ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.643 № 643, (2009) с. 15–23

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 15–23

ПРО МЕРОМОРФНІ РОЗВ'ЯЗКИ З ЛОГАРИФМІЧНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ В ∞ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В.Д. Мохонько[a], А.З. Мохонько[b], Л.І. Коляса[b]

[a] *Технічний коледж НУ "Львівська політехніка"*
(79035, Україна, Львів, вул. Пимоненка 19)
[b] *Національний університет "Львівська Політехніка"*
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 16 березня 2009 р.)

Одержано деякі апріорні оцінки порядку росту мероморфних розв'язків з логарифмічною особливою точкою в ∞ лінійних диференціальних рівнянь та систем лінійних диференціальних рівнянь $\frac{dy_j}{dz} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}y_i, \quad 1 \le j \le n$, коефіцієнти яких $a_{ji}(z)$ — мероморфні функції з логарифмічною особливою точкою в ∞.

Ключові слова: логарифмічна особлива точка, мероморфний розв'язок, оцінки зростання, диференціальні рівняння.

2000 MSC: 30D30, 34M05

УДК: 517.925.6

Нехай A_l множина аналітичних в $G = \{z : r_0 \le |z| < \infty\}$ функцій, для яких ∞ є єдиною особливою точкою — логарифмічною особливою точкою. Множина A_l є комутативним кільцем без дільників нуля (цілісним кільцем). Через M_l позначимо поле часток кільця A_l, (кожне цілісне кільце можна занурити у деяке поле ([1, с. 52, 58])) $A_l \subset M_l$. Якщо $f \in M_l$, то функція $f(z), z \in G$, називається *мероморфною функцією з логарифмічною особливою точкою в* ∞.

Розглянемо систему

$$\frac{dy_j}{dz} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}y_i, \quad 1 \le j \le n, \tag{1}$$

де всі $a_{ji}(z) \in M_l$. Якщо $\{C_\nu\}$ – множина полюсів всіх коефіцієнтів системи (1), то будь-який вектор-розв'язок такої системи має компоненти, які є, взагалі кажучи, аналітичними багатозначними функціями в $\mathbb{C}\setminus\{C_\nu\}$ ([2, гл. 12]). Далі без пояснень використовуємо основні поняття і стандартні позначення неванліннівської теорії ([3]).

Візьмемо довільні α, β, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, і для функції $f \in M_l$ через $f(z)$, $z \in g_{\alpha,\beta} = \{z = re^{i\varphi} : \alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 < r_0 \le r < +\infty\}$ позначимо однозначну вітку функції $f(z), z \in G$, на частині ріманової поверхні $g_{\alpha,\beta}$, де $g_{\alpha,\beta}$— однозв'язна область на відповідній рімановій поверхні (див. [4, с. 12]).

Для однозначної вітки $f(z), z \in g_{\alpha,\beta}$, мероморфної функції $f \in M_l$ позначимо

$$m_{\alpha,\beta}(r, f) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \ln^+ |f(z)|_{z=re^{i\varphi} \in g_{\alpha,\beta}} d\varphi.$$

Якщо $f \in M_l$ і має порядок зростання $\rho[f] < +\infty$, то ([5])

$$m_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 2(\rho + 1 + \varepsilon)\ln r, \qquad r \notin \Delta,\ \Delta \subset [0, +\infty),\ \text{mes}\Delta < \infty,\ \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Нехай дано диференціальне рівняння*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(z)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_0(z)\,y = 0, \tag{3}$$

де $a_j \in M_l, j = 0, 1, \ldots, n-1$, *і*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m_{\alpha,\beta}(r, a_{n-1})}{\ln r} > q \ge 0.$$

Якщо $y_1, \ldots, y_n$ *— фундаментальна система розв'язків рівняння (3), така, що* $y_1, \ldots, y_n \in M_l$, *то хоча б один із цих розв'язків* y_i, $i = 1, \ldots, n$, *має порядок зростання* $\rho[y_i] > \frac{1}{2}q - 1$.

□ *Доведення.* Насправді, відомо, що $a_{n-1} = -W'(z)/W(z)$, де $W = W[y_1, \ldots, y_n]$ – вронскіан функцій $y_1, \ldots, y_n$. Якщо $\rho[y_i] \le q/2 - 1$ для $1 \le i \le n$, то $\rho[y_i^{(k)}] \le q/2 - 1$ для всіх $k = 1, 2, \ldots,$ $1 \le i \le n$. Отже, $\rho[W] \le q/2 - 1$. Тоді згідно з (2), $m_{\alpha,\beta}(r, a_{n-1}) = m_{\alpha,\beta}(r, W'/W) \le 2(q/2 - 1 + 1 + \varepsilon)\ln r = (q + 2\varepsilon)\ln r$, тобто

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m_{\alpha,\beta}(r, a_{n-1})}{\ln r} \le q,$$

що суперечить припущенню теореми. Отже, твердження теореми правильне. ■

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (1). Позначимо $\mathrm{Sp}A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{jj}$. Нас цікавитимуть вектор-розв'язки $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, компоненти яких $y_j \in M_l$, $j = 1, \ldots, n$. У такому разі казатимемо, що вектор-розв'язок $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in M_l$. Під порядком вектор-розв'язку $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in M_l$ розуміємо максимальний з порядків його компонент.

Теорема 2. *Нехай дано систему диференціальних рівнянь (1). Якщо*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m_{\alpha,\beta}(r, \mathrm{Sp}A)}{\ln r} > q \geq 0,$$

то система (1) має не більше $n-1$ лінійно незалежних мероморфних з логарифмічною особливою точкою в ∞ вектор-розв'язків порядку $\rho \leq \frac{1}{2}q - 1$.

У випадку однозначних мероморфних функцій твердження теорем 1, 2 доведені в [6], а твердження, подібні до теореми 3, досліджували в [7]. Новим етапом є використання результатів з [5].

Під час доведення теореми 2 і надалі використовуємо таку оцінку.

Теорема А. *Нехай $R(f_1, \ldots, f_n)$ — многочлен від $f_1, \ldots, f_n$, $\deg_{f_j} R = k_j$, $1 \leq j \leq n$. Тоді*

$$m_{\alpha,\beta}(r, R(f_1, \ldots, f_n)) \leq \sum_j k_j m_{\alpha,\beta}(r, f_j) + O(1).$$

Доведення цієї теореми еквівалентне відповідному доведенню у роботі [8].

