ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.643 № 643, (2009) с. 30–36

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 30–36

МОДЕЛЬ ФРІДРІХСА ДЛЯ ТРАНСПОРТНОГО ОПЕРАТОРА

Г.В. Івасик, Є.В. Черемних

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 22 вересня 2008 р.)

Встановлено, що власні значення та спектральні особливості транспортного оператора за деяких умов на потенціал можуть мати точкою скупчення тільки значення в нулі.

Ключові слова: спектр оператора, перетворення Фур'є, аналітичне продовження

2000 MSC: 47A20, 47A30, 47H12,46B34

УДК: 517.983

I. Постановка задачі

Задача про перенесення нейтронів приводить до оператора

$$Lf = -i\mu\frac{\partial f}{\partial x} + c(x)\int\limits_{-1}^{1} f(x,\mu')d\mu' \qquad (1)$$

в просторі $L^2(D)$, де позначено $D = R \times [-1,1]$. Ще в роботі [1] у випадку

$$c(x) = \begin{cases} c, & |x| < a \\ 0, & |x| > a, c = const \end{cases}$$

встановлено, що оператор L містить лише скінченну множину власних значень. Потім вийшла друком велика кількість праць, присвячених явищу перенесення. Відзначимо лише роботу [2], де у випадку $c \in L^\infty(R)$, $supp\ c \subset [-a,a], c(x) \geq 0$ вивчено точковий та неперервний спектр оператора L, а також роботу [3], де встановлено певні умови на потенціал $c(x)$, що забезпечують скінченність точкового спектра оператора (1).

Метою статті є перенесення результатів статті [3] на випадок загального рівняння

$$Lf = -i\mu\frac{\partial f}{\partial x} + c(x)\int\limits_{-1}^{1} b(\mu')f(x,\mu')d\mu'. \qquad (2)$$

Функція $c(x)$, як і в роботі [3], є експоненційно спадною при $x \to \infty$. Стосовно функції $b(\bullet)$ припускається існування аналітичного продовження в окіл інтервала [-1,1].

II. Модель Фрідріхса

Нехай H – деякий функціональний простір, наприклад простір функцій $\varphi(\tau)$, заданих на всій осі R. Нехай $S : H \to H$ - оператор множення на незалежну змінну, $(S\varphi)(\tau) \equiv \tau\varphi(\tau)$, $\tau \in R$ з максимальною областю визначення. Оператор вигляду $T = S + V$, де $V : H \to H$ деякий інтегральний оператор, називають моделлю Фрідріхса. Часто використовують факторизацію збурення $V = A^*B$, $A, B : H \to G$, де G деякий допоміжний простір. Отже, нашою метою є побудова оператора вигляду

$$T = S + A^*B, \qquad (3)$$

унітарно еквівалентного оператору L (див.(1)). Використовуватимемо результати та методику роботи [3]. Виберемо факторизацію потенціала $c(x) = c_1(x)c_2(x)$ так, що $|c_1(x)| = |c_2(x)|$. Наприклад $c_1(x)=c_2(x)=0$, якщо $c(x)=0$ і $c_1(x)=\sqrt{|c_0(x)|}$, $c_2(x)=c(x)/\sqrt{|c(x)|}$, якщо $c(x)\neq 0$. Через H позначаємо гільбертів простір функцій двох змінних $\varphi(s,\mu)$, $(s,\mu) \in D$ з нормою

$$||\varphi||_H^2 = \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} |\varphi(s,\mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu.$$

Введемо оператор $F_0 : L^2(D) \to H$, а саме

$$(F_0 u)(s,\mu) = u\left(\frac{s}{\mu},\mu\right), u \in L^2(D). \qquad (4)$$

Введемо також оператор $Z : L^2(R) \to H$:

$$(Zc)(s,\mu) = c\left(\frac{s}{\mu}\right), c \in L^2(R).$$

Легко перевірити, що $||F_0 u||_H = ||u||_{L^2(D)}$і оператор F_0 є унітарним і що оператор Z є обмеженим, $||Z|| \leq \leq \sqrt{2}$. Перетворення Фур'є в просторі $L^2(R)$, тобто

$$(Ff)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R e^{-is\tau} f(\tau)d\tau, s \in R \qquad (5)$$

визначає, очевидно, унітарне перетворення в $L^2(D)$, яке перетворює функцію $\varphi(\tau,\mu)$ з простору $L^2(D)$ як функцію змінної $\tau \in R$. Зберігаємо одне і те саме позначення F для обох відображень - як $L^2(R) \to \to L^2(R)$ так і $L^2(D) \to L^2(D)$. Наступне твердження доводиться так само, як і в роботі [3].

