчі за ліву вітку кривої 3 при r < 0,5, а при r > 0,5 область стійкості розташовано нижче за верхню вітку кривої 2 і вище за праву вітку кривої 3. Як випливає з рис. 3, стійким двократним амплітудам відповідає діапазон зміни параметра a в межах 3,5 > a > e, при цьому амплітуда двократних коливань може зміняться в межах 2,17 > r > 0,35. Отже, значення параметра a=3,5 визначає біфуркацію квазігармонійного режиму кратності 2. Зазначимо, що при використанні показникової функції як базової при зміні основи функції як у бік збільшення, так і в бік зменшення, якісних змін в динаміці моделі не спостерігається. Зменшення основи показової функції приводить до більшого розкиду амплітуд двократних коливань із поступовим зміщенням їх у бік збільшення. Біфуркація двократного режиму існує при тому ж значенні параметра a=3,5.

Щоб переконатися в цьому, проаналізуємо двохкратні режими дискретної коливної моделі з функцією b^{-r}. Після підстановки цієї функції та її повторного рекурсивного виклику в (10) отримуємо рівняння для визначення величин амплітуд кратності два

$$b^{-r \cdot (1 + a^2 \cdot b^{-2 \cdot r})} = \frac{1}{a^2}.$$

Прологарифмувавши останню рівність, отримуємо неявне рівняння для визначення можливих значень двократних амплітуд

$$r = \frac{2 \cdot \boldsymbol{ln}(a)}{\boldsymbol{ln}(b) \cdot (1 + a^2 \cdot b^{-2 \cdot r})}. \tag{15}$$

На рис.4. криві 1і 2 відповідають можливим розв'язкам рівняння (15) при виборі значення параметра b=1,1.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

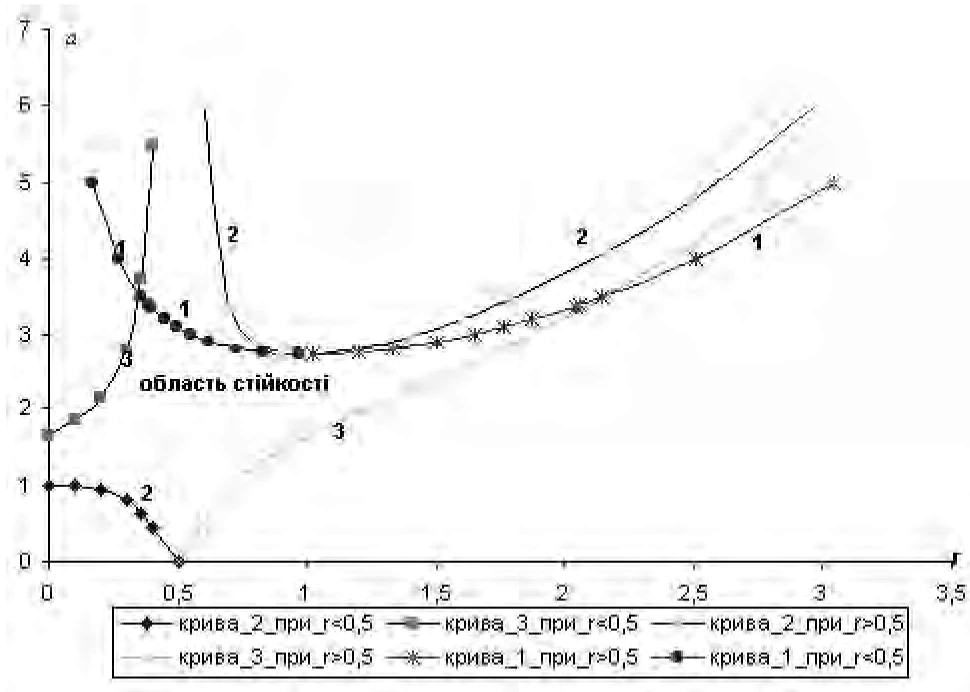

Рис. 3. Область стійкості двократних режимів дискретної моделі з базовою функцією exp(-r)