Доведемо теорему 2.

□ *Доведення.* Відомо ([9]), що детермінант $D(z)$ фундаментальної матриці-розв'язку системи (1) задовольняє рівність

$$\frac{D'(z)}{D(z)} = \mathrm{Sp}A.$$

Припустимо, що маємо n лінійно незалежних вектор-розв'язків системи (1), $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{nj}) \in M_l$, які мають порядок $\rho \leq \frac{1}{2}q - 1$. Тоді

$$\rho[D(z)] \leq \max_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \rho[y_{ij}] \leq \frac{1}{2}q - 1.$$

Звідси в силу (2) маємо

$$m_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{D'(z)}{D(z)}\right) = m_{\alpha,\beta}(r, \mathrm{Sp}A) \leq (q + 2\varepsilon)\ln r,$$

$$r \notin \Delta, \ \mathrm{mes}\Delta < \infty,$$

тобто $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{m_{\alpha,\beta}(r,\mathrm{Sp}A)}{\ln r} \leq q$, що суперечить припущенню теореми. Отже, твердження теореми доведене. ■

Нехай матриця коефіцієнтів системи (1) має вигляд

$$A = B_0(z) = \left\| \begin{array}{ccccc} s_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & s_2 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & p_{n-1} \\ a_{n,1} & \ldots & \ldots & \ldots & s_n \end{array} \right\|. \quad (4)$$

Введемо позначення ($1 \leq j \leq n, \ 1 \leq k \leq n - j + 1$):

$$d_{jk}(A) = \left| \begin{array}{ccccc} s_k & p_k & 0 & \ldots & 0 \\ a_{k+1,k} & s_{k+1} & p_{k+1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k+j-1,k} & \ldots & \ldots & \ldots & s_{k+j-1} \end{array} \right|, \quad (5)$$

$$d_{-jk}(A) \equiv 0, \ d_{0k} \equiv 1, \ H_j(A) = \sum_{k=1}^{n+1-j} d_{jk}(A).$$

Нехай $h(z) = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, де $h_j \in M_l$, $j = 1, \ldots, n$, скінченного порядку. Тоді

$$Q_0(A, h) \equiv 1, \ Q_k(A, h) = \left| \begin{array}{cccccc} s_1 - h_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & s_2 - h_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & s_{k-1} - h_{k-1} & p_{k-1} \\ a_{k,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & s_k - h_k \end{array} \right|. \quad (6)$$

Для фіксованого цілого числа m, $0 \leq m \leq n-1$, позначимо:

$$\gamma = \gamma_m = \overline{\lim_{r\to\infty}} \, m_{\alpha,\beta}(r, H_{n-m}(A)) / \ln r;$$

$$\chi = \chi_m = \max_{\substack{1\leq j\leq n-m-1 \\ 1\leq k\leq n-j+1}} \overline{\lim_{r\to\infty}} \, m_{\alpha,\beta}(r, d_{jk}(A)) / \ln r, \quad 0 \leq m \leq n-2,$$

$$\chi_{n-1} = 0, \ K = K_m = \tfrac{1}{2}(n + m + 2)(n - 1), \ N = N_m = (m + 1)(n - m).$$

Теорема 3. *Якщо $\gamma > K\chi$, то система (1) має не більше m лінійно незалежних вектор-розв'язків $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in M_l$ порядку*

$$\rho[Y] < \frac{1}{2}(\gamma - K\chi) N^{-1} - 1 = \frac{1}{2}q - 1.$$

Нам будуть необхідні такі леми.

Лема 1. *Якщо в системі (1) всі $p_j \not\equiv 0, 1 \le j \le n-1$, а $(w_1, \ldots, w_n) \in M_l$– нетривіальний вектор-розв'язок, то $w_1 \not\equiv 0$.*

Лема 2. *Якщо $(u_1, \ldots, u_n) \in M_l$ – нетривіальний вектор-розв'язок системи (1), в якій всі $p_j \not\equiv 0,\ 1 \le j \le n-1$, то*

$$(-1)^m \left(\frac{u_{m+1}}{u_1}\right) \prod_{j=1}^{m} p_j = Q_m(A, h),$$

де $1 \le m \le n-1,\ h = \left(u_1'/u_1, \ldots, u_m'/u_m\right)$.

Доведення цих лем на M_l подібні до доведень лем 3.1 і 3.2 у роботі [7].

Лема 3. *Кожний визначник $Q_k(A,h)$ можна представити у вигляді*

$$Q_k = d_{k1} + \sum_{j=0}^{k-2} d_{j,1} P_{j,k} - d_{k-1,1} h_k, \quad 1 \le k \le n, \quad (7)$$

де $P_{j,k}$— деякий многочлен від функцій h_t і $d_{\nu,s}$, $j+1 \le t \le k$, $j+2 \le s \le k$, $\nu < k$, степеня, не більшого за одиницю по кожній з $h_t, d_{\nu,s}$.

□ *Доведення.* Для $k = 1$ лема очевидна. Насправді, $Q_1 = d_{1,1} - d_{0,1}h_1 = d_{1,1} - h_1 = s_1 - h_1$. Припустимо, що твердження леми доведено для всіх $Q_i, 1 \le i \le k-1$, і доведемо його для Q_k. Використовуючи (6), запишемо

$$Q_k = -h_k Q_{k-1} +$$

$$+\begin{vmatrix} s_1 - h_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & s_2 - h_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & s_{k-1} - h_{k-1} & p_{k-1} \\ a_{k,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & s_k \end{vmatrix} =$$

$$= -h_k Q_{k-1} - Q_{k-2} h_{k-1} d_{1,k} +$$

$$+\begin{vmatrix} s_1 - h_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & s_2 - h_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & s_{k-1} & p_{k-1} \\ a_{k,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & s_k \end{vmatrix} =$$

$$= \ldots = d_{k,1} - h_k Q_{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} Q_i h_{i+1} d_{k-i-1,i+2}. \quad (8)$$