Теорема 1. *Нехай $L : L^2(D) \to L^2(D)$ – оператор з максимальною областю визначення, заданий виразом (1). Тоді*

$$ULU^{-1} = S + V : H \to H, \tag{6}$$

де унітарний оператор $U : L^2(D) \to H$ має вигляд $U = F_0 F$ (див.(4), (5)) і збурення V є інтегральним оператором

$$V\varphi(s,\mu) = = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} c(x) b(\mu') \left(\int\limits_R \varphi(s',\mu') e^{ix\frac{s'}{\mu'}} ds' \right) \frac{d\mu'}{|\mu'|} e^{-ix\frac{s}{\mu}} dx, \tag{7}$$

де $s \in R$, $\mu \in [-1,1]$.

□ *Доведення.* Застосуємо до рівності (2) перетворення Фур'є F по змінній x:

$$(FLf)(\tau,\mu) = \tau\mu u(\tau,\mu) + + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R \left(\int\limits_{-1}^{1} c(x) b(\mu') f(x,\mu') d\mu' \right) e^{-i\tau x} dx,$$

де $u = Ff$, або точніше $u(\tau,\mu) = (Ff(\bullet,\mu))(\tau)$. Дія оператора F_0 (див.(4)) фактично означає підстановку $\tau = \frac{s}{\mu}$ і перехід до змінних (s,μ),тому

$$(F_0FLf)(s,\mu) = s\varphi(s,\mu) + = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R \left(\int\limits_{-1}^{1} c(x) b(\mu') f(x,\mu') d\mu' \right) e^{-ix\frac{s}{\mu}} dx, \tag{8}$$

де позначено

$$\varphi(s,\mu) = (F_0 u)(s,\mu) = u\left(\frac{s}{\mu},\mu\right).$$

Підставляючи в останню рівність $u = Ff$ маємо

$$\varphi(s,\mu) = (F_0Ff)(s,\mu). \tag{9}$$

Якщо $F_0 u = \varphi$, або (див. (5)) $u(\frac{s}{\mu},\mu) = \varphi(s,\mu)$, то $u(\tau,\mu) = \varphi(\tau\mu,\mu) = (F_0^{-1}\varphi)(\tau,\mu)$. Згідно з (9) маємо

$$f(x,\mu) = (F^{-1}F_0^{-1}\varphi)(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R \varphi(\tau\mu,\mu) e^{i\tau x} d\tau.$$

Заміна змінної інтегрування $s' = \mu\tau$ дає

$$f(x,\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s',\mu) e^{i\frac{s'}{\mu}x} \frac{ds'}{\mu}, & \mu > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\infty}^{-\infty} \varphi(s',\mu) e^{i\frac{s'}{\mu}x} \frac{ds'}{\mu}, & \mu < 0. \end{cases}$$

Підставляючи вираз

$$f(x,\mu') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R \varphi(s',\mu') e^{i\frac{s'}{\mu'}x} \frac{ds'}{|\mu'|}$$

в рівність (8), одержуємо рівність (6) і представлення (7), що і треба було довести. ■

З теореми 1 очевидний наслідок.

Наслідок 1. Спектри операторів L і T (див. (3), (10)–(11)) збігаються.

Побудуємо факторизацію збурення V.

Твердження 1. Позначимо $G = L^2(R)$. Тоді оператор V (див.(7)) допускає факторизацію $V = A^*B$, де

$$B\varphi(x) = c_2(x) \int\limits_R e^{ix\tau} \left(\int\limits_{-1}^{1} b(\mu')\varphi(\tau\mu',\mu') d\mu' \right) d\tau \tag{10}$$

$$A^*c(s,\mu) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_R \overline{c_1(x)} c(x) e^{-ix\frac{s}{\mu}} dx, \tag{11}$$

і оператори $A^* : G \to H$, $B : H \to G$ є обмеженими.

□ *Доведення.* Заміна в (10) $\frac{s'}{\mu'} = \tau$, $ds' = \mu' d\tau$, $s \in R$, $\tau \in \pm R$ дає

$$\int\limits_R \varphi(s',\mu') e^{i\frac{s'}{\mu'}x} ds' = \int\limits_{\pm R} \varphi(\tau\mu',\mu') e^{ix\tau} \mu' d\tau =$$

$$= |\mu'| \int\limits_R \varphi(\tau\mu',\mu') e^{ix\tau} d\tau.$$

Отже, використовуючи факторизацію потенціала $c(x)$ маємо

$$V\varphi(s,\mu) = = \frac{1}{2\pi} \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} \overline{c_1(x)} c_2(x) b(\mu') \left(\int\limits_R \varphi(\tau\mu',\mu') e^{ix\tau} d\tau \right) d\mu' e^{-ix\frac{s}{\mu}} dx,$$

звідки очевидне представлення (10)–(11) для факторизації $V = A^*B$.

Доведемо спочатку обмеженість оператора B, тобто нерівність $||B\varphi||_G \le C||\varphi||_H$, $c = const$.