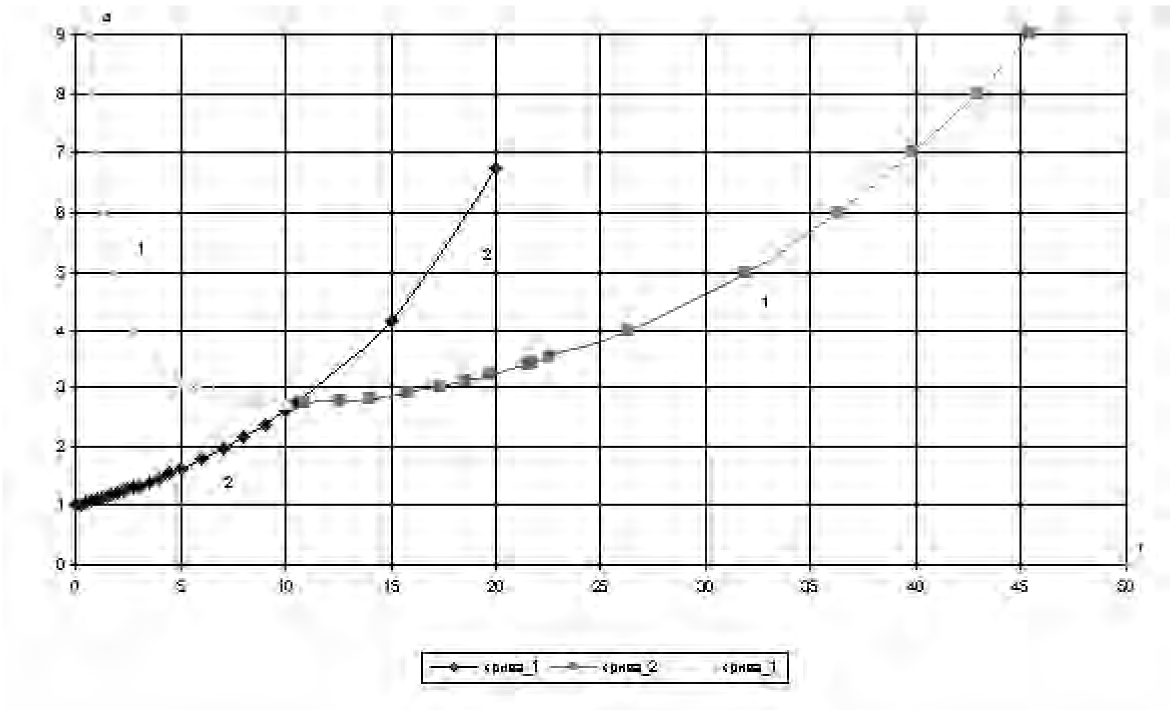

Рис.4. Розв'язки рівняння (15)

Двократні розв'язки дискретної моделі з базовою функцією b^{-r} лежать на кривих 1 і 2 при виборі значення a > e. При цьому r може набувати довільного додатного значення. Нижня вітка кривої 2 відповідає гармонічним розв'язкам (другий рядок табл.1), які є стійкими до значень a < e, що випливає з (7). При цьому значення r може змінюватися до десяти, тоді як при використанні експоненційної функції амплітуда гармонічних коливань не перевищує одиниці. Для встановлення умов стійкості двократних розв'язків (15) використаємо умову (11) при k=2. Врахувавши рівняння усталеного режиму (10), отримаємо умову стійкості двократних амплітуд

$$\left|(1-2\cdot r\cdot \boldsymbol{ln(}b\boldsymbol{))}\cdot\boldsymbol{(}1-2\cdot a^{2}\cdot r\cdot b^{-2\cdot r}\cdot \boldsymbol{ln(}b\boldsymbol{))}\right|<1.$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Після розкриття модуля в останній нерівності та використання рівняння для визначення величин двократних амплітуд (15) отримуємо, що при r < 1/(2*ln(b)) область стійкості визначається нерівностями

$$\begin{aligned} &a > \boldsymbol{exp}(-r^2 \cdot \boldsymbol{ln}^2(b)/(1-2\cdot r\cdot \boldsymbol{ln}(b)) \\ &a < \boldsymbol{exp}((1-2\cdot r^2\cdot \boldsymbol{ln}^2(b))/(2-4\cdot r\cdot \boldsymbol{ln}(b)) \end{aligned} \tag{16а}$$