Підставляючи в (8) розклад Q_i для $1 \le i \le k-1$ вигляду (7), отримаємо

$$Q_k = d_{k,1} - h_k \left(d_{k-1,1} + \sum_{j=0}^{k-3} d_{j,1} P_{j,k-1} - d_{k-2,1} h_{k-1} \right) -$$
$$- \sum_{i=0}^{k-2} \left(d_{i,1} + \sum_{j=0}^{i-2} d_{j,1} P_{j,i} - d_{i-1,1} h_i \right) h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} =$$
$$= d_{k,1} - h_k d_{k-1,1} - \left\{ \sum_{j=0}^{k-3} d_{j,1} P_{j,k-1} h_k - d_{k-2,1} h_{k-1} h_k \right\} -$$
$$- \sum_{i=0}^{k-2} [d_{i,1} h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} + \sum_{j=0}^{i-2} d_{j,1} P_{j,i} h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} -$$
$$- d_{i-1,1} h_i h_{i+1} d_{k-i-1,i+2}] = d_{k,1} - h_k d_{k-1,1} - \sum_{j=0}^{k-2} d_{j,1} P^1_{j,k} -$$
$$- \sum_{i=0}^{k-2} d_{i,1} P^2_{i,k} - \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{i-2} d_{j,1} P_{j,i} h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} -$$
$$- \sum_{i=1}^{k-2} d_{i-1,1} P^3_{i,k} = d_{k,1} - h_k d_{k-1,1} - \sum_{i=1}^{k-2} d_{j,1} P^4_{j,k} -$$
$$- \sum_{j=0}^{k-4} \sum_{i=j+2}^{k-2} d_{j,1} P_{j,i} h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} = d_{k,1} - h_k d_{k-1,1} -$$
$$- \sum_{i=1}^{k-2} d_{i,1} P^4_{i,k} - \sum_{j=0}^{k-4} d_{j,1} \left\{ \sum_{i=j+2}^{k-2} P_{j,i} h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} \right\} =$$

$$= d_{k,1} - h_k d_{k-1,1} - \sum_{j=0}^{k-2} d_{j,1} P_{j,k}.$$

Тут через $P^s_{j,k}$ позначались різні многочлени, які мають ті самі властивості, що і многочлени $P_{j,k}$, які фігурують у формулюванні леми. ■

Надалі верхні індекси в різних $P^s_{j,k}$ опускатимемо.

Доведемо теорему 3.

□*Доведення.* 1) Випадок $m = n-1$ доведений у теоремі 2 в загальній формі.

Припустимо тепер, що всі $p_j \not\equiv 0,\ 1 \le j \le n-1$.

2) Нехай $m = 0$. Тоді $N = n$. Припустимо, що $W = (w_1, \ldots, w_n) \in M_l$ — нетривіальний вектор-розв'язок системи (1), $\rho[W] < q/2 - 1$. Перепишемо систему (1) так:

$$w_1 \left(s_1 - \tfrac{w_1'}{w_1}\right) + p_1 w_2 = 0,$$
$$w_1 a_{2,1} + w_2 \left(s_2 - \tfrac{w_2'}{w_2}\right) + w_3 p_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w_1 a_{n,1} + \ldots + w_n \left(s_n - \tfrac{w_n'}{w_n}\right) = 0.$$

Ця система має нетривіальний розв'язок. Тому $Q_n(A, h_0) \equiv 0$, де $h_0 = (h_{0,1}, \ldots, h_{0,n}), h_{0,j} = w_j'/w_j$. Тоді $H_n(A) = d_{n,1}(A) = -Q_n(A, h_0) + d_{n,1}(A)$. Із леми 3, оцінки (2), теореми A очевидно ($\rho = \rho[W]$):

$$m_{\alpha,\beta}\left(r, H_n\left(A\right)\right) \leq \sum_{j=1}^{n} m_{\alpha,\beta}\left(r, w_j'/w_j\right) + \\ + \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq t\leq n-j+1}} m_{\alpha,\beta}\left(r, d_{j,t}\right) + O\left(1\right) = \\ = \sum_{j=1}^{n} m_{\alpha,\beta}\left(r, w_j'/w_j\right) + \left(m_{\alpha,\beta}\left(r, d_{1,1}\right) + \ldots + \right. \\ \left. + m_{\alpha,\beta}\left(r, d_{1,n}\right)\right) + \left(m_{\alpha,\beta}\left(r, d_{2,1}\right) + \ldots + \right. \\ \left. + m_{\alpha,\beta}\left(r, d_{2,n-1}\right)\right) + \ldots + \left(m_{\alpha,\beta}\left(r, d_{n-1,1}\right) + \right. \\ \left. + m_{\alpha,\beta}\left(r, d_{n-1,2}\right)\right) \leq n2\left(\rho + 1 + \varepsilon\right)\ln r + \\ + \tfrac{1}{2}\left(n+2\right)\left(n-1\right)\chi \ln r + o\left(\ln r\right), \\ r \notin \Delta, \ \mathrm{mes}\Delta < +\infty.$$

Розділимо обидві частини нерівності на $\ln r$ і перейдемо до верхньої границі, отримаємо

$$\gamma \leq n2\left(\rho + 1\right) + K\chi.$$

Оскільки за умовою $\gamma > K\chi$, то отримуємо $0,5n^{-1}\left(\gamma - K\chi\right) - 1 \leq \rho$, що суперечить припущенню.

3) Нехай тепер $0 < m < n-1$. Припустимо, що система має $m+1$ мероморфний вектор-розв'язок з логарифмічною особливою точкою у ∞ порядку $\rho < q/2 - 1$. Опишемо перехід від системи (1) із матрицею коефіцієнтів вигляду (4) розміру n до системи диференціальних рівнянь з матрицею коефіцієнтів вигляду (4) і розміру $n-1$. Нехай $U = = \left(u_1, \ldots, u_n\right) \in M_l$ і $W = \left(w_1, \ldots, w_n\right) \in M_l$ – вектор-розв'язки системи (1). Тоді за лемою 1 $u_1\left(z\right) \not\equiv 0$. Нехай

$$V = \left(v_1, \ldots, v_n\right) = \left(\frac{w_1}{u_1}, w_2 - \frac{w_1 u_2}{u_1}, \ldots, w_n - \frac{w_1 u_n}{u_1}\right). \tag{9}$$

З (1), (4) і (9) зрозуміло, що V задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$\begin{array}{c} v_1' = v_2 p_1/u_1, \\ v_2' = v_2\left(s_2 - p_1 u_2/u_1\right) + p_2 v_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n' = v_2\left(a_{n,2} - p_1 u_n/u_1\right) + \sum\limits_{k=3}^{n-1} a_{n,k} v_k + s_n v_n. \end{array} \tag{10}$$

Система (10) має матрицю коефіцієнтів вигляду

$$B = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & p_1/u_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & * & * & & * \\ \vdots & * & B_1 & & \\ 0 & * & & & \end{array} \right\|, \tag{11}$$

де

$$B_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} s_2 - p_1 u_2/u_1 & p_2 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{3,2} - p_1 u_3/u_1 & s_3 & p_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,2} - p_1 u_n/u_1 & a_{n,3} & \ldots & \ldots & s_n \end{array} \right\|, \tag{12}$$

тобто матриця B_1 має вигляд (4). З (10) очевидно, що вектор $Y_1 = \left(v_2, \ldots, v_n\right) = \left(v_{1,2}, \ldots, v_{1,n}\right)$ задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$Y_1' = B_1 Y_1. \tag{13}$$

Покажемо, як пов'язані $d_{j,k-1}\left(B_1\right), 1 \leq j \leq n-1$, $2 \leq k \leq n-j$, і $d_{j,k}\left(A\right),\ 1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n-j+1$. З (13) отримуємо для $k > 2,\ 1 \leq j \leq n-2:$

$$d_{j,k-1}\left(B_1\right) = d_{j,k}\left(A\right). \tag{14}$$

Якщо $k = 2$, то, розкриваючи $d_{j,1}\left(B_1\right)$ по першому рядку, отримуємо ($1 \leq j \leq n-1$)

$$d_{j,1}\left(B_1\right) = \left(s_2 - p_1 u_2/u_1\right) d_{j-1,3}\left(A\right) - \\ -p_2 \left| \begin{array}{ccccc} a_{3,2} - p_1 u_3/u_1 & p_3 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{4,2} - p_1 u_4/u_1 & s_4 & p_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j+1,2} - p_1 u_{j+1}/u_1 & a_{j+1,3} & \ldots & \ldots & s_{j+1} \end{array} \right| = \\ = s_2 d_{j-1,3}\left(A\right) - p_1 u_2/u_1 d_{j-1,3}\left(A\right) - \\ -p_2\left(a_{3,2} - p_1 u_3/u_1\right) d_{j-2,4}\left(A\right) + \\ +p_2 p_3 \left| \begin{array}{ccccc} a_{4,2} - p_1 u_4/u_1 & p_4 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{5,2} - p_1 u_5/u_1 & s_5 & p_5 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j+1,2} - p_1 u_{j+1}/u_1 & a_{j+1,3} & \ldots & \ldots & s_{j+1} \end{array} \right| = \\ = \ldots = d_{j,2}\left(A\right) + \sum_{k=1}^{j} p_1 p_2 \ldots p_k \tfrac{u_{k+1}}{u_1}\left(-1\right)^k d_{j-k,k+2}\left(A\right). \tag{15}$$

Застосуємо лему 2, отримаємо ($1 \leq j \leq n-1$)

$$d_{j,1}\left(B_1\right) = d_{j,2}\left(A\right) + \sum_{k=1}^{j} Q_k\left(A, h\right) d_{j-k,k+2}\left(A\right). \tag{16}$$

Під час перетворення (9) нетривіальні вектор-розв'язки $W \in M_l$ переходять в нетривіальні вектор-розв'язки $Y \in M_l$ системи (13), причому якщо $\rho[W] < q/2 - 1$, то $\rho[Y] < q/2 - 1$, а матриця B_1 має вигляд (4). Використовуючи розв'язок порядку $\rho < q/2 - 1$, зменшимо розмірність матриці ще $m - 1$ разів.

Отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$Y_k' = B_k Y_k, \quad 1 \leq k \leq m, \tag{17}$$

де $Y_k = \left(v_{k,k+1}, v_{k,k+2}, \ldots, v_{k,n}\right)$ і

$$B_k = \left\| \begin{matrix} s_{k+1} - p_k v_{k-1,k+1}/v_{k-1,k} & p_{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+2,k+1} - p_k v_{k-1,k+2}/v_{k-1,k} & s_{k+2} & p_{k+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} - p_k v_{k-1,n}/v_{k-1,k} & a_{n,k+2} & \dots & \dots & s_n \end{matrix} \right\|.$$

Нехай $h_k = (h_{k,k+1}, \dots, h_{k,n})$, де $h_{k,k+i} = v'_{k,k+i}/v_{k,k+i}$, $1 \le i \le n-k$, $1 \le k \le m$. Так, як і в (16), виразимо $d_{j,1}(B_m)$ через визначники матриці B_{m-1}. Використовуючи (8) і (16), отримаємо

$$\begin{gathered} d_{j,1}(B_m) = d_{j,2}(B_{m-1}) + \\ + \sum_{i=1}^{j-1} Q_i(B_{m-1}, h_{m-1}) d_{j-i,i+2}(B_{m-1}) + \\ + Q_j = d_{j,2}(B_{m-1}) + \\ + \sum_{i=1}^{j-1} Q_i(B_{m-1}, h_{m-1}) d_{j-i,i+2}(B_{m-1}) + d_{j,1} - \\ - \sum_{i=0}^{j-1} Q_i(B_{m-1}, h_{m-1}) h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1}). \end{gathered} \tag{18}$$

Застосуємо до (18) лему 3, отримаємо

$$\begin{gathered} d_{j,1}(B_m) = d_{j,1}(B_{m-1}) + d_{j,2}(B_{m-1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \Big\{ d_{i,1} + \\ + \sum_{t=0}^{i-2} d_{t,1} P_{t,i} - d_{i-1,1} h_{m-1,m-1+i} \Big\} d_{j-i,i+2}(B_{m-1}) - \\ - \sum_{i=0}^{j-1} \Big\{ d_{i,1} + \sum_{t=0}^{i-2} d_{t,1} P_{t,i} - \\ - d_{i-1,1} h_{m-1,m-1+i} \Big\} h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1}) = \\ = d_{j,1}(B_{m-1}) + d_{j,2}(B_{m-1}) + \\ + \sum_{i=1}^{j-1} d_{i,1} d_{j-i,i+2}(B_{m-1}) + \\ + \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{t=0}^{i-2} d_{t,1} P_{t,i} d_{j-i,i+2}(B_{m-1}) - \\ - \sum_{i=1}^{j-1} d_{i-1,1} h_{m-1,m-1+i} d_{j-i,i+2}(B_{m-1}) - \\ - \sum_{i=0}^{j-1} d_{i,1} h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1}) - \\ - \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{t=0}^{i-2} d_{t,1} P_{t,i} h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1}) + \\ + \sum_{i=0}^{j-1} d_{i-1,1} h_{m-1,m-1+i} h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1}). \end{gathered} \tag{19}$$

Розглянемо окремо кожен доданок:

а) $\sum\limits_{i=1}^{j-1} d_{i,1} d_{j-i,i+2}(B_{m-1})$, $j-i \in \{1, 2, \dots, j-1\}$, $i+2 \in \{3, 4, \dots, j+1\}$, тобто $d_{i,1}$ та $d_{j-i,i+2}$ не співпадають, і вони є першого степеня, тому всі $d_{j-i,i+2}(B_{m-1}) \in \{P_{i,j+1}\}$, де $P_{i,j+1} \in P_{t,i+2}$ — різні многочлени від функцій $h_{m-1,m-1+p}$, $d_{\nu,s}(B_{m-1})$; $t+1 \le p \le i+2$, $t+2 \le s \le i+2$, $\nu < i+2$, степеня, не більшого за одиницю по кожній з $h_{m-1,m-1+p}$, $d_{\nu,s}(B_{m-1})$.

б) $\sum\limits_{i=1}^{j-1} \sum\limits_{t=0}^{i-2} d_{t,1} P_{t,i} d_{j-i,i+2}(B_{m-1})$, де $P_{t,i}$ — многочлен від функцій h_k і $d_{\nu,s}$, $t+1 \le k \le i$, $t+2 \le s \le i$, $\nu < i$, степеня, не більшого за одиницю по кожній з h_k, $d_{\nu,s}$. Оскільки $t \in \{0, \dots, i-2\}$, то у $P_{t,i}$ індекс s набуває максимального значення i, а мінімального 2, тому $d_{\nu,s}$ не збігаються з $d_{t,1}$ та з $d_{j-i,i+2}$. Отже, можна вважати, що $P_{t,i} d_{j-i,i+2} \in \{P_{t,i+2}\}$.

в) $-\sum\limits_{i=1}^{j-1} d_{i-1,1} h_{m-1,m-1+i} d_{j-i,i+2}(B_{m-1})$, $d_{i-1,1}$ і $d_{j-i,i+2}$ не співпадають, бо $i+2 \in \{3, 4, \dots, j+1\}$, $i+2 \ne 1$; $h_{m-1,m-1+i}$ задовольняє умовам на $P_{t,i+2}$, тому $h_{m-1,m-1+i} d_{j-i,i+2} \in \{P_{t,i+2}\}$.

г) $-\sum\limits_{i=0}^{j-1} d_{i,1} h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1})$, $j-i \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, $i+2 \in \{2, 3, \dots, j+1\}$, тобто $d_{i,1}$ та $d_{j-i-1,i+2}$ не співпадають, і вони є першого степеня, $h_{m-1,m+i} = h_{m-1,m-1+i+1}$ задовольняє умовам на $P_{t,i+2}$, тому $h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1}) \in \{P_{t,i+2}\}$.

д) $-\sum\limits_{i=0}^{j-1} \sum\limits_{t=0}^{i-2} d_{t,1} P_{t,i} h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1})$, $h_{m-1,m+i}$ задовольняє умовам на $P_{t,i+2}$, тоді, аналогічно як і у випадку б), можна вважати, що $P_{t,i} h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1}) \in \{P_{t,i+2}\}$.

е) $\sum\limits_{i=0}^{j-1} d_{i-1,1} h_{m-1,m-1+i} h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1})$, $d_{i-1,1}$ і $d_{j-i-1,i+2}$ не співпадають, бо $i+2 \in \{2, 3, \dots, j+1\}$, $i+2 \ne 1$; $h_{m-1,m-1+i}$ і $h_{m-1,m+i}$ не співпадають і задовольняють умовам на $P_{t,i+2}$, тому $h_{m-1,m-1+i} h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2} \in \{P_{t,i+2}\}$. Отже, з (19) отримаємо

$$\begin{gathered} d_{j,1}(B_m) = d_{j,1}(B_{m-1}) + d_{j,2}(B_{m-1}) + \\ + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{t=0}^{i} d_{t,1}(B_{m-1}) P_{t,i+2} = \\ = d_{j,1}(B_{m-1}) + d_{j,2}(B_{m-1}) + \\ + \sum_{i=0}^{j-1} d_{i,1}(B_{m-1}) P_{i,j+1}, \end{gathered} \tag{20}$$

де $P_{i,j+1}$— різні многочлени від функцій $h_{m-1,m-1+p}$, $d_{\nu,s}(B_{m-1})$; $i+1 \le p \le j$, $i+2 \le s \le j+1$, $0 \le \nu \le j-1$, степеня, не більшого за одиницю по кожній з функцій $h_{m-1,m-1+p}$, $d_{\nu,s}(B_{m-1})$. Але $d_{\nu,s}(B_{m-1}) =$

$= d_{\nu,m+s-1}(A)$ при $s \geq 2$. Тому

$$d_{j,1}(B_m) = d_{j,1}(B_{m-1}) + d_{j,m+1}(A) + \\ + \sum_{i=0}^{j-1} d_{i,1}(B_{m-1}) P_{i,j+1}(d_{\nu,m+s-1}(A), h_{m-1,m+p-1}). \tag{21}$$

Доведемо тепер, що ($j \leq n-m$)

$$d_{j,1}(B_m) = d_{j,m+1}(A) + \\ + d_{j,m}(A) + \ldots + d_{j,1}(A) + P_{m,j}, \tag{22}$$

де $P_{j,m}$— многочлен від функцій $d_{\nu,s}(A)$, $1 \leq s \leq m+j+1$, $\nu < j$, і $h_{k,k+i}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i \leq j$, степеня не більшого за одиницю по кожній з функцій $d_{\nu,s}(A)$, $h_{k,k+i}$. Насправді, при $m=1$ маємо з (20) ($B_0 = A$)

$$d_{i,1}(B_1) = d_{i,1}(A) + d_{i,2}(A) + \\ + \sum_{t=0}^{i-1} d_{t,1}(A) P_{t,i+1}(d_{\nu,s}(A), h_{0,p}),$$