Позначимо для зручності

$$f(x) = \int\limits_R e^{ix\tau} \left(\int\limits_{-1}^{1} b(\mu')\varphi(\tau\mu',\mu') d\mu' \right) d\tau$$

тоді згідно з (10)

$$||B\varphi||_G^2 = \int\limits_R |B\varphi|^2 dx = \int\limits_R |c_2(x)|^2 |f(x)|^2 dx. \tag{12}$$

Функція $f(x)$ є перетворенням Фур'є функції

$$g(\tau) = \int\limits_{-1}^{1} b(\mu')\varphi(\tau\mu',\mu') d\mu'. \tag{13}$$

Отже,

$$\int\limits_R |f(x)|^2 dx = 2\pi \int\limits_R |g(\tau)|^2 d\tau.$$

Використовуючи оцінку $|c_2(x)|^2 \leq M$, $M = const$, одержуємо тоді з (12)

$$||B\varphi||_G^2 \leq M \int\limits_R |f(x)|^2 dx = 2\pi M \int\limits_R |g(\tau)|^2 d\tau.$$

Функція $b(\mu')$ обмежена і за нерівністю Коші для інтеграла (13) маємо

$$g(\tau) \leq \int\limits_{-1}^{1} |b(\mu')|^2 d\mu' \int\limits_{-1}^{1} |\varphi(\tau\mu', \mu')|^2 d\mu' \leq$$

$$\leq M_1 \int\limits_{-1}^{1} |\varphi(\tau\mu', \mu')|^2 d\mu'.$$

Отже,

$$||B\varphi||_G^2 \leq M_2 \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} |\varphi(\tau\mu', \mu')|^2 d\mu' d\tau.$$

Заміна $\tau\mu' = x$ змінної τ дає

$$||B\varphi||_G^2 \leq C \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} |\varphi(x, \mu')|^2 \frac{1}{|\mu'|} d\mu' dx = C||\varphi||_H.$$

Розглянемо тепер оператор A^* і доведемо, що $||A^*c||_H \leq M||c||_G$. Враховуючи вигляд лівої частини (11), зробимо заміну змінної $\frac{s}{\mu} = \tau$ у такому інтегралі:

$$\int\limits_R |A^*c(s,\mu)|^2 ds = \int\limits_{\pm R} |A^*c(\mu\tau,\mu)|^2 \mu d\tau =$$

$$= |\mu| \int\limits_R |A^*c(\mu\tau,\mu)|^2 d\tau =$$

$$= \frac{|\mu|}{4\pi^2} \int\limits_R \left| \int\limits_R \overline{c_1(x)} c(x) e^{-ix\tau} dx \right|^2 dx =$$

$$= \frac{|\mu|}{2\pi} \int\limits_R \left| \overline{c_1(x)} c(x) \right|^2 dx.$$

Тут знову використаємо властивості перетворення Фур'є. Оскільки функція $c_1(x)$ обмежена, то

$$||A^*c||_H^2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{|\mu|} \int\limits_R |A^*c(s,\mu)|^2 ds d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_R \left| \overline{c_1(x)} c(x) \right|^2 dx d\mu \leq$$

$$\leq M \int\limits_R |c(x)|^2 dx \int\limits_{-1}^{1} d\mu = 2M||c||_G^2.$$

Отже, оператори B, A^* - обмежені, що і треба було довести. ■

Розглянемо резольвенту оператора T. Рівняння $(T-\zeta)\varphi = \psi$, $\zeta \in C$ має вигляд (див. (3))

$$(S-\zeta)\varphi + A^*B\varphi = \psi.$$

Позначимо $S_\zeta = (S-\zeta)^{-1}$, $T_\zeta = (T-\zeta)^{-1}$. Оскільки $\zeta \notin R$, то обернений оператор S_ζ існує і є обмеженим, рівняння набуває вигляду

$$\varphi + S_\zeta A^* B\varphi = S_\zeta \psi. \qquad (14)$$

Домножуючи також зліва на оператор B, отримуємо

$$(1 + BS_\zeta A^*)B\varphi = BS_\zeta \psi. \qquad (15)$$

Позначивши

$$K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*, \zeta \notin R, \qquad (16)$$

отримаємо таке твердження.

Твердження 2. Якщо оператор $K(\zeta)$, $\zeta \notin R$ має обмежений обернений оператор $K(\zeta)^{-1}$, то ζ належить резольвентній множині оператора T і

$$T_\zeta = S_\zeta - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} BS_\zeta. \qquad (17)$$

□ *Доведення.* Визначаючи $B\varphi$ з рівності (15) і підставляючи в (14), одержуємо для $\varphi = T_\zeta\psi$ представлення (17). Оператор T_ζ є визначеним на всьому просторі H і є обмеженим (див. тв. 1 стосовно обмеженості операторів A^* і B). Отже, ζ належить резольвентній множині оператора T, що і треба було довести. ■

III. Оцінка оператора $K(\zeta) - 1, Im\zeta \neq 0$

Згідно з (16) достатньо оцінити оператор $BS_\zeta A^*$. Використовуючи вираз A^*c (див (11)) і підставляючи $\varphi(s,\mu) = S_\zeta A^* c(s,\mu)$ в (10), одержуємо

$$BS_\zeta A^* c(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} c_2(x) \int\limits_R \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{b(\mu')d\mu'}{\tau\mu' - \zeta} \right) \left(\int\limits_R \overline{c_1(y)} e^{i(x-y)\tau} c(y) dy \right) d\tau.$$

Змінюючи порядок інтегрування по y і τ, одержуємо лему.

Лема 1. *Існує представлення*

$$((K(\zeta) - 1)c)(x) = \int\limits_R k(x,y,\zeta) c(y) dy, \qquad (18)$$

де

$$k(x,y,\zeta) = \frac{1}{2\pi} c_2(x) \overline{c_1(y)} I(x-y,\zeta) \qquad (19)$$

і

$$I(u,\zeta)=\int\limits_R l(\tau,\zeta)e^{iu\tau}d\tau, u=x-y, \text{ де} \qquad (20)$$

$$l(\tau,\zeta)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{b(\mu')}{\tau\mu'-\zeta}d\mu', Im(\zeta)\neq 0. \qquad (21)$$

Зауважимо, що зміна порядку інтегрування є можливою, завдячуючи очевидній асимптотиці

$$l(\tau,\zeta)=O\left(\frac{1}{\tau}\right), |\tau|\to\infty, \zeta=const.$$

Далі для скорочення знак u позначаємо через $s(u)=sign\ u$.

Лема 2. *Існує представлення*

$$I(u,\zeta)=\int\limits_0^\infty\frac{1}{t-\zeta}f_{-s(u)}(t\,|u|)dt-\int\limits_0^\infty\frac{1}{t+\zeta}f_{s(u)}(t\,|u|)dt, \qquad (22)$$

де

$$f_\omega(\theta)=\int\limits_\theta^\infty\frac{1}{y}\left[b\left(\frac{\theta}{y}\right)e^{-i\omega y}+b\left(-\frac{\theta}{y}\right)e^{i\omega y}\right]dy, \omega=\pm1. \qquad (23)$$

□ *Доведення.* Заміна змінної $t=\tau\mu'$ в інтегралі (21) дає

$$l(\tau,\zeta)=\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\frac{b(\frac{t}{\tau})}{t-\zeta}dt.$$

Підставимо в інтеграл (20) і інтегрування по τ зведемо до інтервала $(0,\infty)$, а саме:

$$I(u,\zeta)=\left(\int\limits_{-\infty}^0+\int\limits_0^\infty\right)\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\frac{b(\frac{t}{\tau})}{t-\zeta}dt\ e^{iu\tau}d\tau=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\frac{1}{t-\zeta}\left[b\left(-\frac{t}{\tau}\right)e^{-iu\tau}+b\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{iu\tau}\right]dtd\tau.$$

Змінюємо порядок інтегрування, тоді

$$I(u,\zeta)=\left(\int\limits_0^\infty\frac{dt}{t-\zeta}\int\limits_t^\infty+\int\limits_{-\infty}^0\frac{dt}{t-\zeta}\int\limits_{-t}^\infty\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\tau}\left[b\left(-\frac{t}{\tau}\right)e^{-iu\tau}+b\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{iu\tau}\right]d\tau,$$

або

$$I(u,\zeta)=\int\limits_0^\infty\frac{dt}{t-\zeta}\int\limits_t^\infty\frac{1}{\tau}\left[b\left(-\frac{t}{\tau}\right)e^{-iu\tau}+b\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{iu\tau}\right]d\tau-$$

$$-\int\limits_0^\infty\frac{dt}{t+\zeta}\int\limits_t^\infty\frac{1}{\tau}\left[b\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{-iu\tau}+b\left(-\frac{t}{\tau}\right)e^{iu\tau}\right]d\tau.$$

Підстановка $y=|u|\,\tau$ (для якої маємо $u\tau=s(u)y$) приводить до представлення (22)–(23), що і треба було довести.
■

Лема 3. *Існують сталі a, a_1, a_2 такі, що*

$$|f_\omega(\theta)|<a_1|ln\theta|+a_2, 0<\theta<1 \qquad (24)$$

і

$$|f_\omega(\theta)|<\frac{a}{\theta}, \theta>1. \qquad (25)$$

□ *Доведення.* Функція $b(z)$ аналітична в крузі $|z|<1+\epsilon$, $\epsilon>0$ тому існує стала M, така, що

$$\left|\frac{b(z)-b(0)}{z}\right|\leq M,\ |z|<1,$$

звідки очевидна оцінка

$$|b\left(\frac{\theta}{y}\right)-b(0)|\leq M\frac{\theta}{y},\ 0<\theta<y. \qquad (26)$$

Достатньо оцінити перший доданок в правій частині(23), а саме:

$$f(\theta)\equiv\int\limits_\theta^\infty\frac{1}{y}b\left(\frac{\theta}{y}\right)e^{-i\omega y}dy=$$

$$=\int\limits_\theta^\infty\frac{1}{y}\left[b\left(\frac{\theta}{y}\right)-b(0)\right]e^{-i\omega y}dy+b(0)\int\limits_\theta^\infty\frac{e^{-i\omega y}}{y}dy.$$

Використовуючи оцінку (26)(а також інтегруючи по частинах), знаходимо, що функція $f(\theta)$ задовольняє оцінку (25). У випадку $0<\theta<1$ маємо

$$f(\theta)=\left(\int\limits_\theta^1+\int\limits_1^\infty\right)\frac{1}{y}b\left(\frac{\theta}{y}\right)e^{-i\omega y}dy,$$

де

$$\left|\int\limits_\theta^1\frac{1}{y}b\left(\frac{\theta}{y}\right)e^{-i\omega y}dy\right|\leq M\left|\int\limits_\theta^1\frac{dy}{y}\right|=M|ln\theta|,$$

що і доводить оцінку (24) для функції $f(\theta)$.
■

Теорема 1. *Оператор $K(\zeta)-1:L^2(R)\to L^2(R)$ є цілком неперервним і $\|K(\zeta)-1\|\to0$, $|\zeta|\to\infty$ рівномірно в області $|Im\zeta|>\nu_0$ для кожного $\nu_0>0$.*

Доведення не наводимо, оскільки воно повторює доведення роботи [3]. Достатні для цього оцінка (3.16) і представлення (3.18) роботи [3] збігаються з оцінками (24)–(25) і представленням (22).

Згідно з представленням (22) функція $I(u,\zeta)$ (а отже, і оператор $K(\zeta)$)мають точку $\zeta=0$ точкою розгалуження.

Теорема 2. *Оператор $K(\zeta)-1$ допускає аналітичне продовження через півосі $(-\infty;0)$ і $(0;\infty)$ і $\|K_+(\zeta)-1\ \|\to 0$, $\|K_-(\zeta)-1\ \|\to 0$,$|\zeta|\to\infty$ рівномірно в області $|Im\zeta|<\epsilon_1$, для кожного $\epsilon_1<\frac{\epsilon}{2}$* .

□ *Доведення.* Серед чотирьох варіантів продовжень згори $K_+(\zeta)$ чи знизу $K_-(\zeta)$ через півосі $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$ достатньо обмежитись одним варіантом, наприклад, продовженням знизу $K_-(\zeta)$ через піввісь $(0;\infty)$.

Зафіксуємо точку $z_0=\sigma_0+i\epsilon_0$ таку, що $\sigma_0>0$, $\epsilon_1<\epsilon_0<\frac{\epsilon}{2}$. Позначимо через $\Gamma_1=\{sz_0,0<s<1\}$ відрізок прямої, що з'єднує початок координат z=0 з точкою z_0 і через $\Gamma_2=\{\sigma+i\epsilon_0,\sigma_0<\sigma<\infty\}$ горизонтальну пряму з точки z_0 до нескінченності. Через Ω позначаємо область, розташовану нижче від контуру $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$.

Згідно з (18)–(19)достатньо перевірити умову

$$\int\limits_R\int\limits_R|c_1(y)|^2\,|c_2(x)|^2\,|I_-(y-x,\theta+i\tau_0)|^2\,dxdy\to 0,\quad |\tau_0|<\epsilon,\theta\to\infty. \tag{27}$$

Надалі, розбиваючи функцію $I_-(u,\zeta)$, $\zeta=\theta+i\tau_0$ на окремі доданки, казатимемо, що ці доданки задовольняють умову (27), якщо відповідний інтеграл типу (27) прямує до нуля при $\theta\to\infty$. Продовження $I_-(u,\zeta)$ функції $I(u,\zeta)$ знизу через піввісь $(0,\infty)$ в область Ω має вигляд (див. (22)–(23))

$$I_-(u,\zeta)=\int\limits_\Gamma\frac{f_-\omega(z\,|u|)}{z-\zeta}dz-\int\limits_0^\infty\frac{f_\omega(\sigma\,|u|)}{\sigma+\zeta}d\sigma,\zeta\in\Omega, \tag{28}$$

де $f_{-\omega}(w)$ для комплексних значень $w=\xi+i\eta$ означає аналітичне продовження функції

$$f_{-\omega}(\xi)=\int\limits_\xi^\infty\frac{1}{y}[b\left(\frac{\xi}{y}\right)e^{-i\omega y}+b\left(-\frac{\xi}{y}\right)e^{i\omega y}]dy,\xi\in(0,\infty) \tag{29}$$

в область значень $Im\ w>0$.

Нам потрібна оцінка для виразу (28) така, що її залежність від $u=x-y$ забезпечує збіжність інтеграла (27), а її залежність від $\zeta=\theta+i\tau_0$ забезпечує прямування інтеграла до нуля при $\theta\to\infty$.

Таку оцінку для другого інтеграла в (28) одержуємо відразу

$$\left|\int\limits_0^\infty\frac{f_\omega(\sigma\,|u|)}{\sigma+\zeta}d\sigma\right|^2=\left|\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt[4]{\sigma}}f_\omega(\sigma\,|u|)\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sigma+\zeta}d\sigma\right|^2\leq$$

$$\leq\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,|f_\omega(\sigma\,|u|)|^2\,d\sigma\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{\sigma}}{|\sigma+\zeta|^2}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|u|}}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{t}}\,|f_\omega(t)|^2\,dt\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{\sigma}}{|\sigma+\zeta|^2}d\sigma\to 0,Re\zeta\to+\infty$$

тут використана підстановка $t=\sigma\,|u|$.

Розглянемо перший інтеграл у правій частині рівності (28). Позначивши $b_1(z)\ \equiv\ b(z)-b(0)$, перепишемо функцію (29)у вигляді

$$f_{-\omega}(\xi)=\int\limits_\xi^\infty\frac{1}{y}b_1\left(\frac{\xi}{y}\right)e^{-i\omega y}dy+ +\int\limits_\xi^\infty\frac{1}{y}b_1\left(\frac{-\xi}{y}\right))e^{i\omega y}dy+2b(0)\int\limits_\xi^\infty\frac{cosy}{y}dy. \tag{30}$$

Внесок за рахунок функції $f(\xi)=\int\limits_\xi^\infty\frac{cosy}{y}dy$ як доведено в статті [3] задовольняє умову(27). Отже, згідно з розкладом (30) достатньо побудувати аналітичне продовження $h(w)$ для першого інтеграла, тобто функції

$$h(\xi)=\int\limits_\xi^\infty\frac{1}{y}b_1\left(\frac{\xi}{y}\right)e^{-iy}dy \tag{31}$$

і довести, що відповідна складова функції $I_-(u,\zeta)$, а саме:

$$\int\limits_\Gamma\frac{h(z\,|u|)}{z-\zeta}dz=\left(\int\limits_{\Gamma_1}+\int\limits_{\Gamma_2}\right)\frac{h(z\,|u|)}{z-\zeta}dz \tag{32}$$

також задовольняє оцінку (27). Другий інтеграл розглядаємо аналогічно. Використовуючи розклад в степеневий ряд $b_1(z)=b_1z+b_2z^2+...$, $|z|<1+\epsilon$, одержуємо, що аналітичне продовження функції (див. (31))

$$h(\xi)=\sum_{k=1}^\infty b_k\xi^k\int\limits_\xi^\infty\frac{1}{y^{k+1}}e^{-iy}dy$$

існує і має вигляд

$$h(w)=\sum_{k=1}^\infty b_kw^k\int\limits_{C(w)}\frac{1}{y^{k+1}}e^{-iy}dy=\int\limits_{C(w)}\frac{1}{y}b_1\left(\frac{w}{y}\right)e^{iy}dy,$$

де інтегрування ведеться по орієнтованому контуру, що починається в точці $w=\xi+i\eta$ $C(w)=\left\{\xi+it:t=\overline{\eta,0}\right\}\cup(\xi,\infty)$. Оскільки $|b_1(z)|\leq$ $\leq M\,|z|$, то функція

$$h(w)=-\int\limits_0^\eta\frac{1}{\xi+it}b_1\left(\frac{w}{\xi+it}\right)e^{-i(\xi+it)}idt+ +\int\limits_\xi^\infty\frac{1}{y}b_1\left(\frac{w}{y}\right)e^{-iy}dy\equiv h_1(w)+h_2(w) \tag{33}$$

для довільного значення $w=\xi+i\eta$ має оцінку

$$|h(w)|\leq M\int\limits_0^\eta\frac{1}{|\xi+it|}\frac{|w|}{|\xi+it|}e^tdt+ +M\int\limits_\xi^\infty\frac{1}{y}\frac{|w|}{y}dy=M\,|w|\left[\frac{e^\eta}{\xi}arctg\frac{\eta}{\xi}+\frac{1}{\xi}\right] \tag{34}$$

1) на контурі $\Gamma_1 : z = tz_0, t \in (0;1)$ маємо $w = z\,|u| = t\sigma_0\,|u| + it\epsilon_0\,|u| \equiv \xi + i\eta$, отже $\frac{|w|}{\xi} = \sqrt{1+(\frac{\eta}{\xi})^2} = \sqrt{1+(\frac{\epsilon_0}{\sigma_0})^2}$ і $e^{\eta} = e^{t\epsilon_0|u|} \le e^{\epsilon_0|u|}$, тому, згідно з (34): $|h(z\,|u|)| \le Me^{\epsilon_0|u|}$ і (див. (32))

$$\left|\int\limits_{\Gamma_1} \frac{h(z|u|)}{z-\zeta}dz\right| \le \frac{M}{|\zeta|}e^{\epsilon_0|u|}.$$

Зрозуміло, що відповідний внесок в (32) задовольняє умову (27).

2) на контурі $\Gamma_2 : z = \sigma + i\epsilon_0, \sigma > \sigma_0$ маємо $w = z\,|u| = \sigma\,|u| + i\epsilon_0\,|u| \equiv \xi + i\eta,\ \xi = \sigma\,|u|,\ \eta = \epsilon_0\,|u|$. Використаємо розклад $h(w) = h_1(w) + h_2(w)$ (див. (33)).

Розглянемо спочатку функцію

$$h_1(w) = -\int\limits_0^{\epsilon_0|u|} \frac{1}{\sigma\,|u| + it} b_1\left(\frac{\sigma\,|u| + i\epsilon_0\,|u|}{\sigma\,|u| + it}\right) e^{-i\sigma|u|+t} i dt.$$

Заміна $t = |u|\,p$ дає

$$h_1(w) = -i\int\limits_0^{\epsilon_0} \frac{1}{\sigma + ip} b_1(\frac{\sigma + i\epsilon_0}{\sigma + ip}) e^{|u|p} dp e^{-i\sigma u},$$

звідки $|h_1(w)| \le \frac{M}{\sigma}e^{\epsilon_0|u|}$, $\sigma > \sigma_0$.

Інтеграл по контуру Γ_2 має оцінку($\zeta = \theta + i\tau_0$)

$$\left|\int\limits_{\Gamma_2} \frac{h_1(w)}{z-\zeta}dz\right| \le Me^{\epsilon_0|u|}\int\limits_{\sigma_0}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma\sqrt{(\sigma-\theta)^2 + (\epsilon_0-\tau_0)^2}}.$$

Для достатньо великих значень θ розбиваємо область інтегрування (σ_0, ∞) на дві частини

а)

$$\int\limits_{\theta-\sqrt{\theta}}^{\theta+\sqrt{\theta}} \frac{d\sigma}{\sigma\sqrt{(\sigma-\theta)^2 + (\epsilon_0-\tau_0)^2}} \le \frac{1}{\epsilon_0 - \tau_0} ln\,|\sigma| \Big|_{\theta-\sqrt{\theta}}^{\theta+\sqrt{\theta}} = \\ = \frac{1}{\epsilon_0-\tau_0} ln\frac{\theta+\sqrt{\theta}}{\theta-\sqrt{\theta}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right), \theta \to \infty. \tag{35}$$

б)

$$\int\limits_{|\sigma-\theta|>\sqrt{\theta}} \frac{d\sigma}{\sigma\sqrt{(\sigma-\theta)^2 + (\epsilon_0-\tau_0)^2}} \le \\ \le \frac{1}{\theta}\left(\int\limits_{\sigma_0}^{\theta-\sqrt{\theta}} + \int\limits_{\theta+\sqrt{\theta}}^{\infty}\right)\left(\frac{1}{\sigma-\theta} - \frac{1}{\sigma}\right)d\sigma = \\ = \frac{1}{\theta}\left[ln\left|\frac{\sigma_0-\theta}{\sigma_0}\right| - ln\frac{\sqrt{\theta}}{\theta+\sqrt{\theta}} + ln\frac{\sqrt{\theta}}{\theta-\sqrt{\theta}}\right] = \\ = O\left(\frac{ln\theta}{\theta}\right), \quad \theta \to \infty. \tag{36}$$

Отже, відповідний внесок в (36) задовольняє умову (27).

Тепер в розкладі (33) розглядаємо функцію

$$h_2(w) = \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{1}{y} b_1\left(\frac{w}{y}\right) e^{-iy}dy$$

на контурі Γ_2. Підставимо $w = \sigma\,|u| + i\epsilon_0\,|u|\,, \xi = \sigma\,|u|$ та розкладемо функцію на два доданки

$$h_2(w) = \int\limits_{\sigma|u|}^{\infty} \frac{1}{y}\left[b_1\left(\frac{\sigma\,|u| + i\epsilon_0\,|u|}{y}\right) - b_1\left(\frac{\sigma\,|u|}{y}\right)\right] e^{-iy}dy + \\ + \int\limits_{\sigma|u|}^{\infty} \frac{1}{y} b_1\left(\frac{\sigma\,|u|}{y}\right) e^{-iy}dy \equiv h_{21}(\sigma,u) + h_{22}(\sigma,u). \tag{37}$$