і при r >1/(2*ln(b))

$$\begin{aligned} &a < \boldsymbol{exp}(-r^2 \cdot \boldsymbol{ln}^2(b)/(1-2\cdot r\cdot \boldsymbol{ln}(b)) \\ &a > \boldsymbol{exp}((1-2\cdot r^2\cdot \boldsymbol{ln}^2(b))/(2-4\cdot r\cdot \boldsymbol{ln}(b)) \end{aligned}, \tag{16б}$$

як показано на рис. 5., де вітки кривої 3 відповідають першим нерівностям в (16), а вітки кривої 4 – другим умовам цих же нерівностей (16). Якщо на основі (15) визначити a як

$$a = b^{\frac{r\cdot(1+a^2\cdot b^{-2\cdot r})}{2}},$$

то можна стверджувати, що на вітках кривої 1 рис. 5., що відповідає останньому рівнянню, при виборі $a >$ e розташовані стійкі двократні амплітуди вище кривої 3 і нижче кривої 4 при r < 5,246, а при r > 5,246 область стійкості розташована нижче кривої 3 і вище кривої 4. Як випливає з рис. 5, стійким двократним амплітудам відповідає діапазон зміни параметра 3,5> a > e, як і у випадку використання експонентційної функції, але при цьому амплітуда двократних коливань вже може змінюватися в значно ширших межах 22,51>r>3,77.

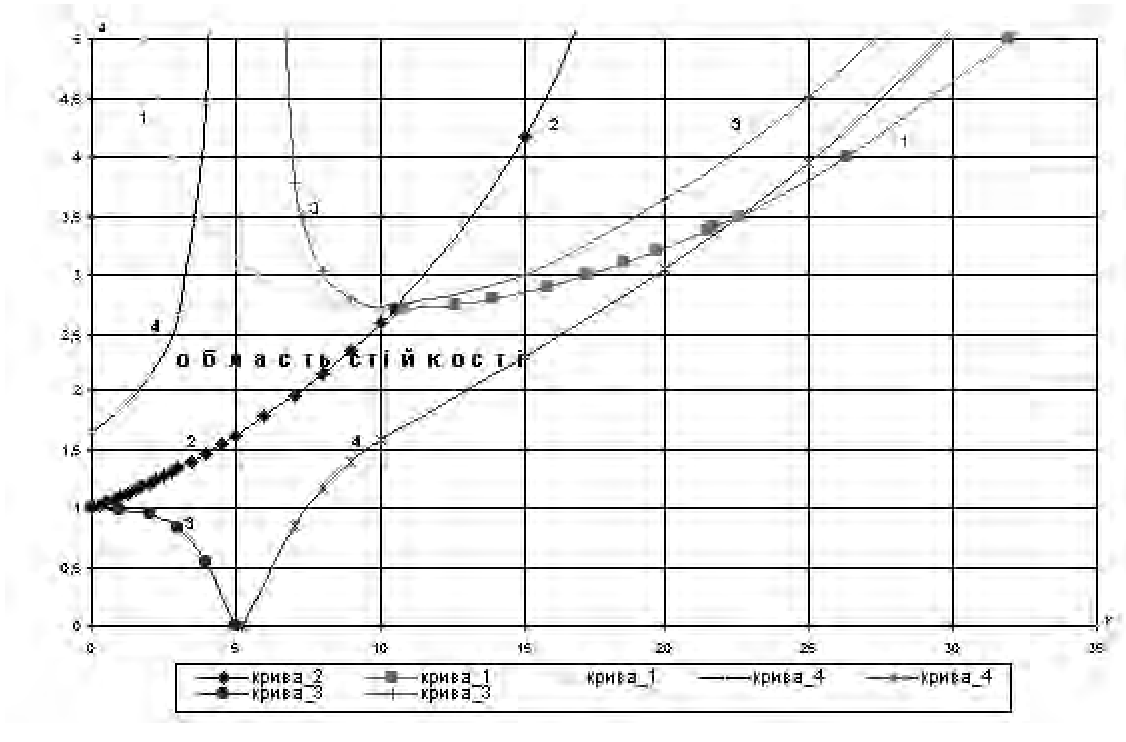

Рис. 5. Область стійкості двократних режимів дискретної моделі з базовою функцією b^{-r} при значенні b=1,1.