де i – будь-яке натуральне число, $i \leq n-m, \nu < i$, $t+2 \leq s \leq i+1$. Припустимо, що для всіх $i \leq n-m$ справедлива рівність

$$d_{i,1}(B_{m-1}) = d_{i,m}(A) + \\ + d_{i,m-1}(A) + \ldots + d_{i,1}(A) + P_{m-1,i}, \tag{23}$$

де $P_{m-1,i}$— многочлен від $d_{\nu,s}(A)$, $\nu < i$, $1 \leq s \leq$ $\leq m+i$, і від $h_{k,k+t}$, $1 \leq k \leq m-1$, $1 \leq t \leq i$, степеня, не більшого за одиницю по кожній з функцій. Доведемо справедливість (22). Підставляючи (23) в (21), отримаємо

$$d_{j,1}(B_m) = d_{j,m+1}(A) + d_{j,m}(A) + \ldots + d_{j,1}(A) + \\ + \{P_{m-1,j} + \sum_{i=0}^{j-1} [d_{i,m}(A) + \ldots + d_{i,1}(A) + \\ + P_{m-1,i}] P_{i,j+1}(d_{\nu,m+s-1}(A), h_{m-1,m+p-1})\}. \tag{24}$$

Розглянемо тепер окремо кожен доданок з (24), який записаний у фігурних дужках:

- $P_{m-1,j} \in \{P_{m,j}\}$, тому що за умовою $P_{m,j}$— многочлен від $d_{\nu,s}$, $1 \leq s \leq m+j+1$, $\nu < j$ та від $h_{k,k+i}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i \leq j$, степеня не більшого за одиницю по кожній з функцій $d_{\nu,s}$ та $h_{k,k+i}$, а за припущенням індукції $P_{m-1,i}$— многочлен від $d_{\nu,s}(A)$, $\nu < i$, $1 \leq s \leq m+i$ та від $h_{k,k+t}$, $1 \leq k \leq m-1$, $1 \leq t \leq i$, тобто при $i = j$ умови для многочлена $P_{m,j}$ виконуються.
- $d_{i,t}(A) P_{i,j+1}(d_{\nu,m+s-1}(A), h_{m-1,m+p-1})$, $t \in \{1, \ldots, m\}$. Оскільки у $P_{i,j+1}$ (за побудовою (20)) входять $d_{\nu,s}(B_{m-1})$, $0 \leq \nu \leq j-1 \Longrightarrow \nu < j$, то і в (21) у відповідному виразі $\nu < j$, а $i+2 \leq s \leq j+1$, тоді $m+i+1 \leq m+s-1 \leq m+j$, тобто у $P_{i,j+1}$ $d_{\nu,s}$ входить з індексами $\nu < j$, $m+i+1 \leq s \leq m+j$, а у всіх $d_{i,t}$ індекс $t < m+i+1$; $h_{m-1,m+p-1}$ входять у всі добутки в першому степені, оскільки вони входять в першому степені у $P_{i,j+1}$. Отже, $\sum_{i=0}^{j-1} [d_{i,m}(A) + + d_{i,m-1}(A) + \ldots + d_{i,1}(A)] P_{i,j+1} \in \{P_{m,j}\}$.
- $\sum_{i=0}^{j-1} P_{m-1,i} P_{i,j+1} = P_{m-1,0} P_{0,j+1} + P_{m-1,1} P_{1,j+1} + + \ldots + P_{m-1,j-1} P_{j-1,j+1}$. Многочлени $P_{m-1,i}$ містять визначники $d_{\nu,s}$ такі, що $1 \leq s \leq m+i$, $\nu < i < j$, а многочлени $P_{i,j+1}$ містять $d_{\nu,s}$ такі, що $\nu < j$, а $m+i+1 \leq s \leq m+j$, отже, вони не можуть співпадати і входять у добутки в першому степені. Далі, в $P_{m-1,i}$ входять також $h_{m-1,m+p-1}$ при $1 \leq p \leq i$, тобто другий індекс змінюється від m до $m+i-1$, а в многочлен $P_{i,j+1}$ — при $i+1 \leq p \leq j$, тобто другий індекс змінюється від $m+i$ до $m+j-1$, знову таки вони не співпадають і входять у добутки в першому степені.

Тому з вищенаведеного і з (24) очевидно

$$d_{j,1}(B_m) = d_{j,m+1}(A) + \ldots + d_{j,1}(A) + P_{m,j}.$$

Отже, формула (22) при $j \leq n-m$ виконується. Зменшуючи розмірність матриці A, використовуємо m мероморфних вектор-розв'язків з логарифмічною особливою точкою в ∞ порядку $\rho < q/2 - 1$, а за припущенням їх $m+1$; отже, система $Y_m' = B_m Y_m$ має один нетривіальний мероморфний вектор-розв'язок з логарифмічною особливою точкою в ∞ $(v_{m,m+1}, \ldots, v_{m,n})$ порядку $\rho < q/2 - 1$. Тому $Q_{n-m}(B_m, h_m) \equiv 0$. Звідси, враховуючи (8), отримаємо

$$d_{n-m,1}(B_m) = -Q_{n-m}(B_m) + d_{n-m,1}(B_m) = \\ = -d_{n-m,1}(B_m) + h_{m,m+n-m} Q_{n-m-1}(B_m) + \\ + \sum_{i=1}^{n-m-2} Q_i(B_m) h_{m,m+i+1} d_{n-m-i-1,i+2}(B_m) + \\ + h_{m,m+1} d_{n-m-1,2}(B_m) + d_{n-m,1}(B_m) = \\ = h_{m,n} Q_{n-m-1}(B_m) + \\ + \sum_{i=1}^{n-m-2} Q_i(B_m) h_{m,m+i+1} d_{n-m-i-1,i+2}(B_m) + \\ + h_{m,m+1} d_{n-m-1,2}(B_m).$$

Застосуємо лему 3 до Q_i і врахуємо, що $d_{n-m,t}(B_m) = d_{n-m,m+t}(A)$ при $t \geq 2$, тоді маємо

$$d_{n-m,1}(B_m) = h_{m,n} \Big(d_{n-m-1,1} + \\ + \sum_{t=0}^{n-m-3} d_{t,1} P_{t,n-m-1} - d_{n-m-2,1} h_{n-m-1} \Big) + \\ + \sum_{i=1}^{n-m-2} \Big(d_{i,1} + \sum_{t=0}^{i-2} d_{t,1} P_{t,i} - \\ - d_{i-1,1} h_i \Big) h_{m,m+i+1} d_{n-m-i-1,i+2}(B_m) + \\ + h_{m,m+1} d_{n-m-1,2}(B_m). \tag{25}$$

Застосуємо до кожного $d_{\nu,s}(B_m)$ з (25) формулу (22) і одержимо

$$d_{n-m,1}(B_m) = P(d_{\nu,s}(A), h_{m,m+p}), \tag{26}$$

де P – многочлен степеня, не більшого за одиницю від $d_{\nu,s}(A)$, $\nu < n-m$, $1 \le s \le n$, і від $h_{m,m+p}$, $1 \le p \le n-m$ (міркування ті самі, що і під час доведення формул (20) і (22)). З (22), (26) при $j = n-m$ зрозуміло

$$\begin{gathered} d_{n-m,m+1}(A) + d_{n-m,m}(A) + \ldots + \\ +d_{n-m,1}(A) = R(d_{\nu,s}(A), h_{k,k+p}), \end{gathered} \tag{27}$$

де R — многочлен від $d_{\nu,s}(A)$, $\nu < n-m$, $1 \le s \le n$, і від $h_{k,k+p}$, $0 \le k \le m$, $1 \le p \le n-m$, степеня не більшого за одиницю по кожній змінній. Застосуємо до (27) оцінку (2) і теорему A, отримаємо

$$m(r, H_{n-m}(A)) = m\left(r, \sum_{s=1}^{m+1} d_{n-m,s}(A)\right) \le$$

$$\le \sum_{\substack{1\le\nu\le n-m \\ 1\le t\le n-\nu+1}} m(r, d_{\nu,t}(A)) +$$

$$+(m+1)(n-m)2(\rho+1+\varepsilon)\ln r +$$

$$+o(\ln r), \quad r \notin \Delta, \ \mathrm{mes}\Delta < \infty,$$

розділимо обидві частини нерівності на $\ln r$ і перейдемо до верхньої границі, отримаємо $\gamma < K\chi + Nq$, що суперечить умові теореми.

Зауваження 1. Число K дорівнює числу різних $d_{\nu,s}(A)$, $\nu < n-m$, $1 \le s \le n-\nu+1$.

4) Досі було прийнято, що p_i тотожно не дорівнюють нулю мероморфні функції з логарифмічною особливою точкою в ∞.

Нехай деякі $p_i \equiv 0$. Тоді матриця системи (1) має вигляд

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & A_{r+1} \end{Vmatrix}, \tag{28}$$

де

$$A_j = \begin{Vmatrix} s_{i_{j-1}+1} & p_{i_{j-1}+1} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i_{j-1}+2,i_{j-1}+1} & s_{i_{j-1}+2} & p_{i_{j-1}+2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_j,i_{j-1}+1} & \ldots & \ldots & \ldots & s_{i_j} \end{Vmatrix}, \tag{29}$$

тут $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{r+1} = n$. За умовою $\gamma_m > K_m\chi_m$. Звідси очевидно, що $n-m \le \max[i_j - i_{j-1}]$, $1 \le j \le r+1$. Насправді, нехай $n-m > \max[i_j - i_{j-1}]$. Оскільки матриця A має вигляд (28), то кожен $d_{n-m,k}(A)$ дорівнює добутку не менше двох визначників $d_{\nu,s}$, $\nu < n-m$, які є мінорами матриць A_p, які використовують рядки $k, k+1, \ldots, k+n-m$ матриці A. Враховуючи теорему A

$$m(r, H_{n-m}(A)) \le \sum_{\substack{i\le\max[i_j-i_{j-1}] \\ 1\le t\le n}} m(r, d_{i,t}(A)).$$

Розділимо на $\ln r$ обидві частини попередньої нерівності і перейдемо до верхньої границі, тоді отримаємо $\gamma_m \le K_m\chi_m$, що суперечить умові теореми.

Нехай в (29) $\{A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}\} = \{A_j : i_j - i_{j-1} \ge n-m\}$. Шукатимемо мероморфні вектор-розв'язки з логарифмічною особливою точкою в ∞ системи (1) у вигляді

$$V = \left(0, \ldots, 0, v_{i_{p-1}+1}, \ldots, v_{i_p}, \ldots, v_n\right), \quad p = p_1, \ldots, p_k. \tag{30}$$

Тоді система (1) має вигляд

$$\begin{cases} v'_{i_{p-1}+1} = s_{i_{p-1}+1}v_{i_{p-1}+1} + p_{i_{p-1}+1}v_{i_{p-1}+2}, \\ v'_{i_{p-1}+2} = a_{i_{p-1}+2,i_{p-1}+1}v_{i_{p-1}+1} + s_{i_{p-1}+2}v_{i_{p-1}+2} + p_{i_{p-1}+2}v_{i_{p-1}+3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v'_{i_p} = a_{i_p,i_{p-1}+1}v_{i_{p-1}+1} + \ldots + s_{i_p}v_{i_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v'_n = a_{n,i_{p-1}+1}v_{i_{p-1}} + \ldots + s_nv_n, \end{cases} \tag{31}$$

тобто перші $i_p - i_{p-1}$ рівнянь є рівняннями системи

$$V' = A_pV, \quad (p = p_1, p_2, \ldots, p_k), \tag{32}$$

в яку не входять v_l, $l > i_p$. Тому компоненти $v_{i_{p-1}+1}, \ldots, v_{i_p}$ можна одержати з (32). Припустимо, що для всіх $p = p_1, \ldots, p_k$ система (32) має не менше $i_p - i_{p-1} - (n-m) + 1$ лінійно незалежних мероморфних вектор-розв'язків з логарифмічною особливою точкою в ∞ порядку $\rho < q/2 - 1$. Тоді до A_p можна застосувати формулу (27). Отримаємо

$$\begin{gathered} H_{n-m}(A_p) = d_{n-m,1}(A_p) + \ldots + \\ +d_{n-m,i_p-i_{p-1}-n+m}(A_p) + \\ +d_{n-m,i_p-i_{p-1}-n+m+1}(A_p) = \\ = R_p(d_{\nu,s}(A_p), h_{k,k+p}), \end{gathered} \tag{33}$$

де R_p— многочлен від $d_{\nu,s}(A)$, $\nu < n-m$, $i_{p-1}+1 \le s \le i_p$, і від $h_{k,k+t}$, $0 \le k \le m$, $1 \le t \le n-m$, степеня, не більшого за одиницю по кожній змінній. Тоді

$$H_{n-m}(A) = \sum_{s=1}^{m+1} d_{n-m,s}(A) = \\ = \sum_{l=1}^{k} H_{n-m}(A_{p_l}) + \sum_{s} d_{n-m,s}(A). \tag{34}$$

Тут у другу суму ввійшли $d_{n-m,s}(A)$, які мають таку властивість: під час побудови цих визначників використовуються рядки матриці A, які не всі одночасно входять в одну і ту саму матрицю A_p, $p = p_1, \ldots, p_k$, тому кожен такий визначник дорівнює добутку не менше двох визначників $d_{\nu,s}(A)$, $\nu < n - m$,

$$d_{n-m,s}(A) = d_{\nu,\tau}(A)\, d_{c,p}(A), \ \nu + c = n - m. \tag{35}$$

З (33), (34), (35) отримаємо, застосовуючи теорему А і оцінку (2):

$$m(r, H_{n-m}(A)) \leq m(r, \sum_{l=1}^{k} R_{p_l}(d_{\nu,s}(A_{p_l}), h_{k,k+t})) + \\ + m(r, \sum_{\substack{c+\nu=n-m \\ c\geq 1,\ \nu\geq 1}} d_{c,p}(A)\, d_{\nu,\tau}(A)) + O(1) \leq \\ \leq \sum_{\nu \leq n-m} m(r, d_{\nu,s}(A)) + \sum_{l=1}^{k} \left(i_{p_l} - i_{p_{l-1}} - n + m + \right. \\ \left. +1\right)(n-m)\, 2(\rho + 1 + \varepsilon) \ln r + o(\ln r) \leq \\ \leq \sum_{\substack{\nu<n-m \\ 1\leq s\leq n}} m(r, d_{\nu,s}(A)) + (m+1)(n- \\ -m)\, 2(\rho + 1 + \varepsilon) \ln r + o(\ln r).$$

Розділимо обидві частини нерівності на $\ln r$ і перейдемо до верхньої границі, отримаємо $\gamma \leq K\chi + Nq$, що суперечить умові теореми. Тому існує p_i, за якого система (32) має не більше $i_p - i_{p-1} - (n-m)$ лінійно незалежних мероморфних вектор-розв'язків з логарифмічною особливою точкою в ∞ порядку $\rho < q/2 - 1$. Отже, система (32) має $n - m$ лінійно незалежних розв'язків, які або не є мероморфними з логарифмічною особливою точкою в ∞, або мають порядок $\rho \geq q/2 - 1$. Тоді і серед вектор-розв'язків (30) системи (1) є не менше $n - m$ лінійно незалежних вектор-розв'язків, які не є мероморфними з логарифмічною особливою точкою в ∞ або мають порядок $\rho \geq q/2 - 1$. Тоді будь-яка нетривіальна лінійна комбінація цих $n - m$ векторів є вектор-розв'язком, який або не є мероморфним з логарифмічною особливою точкою в ∞, або має порядок $\rho \geq q/2 - 1$. Насправді, інакше для розв'язків системи (32) можна було б скласти лінійну комбінацію, яка дала б ще один мероморфний вектор-розв'язок з логарифмічною особливою точкою в ∞ порядку $\rho < q/2 - 1$, що не правильно. Розглянемо векторний простір розв'язків системи (1) і за базис приймемо вектори (30). Тоді підпростір, який складається з вектор-розв'язків системи (1), які не є мероморфними вектор-розв'язками з логарифмічною особливою точкою в ∞ порядку $\rho < q/2 - 1$, має розмірність, не меншу за $n - m$. Отже, із векторів цього підпростору можна скласти не менше, ніж $n - m$ лінійних комбінацій, які дадуть лінійно незалежні вектор-розв'язки системи (1), і ці вектор-розв'язки не є мероморфними з логарифмічною особливою точкою в ∞ порядку $\rho < q/2 - 1$. Тому будь-яка фундаментальна система розв'язків для (1) має не менше, ніж $n - m$ вектор-розв'язків, які не є мероморфними вектор-розв'язками з логарифмічною особливою точкою в ∞ порядку $\rho < q/2 - 1$. Теорему доведено. ■

Література

[1] Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 624 с.

[2] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ГОН, 1939.

[3] Goldberg A., Ostrovsky J. Value distribution of meromorphic functions – AMS, 2008, 488 pp.

[4] Мохонько А.З., Куземко Л.І. Про логарифмічну похідну мероморфної функції. Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія фіз.-мат. науки – 2006. – № **566** – С.12–19.

[5] Mokhon'ko A.Z., Kolyasa L.I. Estimates of the logarithmic derivative of meromorphic function with a logarithmic singularity at ∞ and their applications. Matematychni Studii, vol. **28** (2007), No. **2**. – С.151–161.

[6] Мохонько В.Д. О мероморфных решениях линейных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами. Дифференц. уравнения, 1973. т. **9**, № **8**. – С.1534–1536.

[7] Hengartner W. Über die Wachstumsordnung eines linearen Systems von Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten. Comment. math. helv., vol. **42** (1967), No. **1**.

[8] Мохонько А.З., Мохонько В.Д. Оценки неванлинновских характеристик некоторых классов мероморфных функций и их приложения к дифференциальным уравнениям. Сиб. мат. журн., 1974. т. **15**, № **6**. – С.1305–1322.

[9] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1958. – С. 276.

ABOUT MEROMORPHIC SOLUTIONS WITH A LOGARITHMIC SINGULARITY AT ∞ OF SYSTEMS OF THE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.D. Mokhon'ko[a], A.Z. Mokhon'ko[b], L.I. Kolyasa[b]

[a] *Lviv Polytechnic technical college*
19, Pymonenka Str., Lviv, 79035, Ukraine
[b] *Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

In article we obtain estimates of the order of growth of meromorphic solutions with a logarithmic singularity at ∞ of the linear differential equations and systems of the linear differential equations which coefficients are meromorphic functions with a logarithmic singularity at ∞.

Keywords: logarithmic singularity, meromorphic solution, estimates of growth, differential equations.

2000 MSC: 30D30, 34M05

УДК: 517.925.6