Позначимо для скорочення і використаємо нерівність

$$\left|b_1\left(\frac{\theta + i\epsilon_0\,|u|}{y}\right) - b_1\left(\frac{\theta}{y}\right)\right| \le M\epsilon_0\frac{|u|}{y},$$

тоді

$$|h_{21}(\sigma,u)| \le M\epsilon_0\,|u| \int\limits_{\sigma|u|}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{M\epsilon_0\,|u|}{\sigma\,|u|} = \frac{M\epsilon_0}{\sigma}.$$

Повторюючи перетворення (35)–(36) переконуємось, що складова $\int\limits_{\Gamma_2} \frac{h_{21}(\sigma,u)}{z-\zeta}dz$ задовольняє умову (27). Для другого доданку в розкладі (37)

$$h_{22}(\sigma,u) = \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{1}{y} b_1\left(\frac{\xi}{y}\right) e^{-iy}dy \tag{38}$$

у випадку $0 < \xi < 1$ обмежуємось оцінкою

$$|h_{22}(\sigma,u)| \le M\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{1}{y}\cdot\frac{\xi}{y}dy = M, 0 < \xi < 1. \tag{39}$$

У випадку $\theta > 1$ проінтегруємо спочатку по частинах в (38), тоді

$$h_{22}(\sigma,u) = -\frac{i}{\theta}\cdot b_1 + \\ + i\int\limits_{\xi}^{\infty}\left[\frac{1}{y^2}\cdot b_1\left(\frac{\xi}{y}\right) + \frac{\xi}{y^3}\cdot b_1'\left(\frac{\xi}{y}\right)\right] e^{-iy}dy \tag{40}$$

і оцінка має вигляд

$$|h_{22}(\sigma,u)| \le \frac{M}{\xi}, \xi > 1. \tag{41}$$

Оцінки(39),(41) дозволяють повторити обчислення (3.19)–(3.22) роботи [3] і переконатись, що складова $\int\limits_{\Gamma_2} \frac{h_{22}(\sigma,u)}{z-\zeta}dz$ також задовольняє умову (27), що і треба було довести. ■

IV. Висновки

Згідно з представленням (17) кожна особлива точка резольвенти $\zeta \to T_\zeta$ є особливою точкою функції $K(\zeta)^{-1}$. З вигляду функції $K(\zeta)$ (див. (16)) очевидно, що оператор-функція $K(\zeta)$ є голоморфною в півплощинах $Im\zeta > 0$ і $Im\zeta < 0$. З теореми 1 зрозуміло, що в цих півплощинах існують значення ζ_0 такі, що $\|K(\zeta_0) - 1\| < 1$, отже обернений оператор $K(\zeta_0)^{-1}$ існує. Оскільки оператор $K(\zeta) - 1$ є цілком неперервним, то згідно з відомою теоремою про голоморфну оператор-функцію (див. [4]) оператор $K(\zeta)^{-1}$ є обмеженим і заданим на всьому просторі G, а точки ζ, для яких обернений оператор $K(\zeta)^{-1}$ не існує, є ізольованими і можуть мати точки скупчення лише на границі області, в цьому випадку на дійсній осі $Im\zeta = 0$. З теореми 2 про аналітичне продовження очевидно, що точки $\sigma < 0$ та $\sigma > 0$ також не можуть бути точками скупчення для тих точок, для яких $K(\zeta)^{-1}$ не існує. Використовуючи наслідок 1, одержуємо теорему.

Теорема 1. *Власні значення та спектральні особливості оператора L (див. (2)) можуть мати точкою скупчення тільки значення $\zeta = 0$.*

Нагадаємо, що спектральними особливостями називаються полюси аналітичного продовження білінійної форми резольвенти на гладких елементах, розташовані на неперервному спектрі оператора.

Література

[1] Lehner I.J. The spectrum of the neutron transport operator for the infinit slab // J.Math.Mech. 11, 1962, no.2,

[2] Куперин Ю.А., Набоко С.Н., Романов Р.В. Спектральный анализ односкоростного оператора переноса и функциональная модель, Функ. анализ и его прил. Т.33, п.3, 1999. – С.47–58.

[3] Diaba F.,Cheremnikh E. On the point spectrum of transport operator, Meth. Funct. Anal. And Topology, v.11 n.1, 2005. – P.21–36.

[4] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: 1465. – 448 с.

MODEL FRIDRIKH'S OF TRANSPORT OPERATOR

G.V. Ivasyk, E.V. Cheremnikh

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

It is proved that eigen-values and spectral singularities of transport operator under certain conditions on the potential can have zero only as a point of accumulation.

Keywords: Operator spectrum, Fourier transformation, analitic prolongation

2000 MSC: 47A20, 47A30, 47H12,46B34

УДК: 517.983