Застосування функції x^{-x} до аналізу квазігармонічних режимів потребує громіздких аналітичних перетворень і є предметом окремих досліджень

Висновки

На підставі запропонованого підходу побудована універсальна дискретна модель, що володіє широким діапазоном коливних рухів: гармонійні коливання, квазігармонійні режими різної кратності, хаотичні рухи.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Отримано аналітичні вирази загального вигляду для визначення амплітуд гармонійних коливань, оцінки періоду коливань і наведено неявні рівняння для визначення амплітуд квазігармонійних коливань довільної кратності.

Проаналізовано широкий клас базових функцій (експоненційних, показникових, спеціальних), які використовуються при побудові моделі, для кожної з яких визначена частота і амплітуда коливань, а також встановлені межі областей стійкості виявлених режимів.

Введено клас гіперпоказникових функцій, які мають найбільшу область стійкості і дозволяють генерувати гармонічні коливання довільної амплітуди в широкому діапазоні зміни параметрів.

Досліджено квазігармонійні коливання кратності 2 при використанні експоненційної і показової функції і встановлено біфуркаційні значення параметрів, при яких змінюються коливні режими системи.

В загальному вигляді отримані необхідні і достатні умови стійкості як гармонійних, так і квазігармонійних коливань довільного порядку при дослідженні моделі (1).

Запропонований клас моделей доцільно використовувати як для оптимального пректування реальних пристроїв з бажаними інформаційними характеристиками, так і для конструювання алгоритмів розпізнавання коливних явищ зі складною динамікою, а також об'єктів, що працюють в режимі дискретного часу.

Подальші дослідження динаміки дискретних коливних систем будуть спрямовані на побудову оптимальної моделі коливної системи, яка би давала змогу реалізації таких параметрів в системі, що забезпечують бажані (в ідеалі будь-які) амплітуду, частоту та форму коливань, які знаходяться в області стійкості незалежно від задання початкових умов. Очевидно, для побудови ідеальної моделі коливних процесів необхідно мати більше ніж два параметри, маніпулюючи якими, можна забезпечувати будь-які характеристики системи, не виходячи за межі області стійкості. При цьому модель повинна володіти такими властивостями:

1) існує принаймні один параметр b системи, від якого не залежить стійкість розв'язків;

2) цей параметр b не менше впливає на коливні характеристики системи ніж будь-який інший параметр;

3) в моделі наявний параметр k, який сприяє (або не сприяє) як розширенню (звуженню) області стійкості можливих режимів, так і діапазону зміни характеристик коливних процесів.

Виявляється, серед розглянутих моделей можна виділити дві, кожна з яких володіє однією або двома такими властивостями. Так, дискретна модель з експоненційною базовою функцією та внесенням аргумента під знак кореня k-го степеня володіє третьою властивістю, оскільки параметр k сприяє розширенню області стійкості її розв'язків, а також зі збільшенням параметра k зростає значення амплітуди коливань. Розглянута дискретна модель з показниковою базовою функцією при основі b володіє першими двома характеристиками, оскільки область стійкості її розв'язків, які визначаються співвідношенням (7), не залежить від параметра b, тоді як цей параметр впливає на амплітуду коливань не менше, ніж параметр *a*. Використання показникової функції з внесенням аргумента під знак кореня k-го степеня забезпечує отримання моделі з практично довільним значенням амплітуд усталених коливань, які є стійкими в широкому діапазоні зміни параметрів моделі.

1. Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Е. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 400 с. Бутенин Н.В., Неймарк И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 354 с. 3. Ван-дер-Поль. Нелинейная теория электрических цепей. – М.: Связь, 1935. – 186 с. 4. Видаль П. Нелинейные импульсные системы. – М.:Энергия, 1974. – 336 с. 5. Динамика одномерных отображений / А.Н. Шарковский, С.Ф. Коляда, А.Г. Сивак, В.В. Федоренко. – Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с. 6. Заяць В.М. Построение и анализ модели дискретной колебательной системы // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – С. 161–165. 7. Заяць В.М. Моделі дискретних коливних систем // Комп'ютерні технології друкарства. – 1998. – С. 37–38. 8. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 240 с. 9. Zayats V. Chaos searching algorithm for second order oscillatory system // Proc. International Conf. "TCSET – 2002". – Lviv–Slavsk. – 2002. – P. 97–98.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua